

# 各向异性介质中有衬砌的非圆形结构与SH波的相互作用\*

史守峡<sup>1</sup> 韩 峰<sup>1</sup> 王振清<sup>1</sup> 刘殿魁<sup>1</sup>

(钱伟长推荐, 1995年6月1日收到)

## 摘 要

本文利用复变函数方法求解各向异性介质中有衬砌的非圆形结构与SH波的相互作用问题。各向异性介质可以用来模拟结构周围的地质条件。利用作者在文献[5,7]中的方法决定介质和衬砌结构中的散射波, 结合Savin在文献[6]中求解有衬砌结构所采用的对结构轮廓线进行近似处理的方法, 并利用结构与介质的连续性条件与衬砌内边界上的边界条件, 对问题进行求解。作为算例, 本文讨论了在同一种各向异性介质中, 两种不同材料组成的正方形有衬砌的结构与SH波的相互作用问题, 给出了数值分析结果。

**关键词** SH波 各向异性介质 非圆形有衬砌结构

## 一、前 言

弹性波与圆形或非圆形有衬砌结构的相互作用问题的研究, 无论在理论或在工程应用方面, 均有着重要的意义。在各向同性介质中, 弹性波与有衬砌的圆形结构相互作用问题的研究, 已经取得了一些有价值的研究成果<sup>[1,2,3]</sup>。但在各向异性介质中弹性波与圆形结构、特别是非圆形结构的相互作用问题的研究, 虽然广泛地受到重视, 但所得的结果却是非常有限的。最近, 作者利用复变函数和保角映射的方法, 研究了各向异性介质中, 最为简单的SH波对无衬砌的圆形和非圆形结构的散射问题<sup>[5,7]</sup>, 这为研究各向异性介质中SH波与有衬砌的圆形和非圆形结构物的相互作用问题, 提供了一种分析的方法。

本文利用复变函数方法, 并结合Savin在求解有衬砌结构静应力集中问题时所采用的对结构轮廓线可用近似方法来处理的原则<sup>[6]</sup>, 求解了各向异性介质中SH波与圆形和非圆形有衬砌结构的相互作用问题。各向异性介质可以用来模拟结构周围的地质条件。研究结果表明: 该问题的渐近解, 仍然可以用“域函数”为项的函数序列来表示, 而问题即可借助于正交函数序列展开, 用数值方法进行计算。在本文中, 分析了各向异性介质中由混凝土和钢这两类不同材料所构成的圆形和正方形有衬砌的结构与SH波的相互作用, 并给出了数值结果。

\* 国家自然科学基金资助项目。

1 哈尔滨工程大学航天工程系, 哈尔滨 150001。

## 二、简化模型 控制方程和它的解

### 2.1 简化模型

对非圆形有衬砌的结构可以用复变函数和保角映射的方法来求解.取映射函数 $Z=\Omega(\lambda)$ 它可分别将非圆形衬砌的内边界和外边界映射成一个内径为1, 外径大于1的一个圆环.结构的内、外边界分别与圆环的内边界和外边界相对应.实际上,如果认定,结构的内边界与圆环内边界相对应,且是“精确的”,则通过实际计算可知:圆环中大于1的外边界圆所对应的结构外边界不再“精确”.当结构的厚度不大时,这个差别在工程设计中是完全可以接受的.例如,我们可令映射函数 $Z=\Omega(\lambda)$ 将真实结构(a)映射成一个环(b),若取内边界为精确的,则结构外边界成一个半径大于1的外圆相对应.实际计算表明:此圆环对应着一个新结构(c).当结构厚度不大时,(c)与(a)之间的差别是很小的,在实际计算中,可用(c)代替(a).本文将结合Savin在静力问题中处理有衬砌结构问题时所采用的这一近似方法<sup>[6]</sup>,利用[5,7]中的方法决定介质和衬砌结构中的散射波,求解各向异性介质中SH波与非圆形有衬砌结构的相互作用问题.

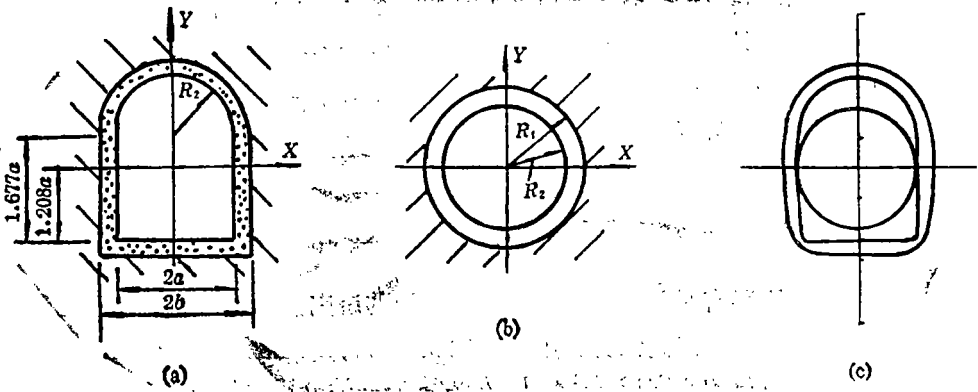


图1 有衬砌和入射HS波的非圆结构的图形

### 2.2 控制方程和它的解

稳态SH波 $W=\text{Re}[W(x,y)\exp[-i\omega t]]$ 在各向异性介质中传播的控制方程可以写成<sup>[5,7]</sup>:

$$C_{55}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2C_{45}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} + C_{44}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \rho_1\omega^2 W = 0 \quad (2.1)$$

其中 $W$ 为出平面位移; $C_{55}$ 、 $C_{45}$ 、 $C_{44}$ 和 $\rho_1$ 分别为各向异性介质的弹性常数和密度; $\omega$ 为波的圆频率.而各向异性介质中的虎克定律是:

$$\tau_{zx} = C_{55}\frac{\partial W}{\partial x} + C_{45}\frac{\partial W}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = C_{45}\frac{\partial W}{\partial x} + C_{44}\frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.2)$$

由于 $C_{55}$ 、 $C_{45}$ 和 $C_{44}$ 应当满足弹性矩阵的正定性条件,则有:

$$C_{55} > 0, \quad C_{55}C_{44} - C_{45}^2 > 0 \quad (2.3)$$

利用复变量 $Z=x+iy$ ,  $\bar{Z}=x-iy$ 和将 $Z$ 平面上的非圆形孔洞映射为 $\lambda$ 平面上单位圆的映射函数 $Z=\Omega(\lambda)$ ,则在 $\lambda$ 平面上控制方程(2.1)可以写成:

$$\begin{aligned} & (C_{55} - C_{44} + 2iC_{45}) \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right) + 2(C_{44} + C_{55}) \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left( \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial W}{\partial \bar{\lambda}} \right) \\ & + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left( \frac{1}{\Omega'(\lambda)} \frac{\partial W}{\partial \bar{\lambda}} \right) + \rho_1 \omega^2 W = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

再引入如下的关于映射函数 $\Omega(\lambda)$ 的变换:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(1-i\gamma)\Omega(\lambda) + (1+i\gamma)\overline{\Omega(\lambda)}] \\ \bar{\xi} &= \frac{1}{2} [(1-i\bar{\gamma})\Omega(\lambda) + (1+i\bar{\gamma})\overline{\Omega(\lambda)}] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中  $\gamma$  为复常数, 且  $\gamma = -C_{45}/C_{44} + i(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{1/2}/C_{44}$

利用式(2.5), 则控制方程(2.4)可写成

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = \left( \frac{iK_1}{2} \right)^2 W \quad (2.6)$$

其中  $K_1 = \frac{\omega}{C_T}$ ;  $C_T^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}$  和  $\mu_1 = \frac{(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{1/2}}{C_{44}}$

由文献[5,7]知, 由方程(2.6)所决定的散射波有如下的形式:

$$W^{(s)} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(\cdot)}(K_1 |\xi(\lambda)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda)}{|\xi(\lambda)|} \right\}^n \quad (2.7)$$

其中  $A$  为待定的常数;  $H_n^{(\cdot)}(\cdot)$  是  $n$  阶的以  $K_1 |\xi|$  为宗量的第一类或第二类Hankel函数, 它们分别表示外行波或汇聚波。

### 2.3 应力表达式

在  $Z$  平面上, 应力可写成:

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = (C_{55} + C_{44}) \frac{\partial W}{\partial Z} + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} \quad (2.8)$$

在极坐标系中, 应力可写成:

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = \left[ (C_{55} + C_{44}) \frac{\partial W}{\partial Z} + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} \right] \exp[i\theta] \quad (2.9)$$

在  $\lambda$  平面上, 则应力表达式(2.8)可写成:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} - i\tau_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left\{ [(C_{55} + C_{44})(1-i\gamma) + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45})(1+i\gamma)] \frac{\partial W}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + [(C_{55} + C_{44})(1-i\bar{\gamma}) + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45})(1+i\bar{\gamma})] \frac{\partial W}{\partial \bar{\xi}} \right\} \frac{\lambda \Omega'(\lambda)}{R |\Omega'(\lambda)|} \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中  $\lambda = R \exp[i\theta]$ , 代式(2.7)至(2.10), 则在  $\lambda$  平面上, 散射应力有:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(s)} &= \frac{C_{55} K_1}{4} \left\{ (a+ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(\cdot)}(K_1 |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. - (b-ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(\cdot)}(K_1 |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} \frac{\lambda \Omega'(\lambda)}{R |\Omega'(\lambda)|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (b+ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
 & \left. - (a-ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} \frac{\bar{\lambda}}{R} \frac{\overline{\Omega'(\lambda)}}{|\Omega'(\lambda)|} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z}^{(\theta)} = & \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (-c+ia) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
 & - (c+ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \left. \right\} \frac{\lambda}{R} \frac{\Omega'(\lambda)}{|\Omega'(\lambda)|} \\
 & + \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (c-ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
 & \left. + (c+ia) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(\cdot)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} \frac{\bar{\lambda}}{R} \frac{\overline{\Omega'(\lambda)}}{|\Omega'(\lambda)|} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 a = & (\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad b = -(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 c = & \frac{\xi(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\eta}
 \end{aligned}$$

且

$$\xi = \frac{C_{45}}{C_{55}}, \quad \eta = \frac{C_{44}}{C_{55}}.$$

### 三、入射波和入射应力

#### 3.1 入射波

在稳态波条件下,各向异性介质中沿 $\mathbf{n}$ 方向入射的SH波,可写成:

$$W^{(i)} = W_0 \exp[i(K_x(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega t)] \quad (3.1)$$

其中  $\cos \alpha = n_x$ ,  $\sin \alpha = n_y$ ;  $W_0$  为入射波的幅值;  $\omega = K_x C_x$  为入射波的圆频率;  $C_x$  为各向异性介质中沿 $\mathbf{n}$ 方向传播的SH波的波速<sup>[5,7]</sup>,即

$$C_x = \left[ \frac{1}{\rho} (C_{55} \cos^2 \alpha + 2C_{45} \sin \alpha \cos \alpha + C_{44} \sin^2 \alpha) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

在 $\lambda$ 平面上,式(3.1)有:

$$W^{(i)} = W_0 \exp \left[ \frac{iK_x}{2} (\Omega(\lambda) e^{-i\alpha} + \overline{\Omega(\lambda)} e^{i\alpha}) \right] \exp[-i\omega t] \quad (3.3)$$

进一步,在极坐标系中,式(3.1)可展成Fourier级数:

$$W^{(i)} = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_x r) \exp[in(\theta - \alpha)] \exp[-i\omega t] \quad (3.4)$$

其中  $J_n(\cdot)$  为 $n$ 阶的Bessel函数.

在 $\lambda$ 平面上,式(3.4)可以写成:

$$W^{(t)} = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^n \exp[-ina] \exp[-i\omega t] \quad (3.5)$$

### 3.2 入射应力

代式(3.5)至式(2.9), 可得到入射应力的表达式:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(t)} = & \frac{C_{55} K_a W_0}{4} \left\{ \left[ (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \right. \\ & - (1-\eta-2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \left. \right] \frac{\lambda}{R} \frac{\Omega'(\lambda)}{|\Omega'(\lambda)|} \\ & + \left[ (1-\eta+2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \\ & \left. \left. - (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \right] \frac{\bar{\lambda}}{R} \frac{\overline{\Omega'(\lambda)}}{|\overline{\Omega'(\lambda)}|} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(t)} = & \frac{C_{55} K_a W_0}{4} \left\{ \left[ i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \right. \\ & - (i(1-\eta)+2\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \left. \right] \frac{\lambda}{R} \frac{\Omega'(\lambda)}{|\Omega'(\lambda)|} \\ & + \left[ (2\xi-i(1-\eta)) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \\ & \left. \left. + i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a |\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \right] \frac{\bar{\lambda}}{R} \frac{\overline{\Omega'(\lambda)}}{|\overline{\Omega'(\lambda)}|} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

## 四、各向异性介质中有衬砌的非圆形结构与SH波的相互作用

研究各向异性介质中有衬砌的非圆形结构与SH波的相互作用时, 可假定衬砌是各向同性的, 而衬砌的内边界为自由的。这是实际工程中最为常见的情况。

### 4.1 各向异性介质和衬砌结构中的SH波

在各向异性介质中, 入射波遇到衬砌结构之后, 则要在各向异性介质中产生一个外行的散射波 $W_1^{(e)}$ 。由此可知, 各向异性介质中总的波场 $W_1^{(t)}$ 是:

$$W_1^{(t)} = W^{(i)} + \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(K_1 |\xi(\lambda)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda)}{|\xi(\lambda)|} \right\}^n \quad (4.1)$$

而在衬砌内, 由于入射波的作用, 在衬砌结构的两个界面上, 将产生折射波和反射波, 即一个向心的汇聚波和一个发散的外行波。衬砌内总的波场 $W_1^{(i)}$ 是:

$$W_{\mathbf{I}}^{(s)} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^n + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda)}{|\Omega(\lambda)|} \right\}^n \quad (4.2)$$

其中  $K_{\mathbf{I}} = \omega/C_s$ ;  $C_s^2 = \mu_2/\rho_2$ ,  $\mu_2$ 和 $\rho_2$ 分别为有衬砌介质的弹性常数和密度,  $C_s$ 为衬砌介质中SH波的波速.

## 4.2 边界条件

本文所讨论的问题给出如下的条件: (1)连续性条件: 在介质与衬砌的结合部分, 给出位移和应力的连续性条件; (2)应力的边界条件: 在结构的内边界上给出应力自由的边界条件, 而在无穷远处的Sommerfeld辐射条件可由 $W_{\mathbf{I}}^{(s)}$ 满足. 以上各个条件, 在 $\lambda$ 平面上, 有如下的形式:

(1) 连续性条件:

$$R=R_2 > 1, \quad W_{\mathbf{I}}^{(s)} - W_{\mathbf{I}}^{(i)} = 0 \quad (4.3)$$

$$\tau_{rz, \mathbf{I}}^{(s)} - \tau_{rz, \mathbf{I}}^{(i)} = 0 \quad (4.4)$$

(2) 应力边界条件:

$$R=R_2=1, \quad \tau_{rz, \mathbf{I}}^{(s)} = 0 \quad (4.5)$$

代式(4.1), (4.2)至式(4.3), (4.4)和(4.5), 则有:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{-\infty}^{\infty} E_n^{ij}(\lambda_j) X_n^j = E \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.6)$$

其中  $X_n^1 = A_n, X_n^2 = B_n, X_n^3 = C_n$

$$E_n^{11} = H_n^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^n$$

$$E_n^{12} = -H_n^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^n$$

$$E_n^{13} = -H_n^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^n$$

$$\begin{aligned} E_n^{21} = & \frac{C_{55}K_{\mathbf{I}}}{4} \left\{ (a+ic)H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. - (b-ic)H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \right\} \frac{\lambda_1}{R_1} \frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|} \\ & + \frac{C_{55}K_{\mathbf{I}}}{4} \left\{ (b+ic)H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. - (a-ic)H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \right\} \frac{\bar{\lambda}_1}{R_1} \frac{\overline{\Omega'(\lambda_1)}}{|\overline{\Omega'(\lambda_1)}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n^{22} = & \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2} \left\{ H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \frac{\lambda_1}{R_1} \frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|} \right. \\ & \left. - H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \frac{\bar{\lambda}_1}{R_1} \frac{\overline{\Omega'(\lambda_1)}}{|\overline{\Omega'(\lambda_1)}|} \right\} \end{aligned}$$

$$E_n^{23} = \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2} \left\{ H_{n-1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \frac{\lambda_1}{R_1} \frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|} \right.$$

$$-H_{n+1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^{n+1}\frac{\bar{\lambda}_1}{R_1}\frac{\overline{\omega'(\lambda_1)}}{|\Omega'(\lambda_1)|}$$

$$E_n^{31}=0$$

$$E_n^{32}=\frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2}\left\{H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_2)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_2)}{|\Omega(\lambda_2)|}\right\}^{n-1}\frac{\lambda_2}{R_2}\frac{\Omega'(\lambda_2)}{|\Omega'(\lambda_2)|}\right.$$

$$\left.-H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_2)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_2)}{|\Omega(\lambda_2)|}\right\}^{n+1}\frac{\bar{\lambda}_2}{R_2}\frac{\overline{\Omega'(\lambda_2)}}{|\Omega'(\lambda_2)|}\right\}$$

$$E_n^{33}=\frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2}\left\{H_{n-1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_2)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_2)}{|\Omega(\lambda_2)|}\right\}^{n-1}\frac{\lambda_2}{R_2}\frac{\Omega'(\lambda_2)}{|\Omega'(\lambda_2)|}\right.$$

$$\left.-H_{n+1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|\Omega(\lambda_2)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_2)}{|\Omega(\lambda_2)|}\right\}^{n+1}\frac{\bar{\lambda}_2}{R_2}\frac{\overline{\Omega'(\lambda_2)}}{|\Omega'(\lambda_2)|}\right\}$$

$$E_1=-W_0\sum_{-\infty}^{\infty}(i)^n J_n(K_{\sigma}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^n \exp[-ina]$$

$$E_2=-\frac{C_{55}K_{\sigma}W_0}{4}\left\{\left[(1+\eta)\sum_{-\infty}^{\infty}(i)^n J_{n-1}(K_{\sigma}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^{n-1}\exp[-ina]\right.\right.$$

$$\left.- (1-\eta-2i\xi)\sum_{-\infty}^{\infty}(i)^n J_{n+1}(K_{\sigma}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^{n+1}\exp[-ina]\right]\frac{\lambda_1}{R_1}\frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|}$$

$$+ [(1-\eta+2i\xi)\sum_{-\infty}^{\infty}(i)^n J_{n-1}(K_{\sigma}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^{n-1}\exp[-ina]$$

$$\left.- (1+\eta)\sum_{-\infty}^{\infty}(i)^n J_{n+1}(K_{\sigma}|\Omega(\lambda_1)|)\left\{\frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|}\right\}^{n+1}\exp[-ina]\right]\frac{\bar{\lambda}_1}{R_1}\frac{\overline{\Omega'(\lambda_1)}}{|\Omega'(\lambda_1)|}$$

$$E_3=0$$

其中  $\lambda_1=R_1\exp[i\theta]$ ,  $\lambda_2=R_2\exp[i\theta]$ .

在方程(4.6)两边乘以  $\exp[is\theta]$ , 并在  $[-\pi, \pi]$  上积分, 则

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{-\infty}^{\infty} E_{ns}^{ij}(\lambda_i) X_n^j = E_{is} \quad (i=1, 2; s=0, \pm 1, \pm 2) \quad (4.7)$$

其中  $E_{ns}^{ij}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_n^{ij}\exp[-is\theta]d\theta$ ,  $E_{is}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_i\exp[-is\theta]d\theta$

方程(4.7)即为决定未知系数  $A_n, B_n, C_n$  的无穷代数方程组.

### 4.3 动应力集中系数

研究有衬砌的非圆结构与SH波的相互作用时, 要分别给出介质与衬砌的结合面和衬砌内界面上的动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*$ . 按文献[4, 5, 7], 动应力集中系数可定义为:

$$\tau_{\theta z}^*=\tau_{\theta z}^{(i)}/\tau_0 \quad (4.8)$$

其中  $\tau_0=C_{55}K_{\sigma}W_0$  为入射波的最大应力幅值;  $\tau_{\theta z}^{(i)}=\tau_{\theta z}^{(i)}+\tau_{\theta z}^{(s)}$  为在介质或衬砌中产生的总应力.

利用式[2.9], 则沿衬砌与介质的结合面, 在介质中任意一点的动应力集中系数  $\tau_{\theta z, 1}^*$  可以写成:

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z, 1}^* = & \frac{1}{4} \left\{ \left[ i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \right. \\
& - i(1-\eta-2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \left. \right] \frac{\lambda_1}{R_1} \frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|} \left. \right\} \\
& - \frac{1}{4} \left\{ \left[ i(1-\eta+2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha |\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \exp[-ina] \right. \right. \\
& + i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha |\Omega(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_1)}{|\Omega(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \exp[-ina] \left. \right] \frac{\bar{\lambda}_1}{R_1} \frac{\overline{\Omega'(\lambda_1)}}{|\Omega'(\lambda_1)|} \left. \right\} \\
& + \frac{\eta^{\frac{1}{2}} (\cos^2 \alpha + 2\xi \sin \alpha \cos \alpha + \eta^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}{4(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\
& \left\{ \left[ (ia-c) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\
& - (ib+c) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \left. \right] \frac{\lambda_1}{R_1} \frac{\Omega'(\lambda_1)}{|\Omega'(\lambda_1)|} \\
& + \left[ (ib+c) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_I |\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\
& \left. \left. + (ia+c) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_I |\xi(\lambda_1)|) \left\{ \frac{\xi(\lambda_1)}{|\xi(\lambda_1)|} \right\}^{n+1} \right] \frac{\bar{\lambda}_1}{R_1} \frac{\overline{\Omega'(\lambda_1)}}{|\Omega'(\lambda_1)|} \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

而衬砌的内外边界上的动应力集中系数  $\tau_{\theta z, 1}^{*j}$  为:

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z, 1}^{*j} = & \frac{i}{2} \frac{K_I}{K_\alpha} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_{n-1}^{(1)}(K_I |\Omega(\lambda_j)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_j)}{|\Omega(\lambda_j)|} \right\}^{n-1} \right. \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_{n-1}^{(2)}(K_I |\Omega(\lambda_j)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_j)}{|\Omega(\lambda_j)|} \right\}^{n-1} \left. \right\} \frac{\lambda_j}{R_j} \frac{\Omega'(\lambda_j)}{|\Omega'(\lambda_j)|} \\
& + \frac{i}{2} \frac{K_I}{K_\alpha} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_{n+1}^{(1)}(K_I |\Omega(\lambda_j)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_j)}{|\Omega(\lambda_j)|} \right\}^{n+1} \right. \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_{n+1}^{(2)}(K_I |\Omega(\lambda_j)|) \left\{ \frac{\Omega(\lambda_j)}{|\Omega(\lambda_j)|} \right\}^{n+1} \left. \right\} \frac{\bar{\lambda}_j}{R_j} \frac{\overline{\Omega'(\lambda_j)}}{|\Omega'(\lambda_j)|} \quad (j=1, 2) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

其中  $\lambda_j = R_j \exp[i\theta]$ ,  $j=1$ ,  $R=R_1$ , 表示衬砌与介质的结合面上衬砌中的动应力集中系数;  $j=2$ ,  $R=R_2$ , 表示衬砌内边界面上的动应力集中系数。

## 五、算 例

动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*$  是一个关于幅角  $\theta$  的复数, 实部和虚部分别表示其随时间变化的过



程中出现在 $t=T/4$ 和 $t=T/2$ 时动应力集中系数的大小, 而峰值为其绝对值 $|\tau_{\theta z}^*|$ 。通常也称这一绝对值 $|\tau_{\theta z}^*|$ 为动应力集中系数<sup>[4,6,7]</sup>。在以下的算例中, 将计算 $|\tau_{\theta z}^*|$ , 并给出其随 $\theta$ 沿周边的变化; 另还给出在水平入射的SH波作用之下,  $\theta=90^\circ$ 处, 衬砌和介质中动应力集中系数随无量纲波数 $K_0 a$ 的变化规律。

在算例中, 介质是各向异性的, 并取 $\zeta=0.2$ ,  $\eta=0.8$ , 衬砌是各向同性的, 并考虑两种不同的情况: (1)衬砌是混凝土的, (2)衬砌是钢的。若取各向异性介质中的弹性常数 $C_{55}$ 与普通花岗岩相一致, 则在上述考虑之下, 介质与衬砌的无量纲弹性常数为:

$$\text{情况 (1)} \quad \bar{\mu} = 1/3 \quad \bar{\nu} = 1.5 \quad \text{情况 (2)} \quad \bar{\mu} = 2.90 \quad \bar{\nu} = 0.79$$

其中  $\bar{\mu} = \mu_2/C_{55}$ ,  $\bar{\nu} = K_{II}/K_I$

代有关参数至方程(4.7), 并利用截断 $n$ 和 $s$ 的方法求解方程(4.7), 得到未知系数 $A_n$ ,  $B_n$ 和 $C_n$ 。

### 5.1 有衬砌的正方形结构的动应力集中

将正方形结构映射为单位圆, 且保证内边界精确的保角映射函数是:

$$Z = \Omega(\lambda) = AR \left( \lambda - \frac{1}{6\lambda^3} + \frac{1}{56\lambda^7} - \frac{1}{176\lambda^{11}} \right), \quad \lambda = R \exp[i\theta] \quad (5.1)$$

其中,  $AR = 1.2987a$ , 若取 $R_1 = 1.2a$ ,  $R_2 = 1.0a$ , 计算中是用图2中的(c)来代替(a)而进行计算的。

计算结果由图3~8给出。图3~6给出了在给定入射角和无量纲波数的情况下, 动应力集中系数 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 和 $|\tau_{\theta z, II}^*|$ 沿界面随幅角 $\theta$ 的变化关系, 图7~8给出SH波水平入射时, 在 $\theta=90^\circ$

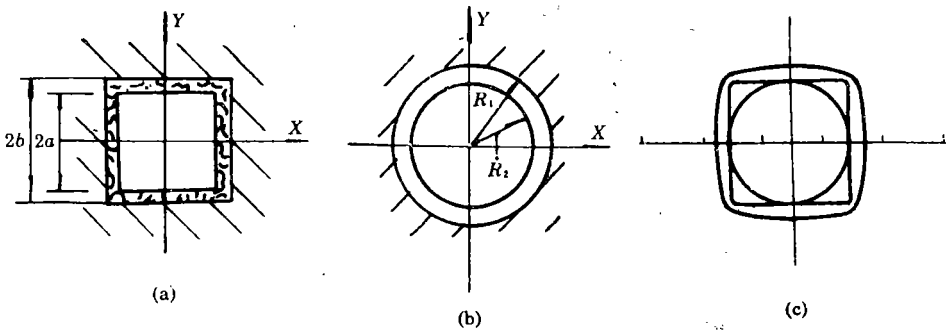


图2 有衬砌和入射SH波的方形结构图形

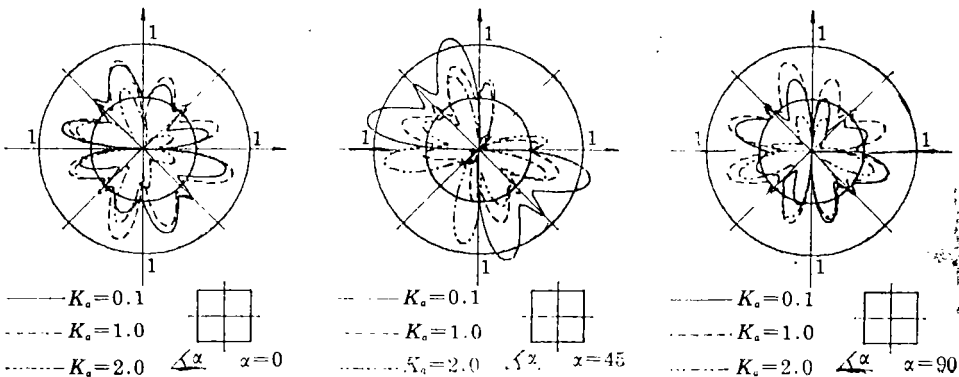


图3 有衬砌的非圆结构内表面边界上的应力 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 分布

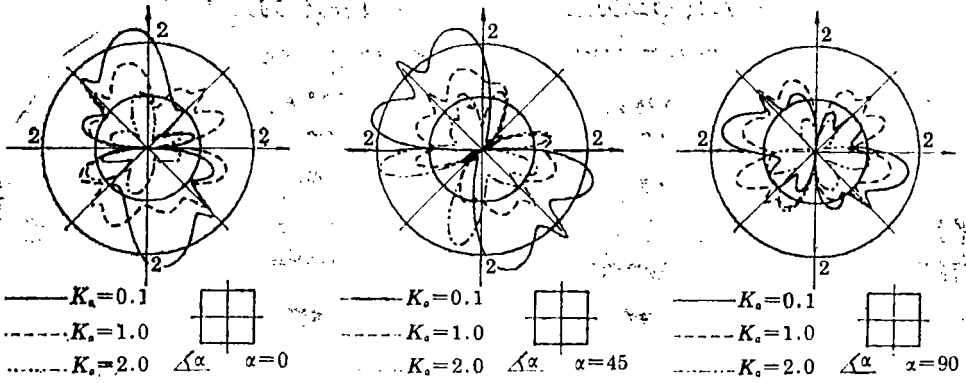


图4 第一种带有各向异性介质( $\xi=0.2$   $\eta=0.8$ )衬砌的方形结构外表面的应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 分布处, 动应力集中系数 $|\tau_{\theta z,1}^{*2}|$ 和 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 随无量纲波数 $K_0 a$ 的变化。

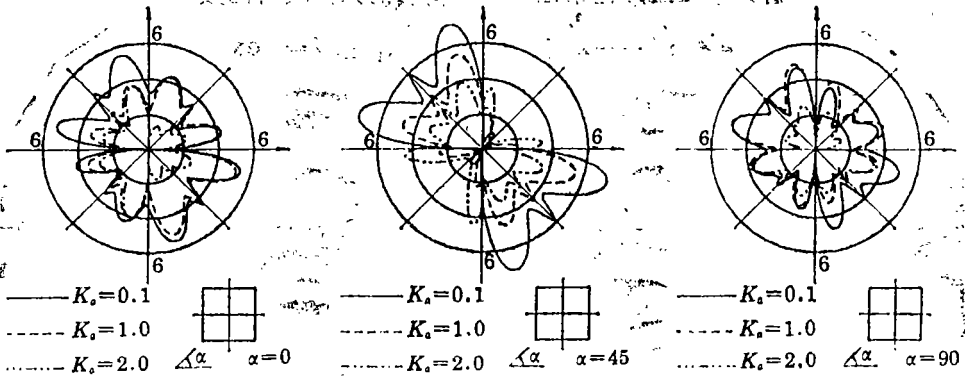


图5 第二种带有衬砌的方形结构内表面边界中的应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 分布

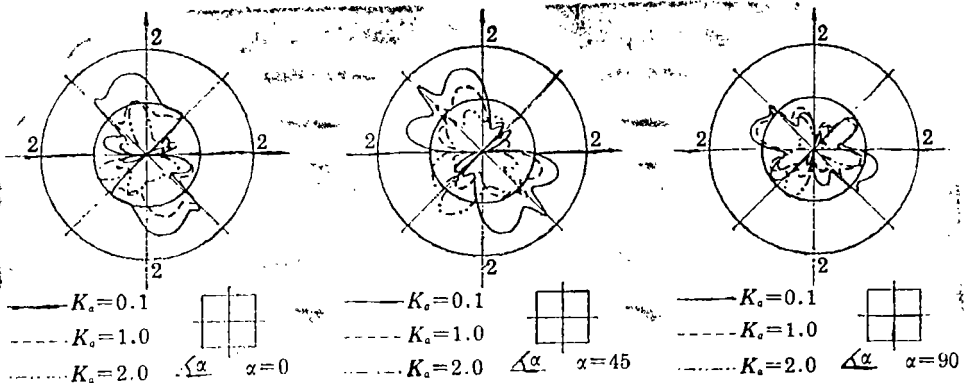


图6 带有方形结构衬砌有各向异性介质的外表面上的应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 分布

## 六、讨 论

本文是将上述方法作为结构分析的一种新方法提出并加以研究的。要深入讨论各向异性介质中SH波与有衬砌的非圆形结构的相互作用的一般特性, 计算资料还不够, 很难深入,

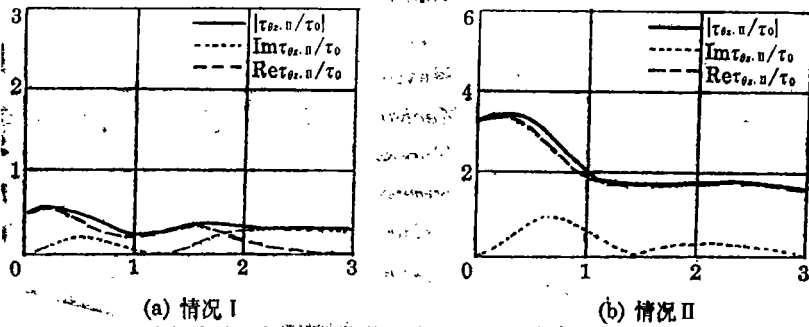


图7 在入射角为 $0^\circ$ 时, 带有衬砌的方形结构内表面在 $\theta=90^\circ$ 处的 $\tau_{\theta_z, I}^*$ 变化

但从分析现有的计算结果出发, 可得如下看法:

(1) 在分析的两种情况中, 第一种情况的衬砌与介质相比, 相对较软, 所以衬砌中的动应力 $\tau_{\theta_z, I}^*$ 较小, 而介质中的动应力较大。而在第二种情况中, 由于衬砌相对较硬, 则情况正好相反。

(2) 由 $|\tau_{\theta_z, I}^*|$ 和 $|\tau_{\theta_z, II}^*|$ 随波数 $K_0 a$ 的变化曲线看出, 其变化规律与无衬砌的情况相类似。其最大动应力出现在 $K_0 a \approx 0.3$ 附近, 其幅值大约高出静力10%~15%左右。

(3) 动应力集中系数除与波数 $K_0 a$ 有关之外, 还与 $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\nu}$ , 衬砌厚度、介质参数等有关。衬砌越硬, 应力就越高; 降低介质中应力的有效办法是加强结构, 即减小 $\bar{\rho}$ 。

(4) 介质的各向异性特征改变了动应力的分布。特别是在低频入射时, 这种变化尤为明显。所以, 考虑各向异性的影响, 在工程中是必要的。

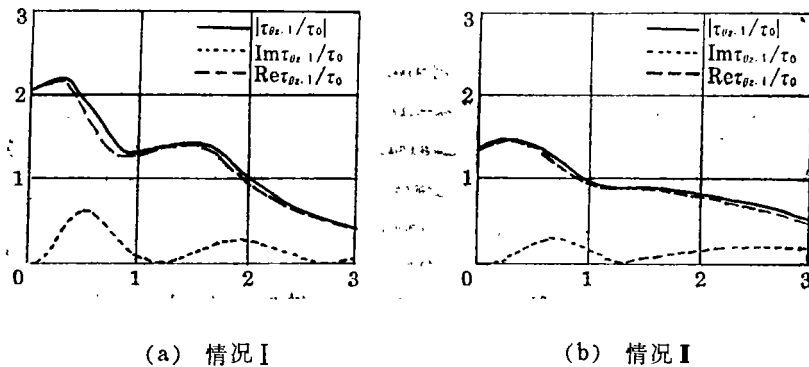


图8 在入射角为 $\alpha=0^\circ$ 时, 衬砌有各向异性( $\xi=0.2, \eta=0.8$ )介质外表面 $\theta=90^\circ$ 处的 $\tau_{\theta_z, I}^*$ 的变化

### 参 考 文 献

- [1] Y.H.Pao, Elastic waves in solids, *ASMEJ. Appl. Mech.*, 50(4) (1983), 1152-1764.
- [2] Liu Diankui and Han Feng, The scattering of plane SH-waves by non-circular cavity in anisotropic media, *ASMEJ. Appl. Mech.* (in press)
- [3] G.N. Savin, *Stress Concentration around Holes*, 1st Ed. 1951, 2nd Enlarged Ed. Moscow, (1966), (in Russian)

- [ 4 ] Y. H. Pao and C. C. Mow, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York(1973).
- [ 5 ] Liu Diankui, Dynamic stress concentration around a circular hole due to SH-wave in anisotropic media, *Acta Mechanica Sinica*, 4(2) (1988), 147—155.
- [ 6 ] Liu Diankui, Gai Bingzheng and Tao Guiyuan, Application of method of complex function to dynamic stress concentration, *Wave Motion*, 4 (1982), 293—304.
- [ 7 ] Liu Diankui and Han Feng, Scattering of plane SH-waves on cylindrical canyon of arbitrary shape in anisotropic media, *Acta Mechanica Sinica*, 8(3) (1990), 256—266.
- [ 8 ] Liu Diankui and Han Feng, Scattering of plane SH-wave by cylindrical canyon of arbitrary shape, *Soil Dyn. and Ear. Eng.*, 10(5) (1991), 241—255.
- [ 9 ] Nasser Moeen-Vaziri and M. D. Trifunac, Scattering of plane SH-waves by cylindrical canals of arbitrary shape, *Soil Dyn. and Ear. Eng.*, 4(1) (1985), 18—23.

## The Interaction of Plane SH-Waves and Non-Circular Cavity Surfaced with Lining in Anisotropic Media

Shi Shouxia Han Feng Wang Zhenqing Liu Diankui

(Dept. of Aerospace Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P.R. China)

### Abstract

This is an expansion of the complex function method in solving the problem of interaction of plane SH-waves and non-circular cavity surfaced with lining in anisotropic media. We use the method similar to that incorporated in Ref. [ 2 ] added with Savin's method for solving stress concentration of non-circular cavity surfaced with lining in elasticity. Anisotropic media can be used to simulate the conditions of the geology. The solving proceeding for this problem can be processed conveniently in the manner similar to that introduced in Ref.[2].

In this paper, as illustrated in the example, numerical studies have been done for a square cavity surfaced with lining in anisotropic media.

**Key words** SH-waves, anisotropic media, non-circular cavity surfaced with lining