

准各向同性复合材料弹性和强度的各向异性效应(I)——模型*

郑泉水¹ 方辉宇¹

(1996年3月20日收到)

摘 要

实验观测表明, 准各向同性材料, 如 N 轴纤维增强复合材料层合板和编织材料, 其面内刚度和强度具有不同方向性, 且强度的各向异性程度往往明显高于弹性性质的各向异性程度。本文根据张量函数表示理论所提出的本构方程和强度准则的一般模型, 结合有关实验数据, 分析了材料弹性性能和强度的非各向同性效应, 具体给出了几类本构模型和强度准则的特殊形式并讨论了本文所得到结果的若干力学性质。本文第 II 部分具体讨论了含单个椭圆孔或裂纹的无限大板的有关强度的各向异性效应, 并用细观力学方法检验了本文的模型。

关键词 准各向同性 复合材料 各向异性效应 本构方程 强度准则

一、引 言

复合材料在现代工业, 尤其是航空、航天等高科技领域中起着重要的作用, 并得到了日益广泛的应用^[1~4]。由于大量新型复合材料的力学行为表现得越来越复杂, 从而要求对复合材料结构的性能, 特别是力学性能进行更为精确有效的分析。

复合材料在一些实际工程中处于复杂的受力状态, 如飞机在飞行时其侧翼承受着方向和大小都变化的交变载荷, 准各向同性复合材料就是在这种背景下出现的。众所周知, 一般长纤维单向层合板具有较高的体积分数(50%~60%), 其总体力学性能具有很强的方向性, 而随机分布的短纤维增强复合材料板多呈现近似的面内各向同性, 但其体积分数较低, 纤维作为增强相, 其高强度和高弹性优势并没有得到充分的体现。准各向同性复合材料则有效地综合了上述两类材料体积分数高、各向同性明显等优点。

准各向同性(也称拉伸各向同性)的概念首先由 Weiren 和 Norris^[5]在研究纤维增强层合板(见图1)的力学性能时提出的。当准各向同性复合材料承受面内拉伸或剪切载荷作用, 其弹性刚度(或柔度)为各向同性的。例如, 大多数高级复合材料一般是由 $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, 90^\circ$ 单向板铺成或由纤维编织而成。这些铺层结构的宏观材料对称性一般来说有 5 种^[6,7], 即横观同性、正交异性、四方同性、八方同性和六方同性, 常见的 $[0^\circ/\pm 60^\circ]$,

* 国家自然科学基金和国家教委基金资助项目

¹ 清华大学工程力学系, 北京 100084

和 $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$ 。层合板在结构上分别为六方同性和八方同性，具有相同结构的纤维编织复合材料也可按此方法分类。这些都属于准各同性材料。而 $[0^\circ/90^\circ]$ 和 $[0^\circ/\pm 30^\circ]$ ，则分别属于四方同性和正交异性，不具有准各向同性性质。

由于准各向同性复合材料的弹性性质与强度性质比较而言具有相对较弱的各向异性，在分析中大多可以作各向同性化处理。自70年代起，已得到了大量的、具有实用价值的研究成果^[8~10]。而准各向同性复合材料的强度屈服与失效通常呈现明显的各向异性。文[1, 7, 6, 11, 12]从材料的宏观对称性出发，给出了一些反映结构内在物理特性的刚度与强度模型，本文将进一步发展这些工作。

一般来讲，当复合材料的增强纤维在面内 $N(N \geq 3)$ 个等分方向（即 $0, \pi/N, 2\pi/N, \dots, (N-1)\pi/N$ 方向）上具有等价的力学性质，则称之为具有 $2N$ 方对称性。所有这些 $2N$ 方对称性材料的线弹性都是各向同性的。鉴于以下分析均针对材料的结构特性，故不再对纤维的铺层方式进行区分，仅统一称为 N 轴材料。

Fujita等人^[11]对由聚酯基EPIKOTE 828和增强纤维SK-802经压模制成的三轴（即六方同性）编织复合材料进行了多角度拉伸实验，给出了模量和强度随角度变化的关系图（参见文[11]的图3和图4），从这些实验结果可整理出有关的数据如本文表1所示，其中括号中的百分比为实测值 S 与平均值 S_m 的相对偏差 $(S - S_m)/S_m$ 。可见，强度比刚度偏离各向同性的程度要高很多。同时也表明有必要研究准各向同性材料的各向异性效应。

表1 三轴编织复合材料的刚度和强度（引自文献[11]）

		弹性模量(GPa)	强度(MPa)
组 份	基体相	3.3	80
	增强相	230	3530
实 测 量 角 度	0°	30(2.4%)	500(23.8%)
	15°	31.6(7.8%)	336(-16.8%)
	90°	26.3(-10.2%)	376(-6.9%)

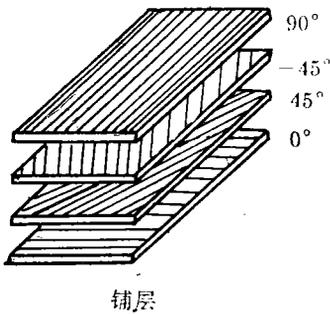


图1 层合板 $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]$

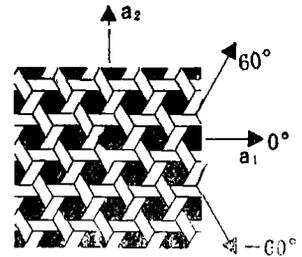
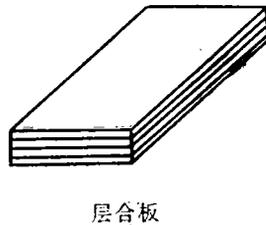


图2 三轴编织材料

由于准各向同性复合材料（包括上述三轴编织复合材料）的线性弹性必然是各向同性的，而实验结果说明上述三轴复合材料的弹性和强度并非各向同性。因此欲研究材料的各向异性效应，就必须考虑其非线性项。

张量函数的完备和不可约表示理论（以下简称张量表示理论），给出了非线性本构方程

一般且协调一致的不变量形式^[13]。材料的对称性(下面只考虑 $2N$ 方对称性)限制了本构方程中张量函数的形式,正是张量表示理论精确的体现了这种限制,规定了本构方程中所引入的、可由实验确定的标量变量的数目和类型。而在不变性条件起支配作用时,其他形式的简单分析是无法完全确定材料复杂的本构关系的。文[6, 7]在张量表示理论上提出了反映一类具有六方(三轴)和八方(四轴)对称性复合材料弹性、屈服与失效各向异性效应的理论模型。文[12]在此基础上推广至一般准各向同性,即 $2N$ 方(或 N 轴)复合材料。本文将据此着重研究三轴和四轴纤维编织或叠层复合材料的一类拟线性的弹性本构方程和强度准则,并且利用文献[11]的有关实验数据,确定了本文模型中的有关参数,以及给出了简单载荷作用下的特殊形式。第II部分将讨论上面提出的强度准则在含单个椭圆孔或裂纹的无限大板边值问题中的具体应用。

二、准各向同性复合材料的一般性本构方程和强度准则

本文从此以下,只考虑准各向同性材料的面内问题,即只研究平面(应力或应变)问题。首先对文献[12]中得到的结论作一些必要的整理和展开。

记 $\mathcal{E}(\sigma)$ 为余能函数,则弹性应力应变关系满足下面的形式:

$$\epsilon = \partial \mathcal{E} / \partial \sigma \quad \text{或} \quad \epsilon_{ij} = \partial \mathcal{E} / \partial \sigma_{ij} \quad (2.1)$$

式中 σ 和 ϵ 或 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} ($i, j=1, 2$)分别表示平面应力和应变张量。

对于材料的强度准则,假定存在一个应力张量的标量值函数 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma)$ ^[14],在强度许可范围内, $\mathcal{F}(\sigma) < 1$,而当

$$\mathcal{F}(\sigma) = 1 \quad (2.2)$$

时,材料达到其失效强度。记 \mathbf{a}_1 为在一族纤维方向上的单位矢量, \mathbf{a}_2 为纤维平面内与 \mathbf{a}_1 方向垂直的单位矢量(见图2)。引入结构张量^[13]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{N} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_N = \underbrace{\text{Re}[(\mathbf{M} + i\mathbf{N}) \otimes (\mathbf{M} + i\mathbf{N}) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{M} + i\mathbf{N})]}_N \quad (2.4)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 为单位虚数,Re代表实部。张量 \mathbf{P}_N 是一个完全对称和无迹的 $2N$ 阶张量,它表征了 $2N$ 方准各向同性复合材料的材料对称性。

由于描述本构方程的任意张量函数均受到材料对称性的约束,因而余能函数 \mathcal{E} 以及屈服或失效函数 \mathcal{F} ,在 $2N$ 方复合材料本构方程中,至少要具有这种材料对称性。张量表示理论证明了 $\mathcal{E}(\sigma)$ 的最一般形式可以表示成如下三个不变量的单值函数^[6, 12, 13]:

$$I_1 = \text{tr} \sigma, \quad I_2 = \text{tr}(\sigma^2)/2, \quad I_N = \text{tr}(\sigma \mathbf{P}_N^2)/N \quad (2.5)$$

即

$$\mathcal{E}(\sigma) = \mathcal{E}(I_1, I_2, I_N) \quad (2.6)$$

其中 \mathbf{P}_N^2 为 \mathbf{P}_N 与 σ 的 $N-1$ 次张量积缩并后形成的一个二阶对称无迹张量。

记 $\mathbf{1}$ 为二阶单位张量,则可将 σ 分解成下面的形式:

$$2\sigma = I_1 \mathbf{1} + J(\cos\psi \mathbf{M} + \sin\psi \mathbf{N}) \quad (2.7)$$

其中

$$J \cos\psi = \text{tr} \mathbf{M} \sigma, \quad J \sin\psi = \text{tr} \mathbf{N} \sigma, \quad J = \sqrt{4I_2 - I_1^2} \quad (2.8)$$

按 \mathbf{P}_N^σ 和 I_N 的定义以及 (2.7) 和 (2.8), 易知

$$\mathbf{P}_N' = J^{N-1} \{ \cos[(N-1)\psi] \mathbf{M} - \sin[(N-1)\psi] \mathbf{N} \} \quad (2.9)$$

$$I_N = (J^N/N) \cos(N\psi) \quad (2.10)$$

因为 I_1 和 I_2 都是各向同性不变量, 本文所关心的各向异性的影响便由 I_N 加以表述. 注意到 I_N 是关于应力 σ 的 N 齐次式, 假定余能函数 \mathcal{E} 关于 σ 的幂级数展开收敛, 则可将 $\mathcal{E}(I_1, I_2, I_N)$ 对 I_N 做幂级数展开如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(I_1, I_2, I_N) &= \tilde{\mathcal{E}}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_n(I_1, I_2) I_N^n \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (J^N/N)^n \tilde{\mathcal{E}}_n(I_1, I_2) \cos^n(N\psi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

式 (2.11) 中的后一关系利用了 (2.10). 再注意到

$$I_{nN} = (J^{nN}/nN) \cos(nN\psi), \quad I_N = (J^N/N) \cos(N\psi) \quad (2.12)$$

和

$$\begin{aligned} \cos(nN\psi) &= \cos^n(N\psi) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(N\psi) \sin^2(N\psi) \\ &\quad + \binom{n}{4} \cos^{n-4}(N\psi) \sin^4(N\psi) \mp \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

可以看出

$$I_{nN} = c_0 I_N^n + c_1 I_N^{n-2} J^2 + c_2 I_N^{n-4} J^4 + \dots \quad (2.14)$$

其中 c_i 是与 n 相关的常数. 再考虑到 $J^2 = 4I_2 - I_1^2$, 进而对于 (2.11), 可以采用更为方便的 Fourier 级数:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(I_1, I_2, I_N) &= \mathcal{E}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(I_1, I_2) I_{nN} \\ &= \mathcal{E}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^{nN}}{nN} \mathcal{E}_n(I_1, I_2) \cos(nN\psi) \end{aligned} \quad (2.15)$$

从而根据 (2.1), 得到准各向同性复合材料的本构方程:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial I_2} \boldsymbol{\sigma} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(I_{nN} \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial I_1} \mathbf{1} + I_{nN} \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial I_2} \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{E}_n \mathbf{P}_{nN}^\sigma \right) \quad (2.16)$$

式 (2.15) 和 (2.16) 等号右侧第一部分和第二部分分别表征材料的各向同性和各向异性.

同样, 对于屈服或失效函数 \mathcal{F} , 可以得出

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I_1, I_2, I_N) &= \mathcal{F}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(I_1, I_2) I_{nN} \\ &= \mathcal{F}_0(I_1, I_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^{nN}}{nN} \mathcal{F}_n(I_1, I_2) \cos(nN\psi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

下面我们将分别具体讨论三轴和四轴准各向同性复合材料的本构方程和强度准则.

三、三轴(N=3)准各向同性复合材料的本构方程和强度准则

我们知道,如果准各向同性复合材料的力学响应是线弹性的,则其面内弹性刚度(柔度)必然是各向同性的,而实验结果(表1)说明材料响应具有明显的方向性,因而必须引入非线性项。下面根据材料的对称性约束条件,具体给出了材料的非线性弹性模型和强度准则。

由于余能函数 \mathcal{E} 和判定强度的标量值函数 \mathcal{F} 可表示成应力张量或应力张量不变量的标量值函数,我们可以通过(2.15)和(2.17)式的形式引入表征材料旋转对称性的非线性项,非线性项的个数由实验可确定参数的多少来给定。参考表1中给出的 0° 、 15° 、 90° 三个方向的有关结果,此处只取展开式中的前两项。

余能函数 \mathcal{E} 选择如下的模型:

$$E\mathcal{E} = (1+\nu)I_2 - \nu I_1^2/2 + 3\alpha I_1 I_3 / (4I_2) + 3\beta I_6 / (4I_2^2) \quad (3.1)$$

其中包含了 E , ν , α 和 β 共四个独立待定的材料参数。这对应着选择了

$$E\mathcal{E}_0 = (1+\nu)I_2 - \nu I_1^2/2, \quad E\mathcal{E}_1 = 3\alpha I_1 / (4I_2), \quad E\mathcal{E}_2 = 3\beta / (4I_2^2) \quad (3.2)$$

这里需要对上述选择作出解释。首先模型(3.1)关于 σ 是二次齐次的,这将导致应变 ϵ 为 σ 的一次齐次(但不是线性)依赖性。这样做的一个主要原因,是我们仅仅找到的文[11](见表1)提供的实验观察只提供了单拉时的 ϵ 和 σ 的一次关系数据。顺带提出一下,文[7]中关于准各向同性材料的弹性模型是非齐次的。式(3.2)中的 \mathcal{E}_0 对应的是最一般的线性各向同性应力应变关系;由于 I_3 和 I_6 分别关于 σ 齐三次和齐六次,选择了 $E\mathcal{E}_1 = 3\alpha I_1 / (4I_2)$ 和 $E\mathcal{E}_2 = 3\beta / (4I_2^2)$ 分别为负的齐一次和齐四次。当然,使得 \mathcal{E}_1 和 \mathcal{E}_2 分别为负的齐一次和齐四次还有多种其它选择,比如 $1/I_1$ 便为负的齐一次,但是即使 $\sigma \neq 0$, $I_1 = \text{tr}\sigma$ 也可能是零(如剪应力情况),因此选择 $1/I_1$ 即选 $E\mathcal{E}_1 = 3\alpha / (4I_1)$ 必然是病态的。 I_2 代表了 σ 的一种模的平方,故 $I_2 = 0$ 等价于 $\sigma = 0$ 。上述讨论表明对于 $\mathcal{E}_n(I_1, I_2)$ 产生非奇异负齐次的,只能由 I_2 来实现。不难看出, $3\alpha I_1 / (4I_2)$ 和 $3\beta / (4I_2^2)$ 分别是产生负一和负齐次的最简单形式。

把(3.2)代入(2.16)式,并将 $E\mathcal{E}_0$, $E\mathcal{E}_1$, $E\mathcal{E}_2$ 分别对 I_1 , I_2 求偏导数,则得

$$E\epsilon = \left(-\nu I_1 + \frac{3\alpha I_1}{4I_2} \right) \mathbf{1} + \left(1 + \nu - \frac{3\alpha I_1 I_3}{4I_2^2} - \frac{3\beta I_6}{2I_2^3} \right) \sigma + \frac{3\alpha I_1}{4I_2} \mathbf{P}_3^\sigma + \frac{3\beta}{4I_2^2} \mathbf{P}_6^\sigma \quad (3.3)$$

式中 \mathbf{P}_3^σ , \mathbf{P}_6^σ 的定义见(2.9)。

类似地,我们对三轴准各向同性复合材料强度准则 \mathcal{F} 的展开形式,建议如下最简单形式的齐二次模型。

$$Y^2 \mathcal{F} / 2 = (1 + \eta) I_2 - \eta I_1^2 / 2 + 3\xi I_1 I_3 / (4I_2) + 3\zeta I_6 / (4I_2^2) \quad (3.4)$$

共含四个独立的材料常数 Y , η , ξ 和 ζ 。

考虑材料在相对 \mathbf{a}_1 逆时针偏角为 θ 的方向 \mathbf{n} 承受简单拉应力 t_θ , 即

$$\sigma = t_\theta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = t_\theta [1 + \cos(2\theta) \mathbf{M} + \sin(2\theta) \mathbf{N}] / 2 \quad (3.5)$$

其中 $\mathbf{n} = \cos\theta \mathbf{a}_1 + \sin\theta \mathbf{a}_2$, 则有

$$I_1 = t_\theta, \quad I_2 = t_\theta^2 / 2, \quad I_N = (t_\theta^N / N) \cos(2N\theta) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}_N^\sigma = t_\theta^{N-1} \{ \cos[2(N-1)\theta] \mathbf{M} - \sin[2(N-1)\theta] \mathbf{N} \} \quad (3.7)$$

代入(2.16), 则可求得应变 ϵ 在 θ 方向的法向应变 ϵ_θ , 在 $\theta + \pi/2$ 方向上的法向应变 $\epsilon_{\theta \perp}$, 和该两

个方向的剪切应变 γ_θ 分别为

$$\varepsilon_\theta = \frac{dC_0}{dt_\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nN} \frac{d(C_n t_\theta^{nN})}{dt_\theta} \cos(2nN\theta) \quad (3.8)$$

$$\gamma_\theta = -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_\theta^{nN-1} \sin(2nN\theta) \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{\theta \perp} = \frac{d\mathcal{E}_0}{dI_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t_\theta^{nN}}{nN} \frac{d\mathcal{E}_n}{dI_1} - \mathcal{E}_n t_\theta^{nN-1} \right) \cos(2nN\theta) \quad (3.10)$$

将(3.2)代入(3.8)~(3.9), 有

$$E \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{\theta \perp} \\ \gamma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \alpha \cos(6\theta) + \beta \cos(12\theta) \\ -\nu - \alpha \cos(6\theta) - \beta \cos(12\theta) \\ -3\alpha \sin(6\theta) - 6\beta \sin(12\theta) \end{Bmatrix} t_\theta \quad (3.11)$$

可见上述简单拉伸时的应力应变关系仍然是线性的.

根据表 1 中的实验数据, 可确定本构方程中的待定参数如下

$$E = 0.99E_0 = 29.7 \text{MPa}, \quad \alpha = -0.0693, \quad \beta = 0.0594 \quad (3.12)$$

从(3.11)和(3.12), 沿 θ 方向拉伸模量 E_θ 与 θ 的变化关系分别为

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} = \frac{E_\theta}{t_\theta} &= 1 + \alpha \cos(6\theta) + \beta \cos(12\theta) \\ &= 1 - 0.0693 \cos(6\theta) + 0.0594 \cos(12\theta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

式中拉伸模量随角度的变化情况由图 3 表示, 模量 E_θ 变化满足 60° 对称性. $0^\circ \sim 60^\circ$ 间最大模

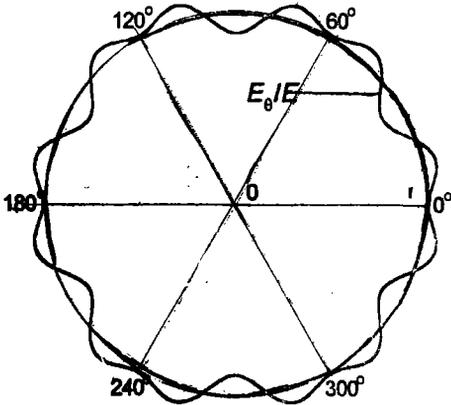


图3 弹性模量 E_θ 的各向异性

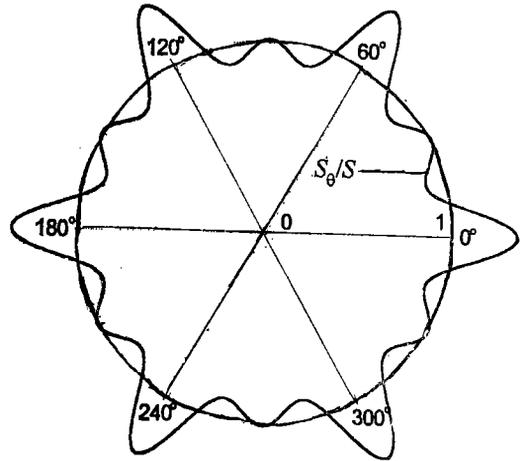


图4 拉伸强度 S_θ 的各向异性

量值出现在 $\theta \approx 12^\circ$ 和 48° 的位置上, 且沿 $\theta = 30^\circ$ 对称, 在 $\theta = 30^\circ$ 模量最小. 最大与最小模量相差19%.

考虑到应力状态, 在面内 θ 和 $(\theta + \pi)$ 方向作用有剪应力 τ_θ , 即

$$\sigma = \tau_\theta (n \otimes m + m \otimes n) = \tau_\theta [\cos(2\theta + \pi/2) \mathbf{M} + \sin(2\theta + \pi/2) \mathbf{N}] \quad (3.14)$$

这里 $m = -\sin\theta a_1 + \cos\theta a_2$ 代表 $\theta + \pi$ 方向, 则有

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \tau_\theta^2, \quad I_N = [(2\tau_\theta)^N / N] \cos(2N\theta + N\pi/2) \quad (3.15)$$

Possion比则由下式确定

$$2(1+\nu) = E/G_0 + 16\beta = 0.99E_0/G_0 - 0.950 \quad (3.16)$$

沿 θ 和 $\theta+\pi/2$ 方向剪切模量 G_θ 与 θ 的变化关系分别为

$$\frac{E}{G_\theta} = \frac{E\gamma_\theta}{\tau_\theta} = 2(1+\nu) - 16\beta\cos(12\theta) = 2(1+\nu) - 0.951\cos(12\theta) \quad (3.17)$$

同样, 我们可以得到强度准则(3.4)式随偏角变化的简化形式. 沿 θ 方向拉伸强度 S_θ 和沿 θ 和 $\theta+\pi/2$ 方向剪切强度 T_θ 随 θ 的变化关系分别为:

$$Y^2/S_\theta^2 = 1 + \xi\cos(6\theta) + \zeta\cos(12\theta) \quad (3.18)$$

$$Y^2/T_\theta^2 = 2(1+\eta) - 16\zeta\cos(12\theta) \quad (3.19)$$

利用表1中的实验数据, 可得

$$Y = 0.745S_0 = 372\text{MPa}, \quad \xi = -0.213, \quad \zeta = -0.232 \quad (3.20)$$

$$2(1+\eta) = (Y/T_0)^2 + 16\zeta = 0.556(S_0/T_0)^2 - 3.71 \quad (3.21)$$

拉伸强度 S_θ 随角度 θ 的变化由图4给出. 与模量变化不同的是, 强度值 S_θ 在 $\theta=0^\circ$ 最大, 在 $\theta \approx 17^\circ$ 和 43° 最小, 且沿 $\theta=30^\circ$ 对称. 最大和最小强度相差45%.

四、四轴(N=4)准各向同性复合材料的本构方程和强度准则

依照3.1节相同的思路, 我们建议四轴准各向同性复合材料考虑了各向异性效应的余能函数 \mathcal{E} 的模型为

$$E\mathcal{E} = (1+\nu)I_2 - \nu I_1^2/2 + \alpha'I_4/I_2 + \beta'I_8/I_3^2 \quad (4.1)$$

其中

$$E\mathcal{E}_0 = (1+\nu)I_2 - \nu I_1^2/2, \quad E\mathcal{E}_1 = \alpha'/I_2, \quad E\mathcal{E}_2 = \beta'/I_3^2 \quad (4.2)$$

亦只包含了四个待定材料常数 E, ν, α', β' .

同样, 包含四个材料常数的强度准则按下式给出:

$$Y^2\mathcal{F}/2 = (1+\eta)I_2 - \eta I_1^2/2 + 3\xi'I_4/(4I_2) + 3\zeta'I_8/(4I_3^2) \quad (4.3)$$

参 考 文 献

- [1] S. W. Tsai and H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Tech. Pub. Co., Inc. (1980).
- [2] 王震鸣, 《复合材料力学和复合材料结构力学》, 机械工业出版社 (1980).
- [3] 周履、范赋群, 《复合材料力学》, 高等教育出版社 (1991).
- [4] 罗祖道、王震鸣主编, 《复合材料力学进展》, 北京大学出版社 (1991).
- [5] F. Weiren and C. B. Norris, Mechanical properties of a laminate designed to be isotropic, Report No.841, Forest Products Laboratory, Forest Service, US Department of Agriculture (1953).
- [6] Q.-S. Zheng, J. Betten and A.J.M. Spencer, The formulation of constitutive equations for fibre-reinforced composites in plane problems: Part I, *Arch. Appl. Mech.*, **62** (1992), 530-543.
- [7] Q.-S. Zheng and J. Betten, The formulation of constitutive equations for fibre-reinforced composites in plane problems: Part II, *Arch. Appl. Mech.*, **65** (1995), 161-177.

- [8] R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*. Scripta Book Company, Washington, DC (1975).
- [9] K.M. Wu, Isotropic composite plates, Research Report EM-429, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan (1979).
- [10] T.W. Chou and F.K. Ko, *Textile Structural Composites*, Elsevier Science Publishing Company, Inc. (1989),357—365.
- [11] A. Fujita, H. Humada and Z. Maekawa, Tensile properties of carbon fibre triaxial woven fabric composites, *Journal of Composite Materials*,27 (1973), 1428—1442.
- [12] Q.-S. Zheng, Yielding and failure of quasi-isotropic composites, in *Advances in Engineering Plasticity and Its Applications*(B.Y.Xu and W. Yang, eds),Int. Academic Pub., Beijing (1994),137—142.
- [13] Q.-S. Zheng, Theory of representations for tensor functions—A unified invariant approach to constitutive equations, *Appl. Mech. Rev.*,47 (1994),544—587. 中译文(方辉宇译), 张量函数表示理论——本构方程不变性研究, 力学进展, 26 (1996), 114—137;237—283.
- [14] S.W. Tsai, A survey of macroscopic failure criteria for composite materials, *J. of Reinforced Plastics and Composites*, 3 (1986),40—62.

Anisotropic Effects of Quasi-Isotropic Composites(I)

——Modelling

Zheng Quanshui Fang Huiyu

(*Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing*
100084, P. R. China)

Abstract

Experimental observations show that quasi-isotropic materials, such as N -axial fibre-reinforced composites and woven materials, exhibit various degree of anisotropy in elasticity and strength, and the anisotropy in strength is normally stronger than that in elasticity. In view of some available experimental data and based on the general formulation of the constitutive equations and failure criteria of quasi-isotropic materials established by using the theory representations for tensor functions, we postulate several applicable models of the constitutive equations and strength for 3- and 4-axial quasi-isotropic materials to reveal the anisotropic effects. In a continued work (Part II), the anisotropic effect in strength of an infinitely large plate with a single elliptical hole or crack is studied, and the proposed stiffness and strength models are verified in terms of micro-mechanical analyses.

Key words quasi-isotropy, composites, anisotropic effects, constitutive equation, strength rules