应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义神经传播型非线性拟双曲方程解的爆破和熄灭

王 凡 彬[1]

（丁协平推荐，1993年6月28日收到，1996年4月18日收到修改稿）

摘　　要

本文考虑广义神经传播型非线性拟双曲方程具三类边界条件的初边值问题，利用特征函数法，得到了其解在有限时间内爆破和熄灭的条件。

关键词　广义神经传播型非线性拟双曲方程　初边值问题　特征函数法　爆破　熄灭

一、引　　言

对广义神经传播型非线性拟双曲方程

$$u_{tt}-\Delta u_t=F(x,\ t,\ u,\ \nabla u,\ u_t,\ \nabla u_t) \tag{1.1}$$

的初边值问题，文[1]在第一，二类边界条件下，讨论了其解的爆破性，文[2]在第一类边界条件下，讨论了其解的熄灭性。由于方法的局限性，文[1]、[2]都没有系统地在三类边界条件下讨论方程(1.1)的初边值问题其解的爆破性和熄灭性。

本文考察另一类广义神经传播型非线性拟双曲方程具三类边界条件的初边值问题：

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}u_{tt}-\sum\limits_{i,j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u_t}{\partial x_j}\right)=f(u,\ u_t) & ((x,\ t)\in\Omega\times(0,\ T))\\ u(x,\ 0)=u_0(x),\ u_t(x,\ 0)=u_1(x) & (x\in\Omega)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega}=0 & (t\in(0,\ T))\end{cases}$$

其中　$\partial\Omega$是R^n中光滑有界区域Ω的边界；$a_{ij}(x)\,(i,\ j=1,2,\cdots,\ n)$适当光滑，矩阵$(a_{ij}(x))$对称、正定；$\partial u/\partial\nu$是$u$在$\partial\Omega$上关于$(a_{ij}(x))$的余法向导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,\ x_i)\qquad(\sigma\geqslant0),$$

即边界条件相应为第一、二、三类边界条件。本文利用特征函数法，系统地在三类边界条件下研究了问题(A)的经典解$u(x,t)$在有限时间内爆破和熄灭的条件，从而克服了文[1]、[2]的弱点，补充和完善了文[1]、[2]的结果。

1 内江师专数学系，四川省内江市　641002.

以下为讨论方便，设 $L=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$；$ds$表示$\partial\Omega$上的面积元素。

下面给出两个引理：

引理1 设λ_1为特征值问题

$$\left.\begin{aligned}&L\varphi+\lambda\varphi=0 \qquad (x\in\Omega)\\&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\sigma\varphi\right)\Big|_{\partial\sigma}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

的第一特征值，则$\lambda_1\geqslant 0$，相应地有特征函数$\varphi_1(x)>0\,(x\in\Omega)$，且$\int_\Omega\varphi_1(x)dx=1$。

引理2 （Jensen不等式） 设$g(u)$：$u\in[\alpha,\ \beta]\mapsto R$为凸函数，$f:t\in[a,b]\mapsto[\alpha,\beta]$，$P(t)$为连续函数，$P(t)\geqslant 0$，$P(t)\not\equiv 0$，则成立以下积分不等式：

$$g\left[\frac{\int_a^b f(t)P(t)dt}{\int_a^b P(t)dt}\right]\leqslant\frac{\int_a^b g(f(t))P(t)dt}{\int_a^b P(t)dt}\tag{1.3}$$

二、解的爆破

如果问题(A)满足下列条件：

(i) $f\geqslant c_1u_t+c_2|u|^p$，其中常数$c_1\geqslant\lambda_1$，$c_2>0$，$p>1$；

(ii) $\int_\Omega\varphi_1(x)u_0(x)dx>0$，$\int_\Omega\varphi_1(x)u_1(x)dx>0$，

则有

定理1 在条件(i)、(ii)之下，问题(A)的经典解必在有限时间内爆破。

证 我们只证明第三类边界条件的情形，在第一、二类边界条件下的证明完全是类似的。

设 $$I(t)=\int_\Omega\varphi_1(x)u(x,\ t)dx\tag{2.1}$$

则 $$I'(t)=\int_\Omega\varphi_1u_tdx\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}I''(t)&=\int_\Omega\varphi_1u_{tt}dx=\int_\Omega\varphi_1(Lu_t+f)dx\\&=\int_\Omega(\varphi_1Lu_t-u_tL\varphi_1)dx+\int_\Omega(u_tL\varphi_1+\varphi_1f)dx\end{aligned}\tag{2.3}$$

利用Green公式及(1.2)，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\varphi_1Lu_t-u_tL\varphi_1)dx&=\int_{\partial\Omega}\left(\varphi_1\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-u_t\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\right)ds\\&=\int_{\partial\Omega}(\varphi_1(-\sigma u_t)-u_t(-\sigma\varphi_1))ds=0\end{aligned}\tag{2.4}$$

由条件(i)，有

$$\int_{\Omega}(u_t L\varphi_1+\varphi_1 f)dx=\int_{\Omega}\varphi_1(f-\lambda_1 u_t)dx$$

$$\geqslant\int_{\Omega}\varphi_1((c_1-\lambda_1)u_t+c_2|u|^p)dx$$

$$=(c_1-\lambda_1)I'(t)+c_2\int_{\Omega}\varphi_1|u|^p dx \tag{2.5}$$

把(2.4)、(2.5)代回(2.3)，得

$$I''(t)\geqslant(c_1-\lambda_1)I'(t)+c_2\int_{\Omega}\varphi_1|u|^p dx \tag{2.6}$$

再由Jensen不等式，知

$$I''(t)\geqslant(c_1-\lambda_1)I'(t)+c_2\left|\int_{\Omega}\varphi_1 u dx\right|^p$$

$$=(c_1-\lambda_1)I'(t)+c_2|I(t)|^p \tag{2.7}$$

由条件(ii)，知

$$I(0)=\int_{\Omega}\varphi_1(x)u_0(x)dx>0 \tag{2.8}$$

$$I'(0)=\int_{\Omega}\varphi_1(x)u_1(x)dx>0 \tag{2.9}$$

注意$c_1\geqslant\lambda_1$，因此

$$I''(0)\geqslant(c_1-\lambda_1)I'(0)+c_2|I(0)|^p>0 \tag{2.10}$$

从而至少在$t=0$的某个右邻域内，有$I''(t)>0$，$I'(t)>0$，$I(t)>0$。假设$t^*(0<t^*<T)$为使$I''(t)=0$的最小值，即在$[0, t^*)$上，$I''(t)>0$，而$I''(t^*)=0$。这样应有$I'(t^*)>I'(0)$，$I(t^*)>I(0)$，从而

$$I''(t^*)\geqslant(c_1-\lambda_1)I'(t^*)+c_2|I(t^*)|^p>0 \tag{2.11}$$

这与$I''(t^*)=0$矛盾，说明这样的t^*不存在。从而在$[0, T)$上总有$I''(t)>0$，由此易知在$[0, T)$上也有$I'(t)>0$，$I(t)>0$。这样由(2.7)得

$$I''(t)\geqslant c_2 I^p(t) \tag{2.12}$$

上式两端同乘以$I'(t)$并在$[0, t]$上积分：

$$\int_0^t I''(t)I'(t)dt\geqslant\int_0^t c_2 I^p(t)I'(t)dt \tag{2.13}$$

$$\frac{I'^2(t)-I'^2(0)}{2}\geqslant\frac{c_2}{p+1}(I^{p+1}(t)-I^{p+1}(0)) \tag{2.14}$$

$$I'(t)\geqslant\sqrt{\frac{2c_2}{p+1}(I^{p+1}(t)-I^{p+1}(0))+I'^2(0)} \tag{2.15}$$

$$\frac{dI(t)}{\sqrt{(2c_2/(p+1))(I^{p+1}(t)-I^{p+1}(0))+I'^2(0)}}\geqslant dt \tag{2.16}$$

(2.16)两端在$[0, t]$上积分，得：

$$t\leqslant\int_0^t\frac{dI(t)}{\sqrt{(2c_2/(p+1))(I^{p+1}(t)-I^{p+1}(0))+I'^2(0)}} \tag{2.17}$$

由于$p>1$，由上式即得：

$$T\leqslant\int_{I(0)}^{+\infty}\frac{dI}{\sqrt{(2c_2/(p+1))(I^{p+1}-I^{p+1}(0)+I'^2(0)}}<+\infty \tag{2.18}$$

即$u(x, t)$必在有限时间内爆破.

三、解的熄灭

如果问题(A)满足条件：

(iii) $f\geqslant c_1u_t+c_2|u_t|^p$，其中常数$c_1\geqslant\lambda_1$，$c_2>0$，$p>1$；

(iv) $\int_\Omega\varphi_1(x)u_1(x)dx>0$

则有

定理2 在条件(iii)、(iv)之下，问题(A)的经典解必在有限时间内熄灭.

证 设 $J(t)=\int_\Omega\varphi_1(x)u_t(x, t)dx$ (3.1)

类似定理 1 可得

$$J'(t)\geqslant(c_1-\lambda_1)J(t)+c_2|J(t)|^p \tag{3.2}$$

由条件(iv)，知

$$J(0)=\int_\Omega\varphi_1(x)u_1(x)dx>0 \tag{3.3}$$

由(3.2)，(3.3)类似定理 1 可证在$[0, T)$上，总有$J'(t)>0$，$J(t)>0$. 因此由(3.2)得

$$J'(t)\geqslant c_2J^p(t) \tag{3.4}$$

或 $$dJ(t)/c_2J^p(t)\geqslant dt \tag{3.5}$$

(3.5)两端在$[0, t]$上积分，得

$$t\leqslant\int_0^t\frac{dJ(t)}{c_2J^p(t)} \tag{3.6}$$

从而可知

$$T\leqslant\int_{J(0)}^{+\infty}\frac{dJ}{c_2J^p}=\frac{1}{c_2(p-1)J^{p-1}(0)}<+\infty \tag{3.7}$$

即$u(x, t)$必在有限时间内熄灭.

再考虑另一种情形. 设问题(A)适合条件：

(v) $f\geqslant c_1u_t+c_2|u_t|^p$，其中常数$c_1\leqslant\lambda_1$，$c_2>0$，$p>1$，

(vi) $\int_\Omega\varphi_1(x)u_1(x)dx>\left(\frac{\lambda_1-c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$，

则有

定理3 在条件(v)、(vi)之下，问题(A)的经典解必在有限时间内熄灭.

证 设 $K(t)=\int_\Omega\varphi_1(x)u_t(x, t)dx$ (3.8)

与定理 1 类似可证

$$K'(t)\geqslant c_2|K(t)|^p+(c_1-\lambda_1)K(t) \tag{3.9}$$

由条件(vi)，知

$$K(0)=\int_{\Omega}\varphi_1(x)u_1(x)dx>\left(\frac{\lambda_1-c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\geqslant 0 \tag{3.10}$$

由(3.9)、(3.10)，与定理1类似可证在$[0, T)$上，恒有$K'(t)>0$，$K(t)>0$。从而(3.9)化为：

$$K'(t)\geqslant c_2K^p(t)+(c_1-\lambda_1)K(t) \tag{3.11}$$

或

$$\frac{dK(t)}{c_2K^p(t)+(c_1-\lambda_1)K(t)}\geqslant dt \tag{3.12}$$

(3.12)两端在$[0, t]$上积分，得

$$t\leqslant\int_0^t\frac{dK(t)}{c_2K^p(t)+(c_1-\lambda_1)K(t)} \tag{3.13}$$

由于$p>1$，由(3.13)即得

$$T\leqslant\int_{K(0)}^{+\infty}\frac{dK}{c_2K^p+(c_1-\lambda_1)K}<+\infty \tag{3.14}$$

即$u(x, t)$必在有限时间内熄灭。

参 考 文 献

[1] 张健，广义神经传播型非线性拟双曲方程解的爆破，应用数学和力学，10(8)(1989)，679—687.

[2] 张健，广义神经传播型非线性拟双曲方程解的熄灭性，四川师范大学学报（自然科学版），11(4)(1988)，6—10.

Blow-Up and Die-Out of Solutions of Nonlinear Pseudo-Hyperbolic Equations of Generalized Nerve Conduction Type

Wang Fanbin

(Neijiang Teacher's College, Neijiang, Sichuan 641002, P. R. China)

Abstract

This paper considers the boundary value problems with three types of the boundary conditions for nonlinear pseudo-hyperbolic equations of generalized nerve conduction type, using the eigenfunction method, the conditions for which the solutions blow up and die out in the finite time are got.

Key words nonlinear pseduo-hyperbolic equation of generalized nerve conduction type, initial boundary value problem, eigenfunction method, blow up, die out