应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

夹层圆板大幅度振动的进一步研究

杜国君[1]　陈英杰[1]

（钱伟长推荐，1994年7月29日收到）

摘　　要

本文给出了具有滑动固定边界条件、并计及表板抗弯刚度的夹层圆板轴对称大幅度自由振动问题的解. 在求解此问题时，使用了修正迭代法，并把本文结果与文[1]结果作了比较.

关键词　夹层圆板　大幅度　振动

一、前　　言

夹层板问题已引起许多人的兴趣，但大多数限于线性分析. 对于非线性问题，由于求解困难，因此只有少数人作过一些工作. 刘人怀[2,3]对夹层板的大挠度问题作了许多有益的工作，但对于夹层板的大幅度振动问题的文献却很少见到. 作者[1]曾对忽略表板抗弯刚度情况下夹层圆板的轴对称大幅度振动问题作了初步探讨，本文将进一步研究计及表板抗弯刚度的一般情况，由于此问题为边界层型，故求解相当困难. 我们采用修正迭代法求解此问题，在求解过程中对最高阶导数项作了特殊处理，从而使问题的求解大大简化，得到了较为精确的结果，并与文[1]的结果进行了比较.

二、基本方程和边界条件的无量纲化

在文[1]中已给出了夹层圆板轴对称大幅度自由振动的基本方程

$$\left.\begin{aligned}&mrw_{,tt}+2D_f(r((rw_{,r})_{,r}/r)_{,r})_{,r}-2h_1(r\sigma_{r0}w_{,r})_{,r}-C(r(\psi+w_{,r}))_{,r}=0\\&\sigma_{\theta0}-(r\sigma_{r0})_{,r}=0\\&D((r\psi)_{,r}/r)_{,r}-C(\psi+w_{,r})=0\end{aligned}\right\} \tag{2.1a,b,c}$$

应变协调方程为

$$\sigma_{r0}-(r\sigma_{\theta0})_{,r}-Ew_{,r}^2/2=0 \tag{2.2}$$

而滑动固定边界条件成为

在$r=a$时

$$w=0,\ \psi=0,\ w_{,r}=0,\ \sigma_{r0}=0 \tag{2.3}$$

1 东北重型机械学院，齐齐哈尔 161042.

在$r=0$时

$$w=w_m,\ \psi=0,\ \sigma_{r0}<\infty \tag{2.4}$$

仿照文[1]的推导，并引入如下无量纲量

$$\left.\begin{array}{l}\rho=r/a,\ w=\bar{w}/h_0,\quad S=\dfrac{3h_1a^2}{2D}\bar{S},\ \omega=\bar{\omega}(ma^4/D)^{\frac{1}{2}}\\[2mm] \lambda=\dfrac{D}{Ca^2},\ \varepsilon=\dfrac{2D_f}{Ca^2},\quad \beta=\dfrac{3}{2}(1-\nu^2)\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

可得到

$$\begin{aligned}&(\varepsilon L^3-(1+\varepsilon/\lambda)L^2-\omega^2\lambda L+\omega^2)w\\&\quad-\lambda(\rho((\rho Sw,_\rho),_\rho/\rho),_\rho/\rho+(\rho Sw,_\rho),_\rho/\rho=0\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$((\rho^2S),_\rho/\rho),_\rho+\beta w,_\rho^2/\rho=0 \tag{2.7}$$

边界条件为

在$\rho=1$时

$$\begin{aligned}&w=0,\ \lambda\omega^2\int_0^\rho\rho wd\rho-\varepsilon\rho((\rho w,_\rho),_\rho/\rho),_\rho+\lambda\rho Sw,_\rho+\rho w,_\rho=0\\&w,_\rho=0,\ S=0\end{aligned} \tag{2.8a,b,c,d}$$

在$\rho=0$时

$$\begin{aligned}&w=w_m,\ \lambda\omega^2\int_0^\rho\rho wd\rho-\varepsilon\rho((\rho w,_\rho),_\rho/\rho),_\rho+\lambda\rho Sw,_\rho+\rho w,_\rho=0\\&S<\infty\end{aligned} \tag{2.9a,b,c}$$

式(2.6)～(2.9)就是无量纲化的夹层圆板大幅度振动的基本方程及滑动固支边界条件.

三、修正迭代解

根据(2.5)有

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}=\frac{2D_f}{D}=\frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2$$

对于工程中常用的夹层板，我们知道

$$\lambda<1,\ h_1/h_0\ll 1$$

所以 $\varepsilon\ll 1$

显然，方程(2.6)中最高阶导数前有一个小参数，故这是一个边界层型问题.众所周知，由于方程阶数高且最高导数项系数为一小参数而使问题的求解比较困难。为此，本文利用修正迭代法解此问题. 在一阶近似中略去(2.6)中的最高阶导数项及(2.6)～(2.9)中的非线性项，并忽略边界条件(2.8c)[3]，得如下边值问题

$$((1+\varepsilon/\lambda)L^2+\omega_1^2\lambda L-\omega_1^2)w_1=0 \tag{3.1}$$

$$((\rho^2S_1),_\rho/\rho),_\rho+\beta w_1^2,_\rho/\rho=0 \tag{3.2}$$

在$\rho=1$时

$$w_1=0,\ \lambda\omega_1^2\int_0^\rho\rho w_1d\rho-\varepsilon\rho((\rho w_1,_\rho),_\rho/\rho),_\rho+\rho w_1,_\rho=0,\ S_1=0 \tag{3.3a,b,c}$$

在$\rho=0$时

$$w_1=w_m,\quad \lambda\omega_1^2\int_0^\rho \rho w_1 d\rho-\varepsilon\rho((\rho w_{1,\rho})_{,\rho}/\rho)_{,\rho}+\rho w_{1,\rho}=0,\quad S_1<\infty \tag{3.4a,b,c}$$

方程(3.1)的解可设为如下级数

$$w_1=w_m\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)}\rho^{2j} \tag{3.5}$$

其中 $$A_j^{(1)}=\sum_{i=1}^{2}\mu_i\frac{a_i^j}{2^{2j}(j!)^2}$$

$$a_1=(\sqrt{\omega_1^4\lambda^2+4\omega_1^2(1+\varepsilon/\lambda)}-\omega_1\lambda)/2(1+\varepsilon/\lambda)$$

$$a_2=-(\sqrt{\omega_1^4\lambda^2+4\omega_1^2(1+\varepsilon/\lambda)}+\omega_1\lambda)/2(1+\varepsilon/\lambda)$$

式中 $\mu_i(i=1,2)$应由板的边界条件确定，将(3.5)代入(3.3a,b)，(3.4a)中，可得

$$\boldsymbol{A\mu}=0 \tag{3.6}$$

其中 $$\boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\ \mu_2,\ 1]^T$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$的各元素为

$$a_{01}=a_{02}=-a_{03}=1,\quad a_{13}=a_{23}=0$$

$$a_{1i}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_i^j}{2^{2j}(j!)^2}\qquad (i=1,2)$$

$$a_{2i}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda\omega_1^2-16\varepsilon j^2(j^2-1)+2j(2j+2)}{2(j+1)\cdot 2^{2j}(j!)^2}a_i^j\qquad (i=1,2)$$

由于$\boldsymbol{\mu}$为非零向量，则有

$$\det\ \boldsymbol{A}=0 \tag{3.7}$$

由(3.7)可解出固有频率的一阶近似值ω_1，再由(3.6)求出μ_i，因此w_1也确定了．将(3.5)代入(3.2)直接积分方程，并利用边界条件(3.3c)、(3.4c)可求出

$$S_1=w_m^2\sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(1)}\rho^{2j} \tag{3.8}$$

其中 $$B_j^{(1)}=-\frac{\beta}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j} i(j-i+1)A_i^{(1)}A_{j-i+1}^{(1)}\qquad (j=1,2,\cdots)$$

$$B_0^{(1)}=-\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)}$$

在二阶迭代中，有如下修正特征值方程和相应边界条件

$$((1+\varepsilon/\lambda)L^2+\omega^2\lambda L-\omega^2)w_2-\varepsilon L^3 w_1$$
$$+\lambda(\rho((\rho S_1 w_{1,\rho})_{,\rho}/\rho)_{,\rho})_{,\rho}/\rho-(\rho S_1 w_{1,\rho})_{,\rho}/\rho=0 \tag{3.9}$$

$$((\rho^2 S_2)_{,\rho}/\rho)_{,\rho}+\beta w_{2,\rho}^2/\rho=0 \tag{3.10}$$

在$\rho=1$时

$$w_2=0,\ \ \lambda\omega^2\int_0^\rho \rho w_2 d\rho-\varepsilon\rho((\rho w_{2,\rho})_{,\rho}/\rho)_{,\rho}+\lambda\rho S_1 w_{1,\rho}+\rho w_{2,\rho}=0,\ \ S_2=0 \tag{3.11a,b,c}$$

在$\rho=0$时

$$w_2=w_m,\ \ \lambda\omega^2\int_0^\rho \rho w_2 d\rho-\varepsilon\rho((\rho w_{2,\rho})_{,\rho}/\rho)_{,\rho}+\lambda\rho S_1 w_{1,\rho}+\rho w_{2,\rho}=0,\ \ S_2<\infty \tag{3.12a,b,c}$$

这里ω是在一次近似的线性振频加以修正后的非线性振频，边界条件(2.8c)仍被忽略[3]。

将式(3.5)、(3.8)代入(3.9)，可求得(3.9)的解为

$$w_2=w_m\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(2)}\rho^{2j}+w_m\sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(2)}\rho^{2j}+w_m^3\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(2)}\rho^{2j} \tag{3.13}$$

其中

$$A_j^{(2)}=\sum_{i=1}^{2}\xi_i\frac{b_i^j}{2^{2j}(j!)^2}$$

$$b_1=(\sqrt{\omega^4\lambda^2+4\omega^2(1+\varepsilon/\lambda)}-\omega^2\lambda)/2(1+\varepsilon/\lambda)$$

$$b_2=-(\sqrt{\omega^4\lambda^2+4\omega^2(1+\varepsilon/\lambda)}+\omega^2\lambda)/2(1+\varepsilon/\lambda)$$

$$B_0^{(2)}=B_1^{(2)}=0$$

$$B_{j+2}^{(2)}=\frac{D_j^{(2)}}{16(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2(j+1)^2}-\frac{\omega^2\lambda}{4(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2}B_{j+1}^{(2)}+\frac{\omega^2}{16(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2(j+1)^2}B_j^{(2)}$$

$$D_j^{(2)}=64\varepsilon(j+3)^2(j+2)^2(j+1)^2A_{j+3}^{(1)}$$

$$C_0^{(2)}=C_1^{(2)}=0$$

$$C_{j+2}^{(2)}=\frac{E_j^{(2)}}{16(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2(j+1)^2}-\frac{\omega^2\lambda}{4(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2}C_{j+1}^{(2)}+\frac{\omega^2}{16(1+\varepsilon/\lambda)(j+2)^2(j+1)^2}C_j^{(2)}$$

$$E_j^{(2)}=-\sum_{i=1}^{j+2}16\lambda i(j+2)(j+1)^2A_i^{(1)}B_{j-i+2}^{(1)}+\sum_{i=1}^{j+1}4i(j+1)A_i^{(1)}B_{j-i+1}^{(1)}$$

$$(j=0,1,2,\cdots)$$

这里$\xi_i(i=1,2)$应由边界条件确定，将(3.13)代入(3.11a,b,)，(3.12a)可得

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi}=0 \tag{3.14}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\ \xi_2,\ 1]^T$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{01} & C_{02} & f_0+w_m^2g_0 \\ C_{11} & C_{12} & f_1+w_m^2g_1 \\ C_{21} & C_{22} & f_2+w_m^2g_2 \end{bmatrix}$$

矩阵元素C_{lm}和f_l，$g_l(l=0,1,2; m=1,2)$都表示为ω的无穷幂级数，这里不一一列举。

由于ξ是非零向量，所以矩阵C的行列式为零，即

$$\det C=0 \tag{3.15}$$

方程(3.15)可转化为下述代数方程

$$w_m^2=P(\omega)/Q(\omega) \tag{3.16}$$

其中$P(\omega)$、$Q(\omega)$为ω的无穷幂级数，这里从略。

在式(3.16)中，令$w_m=0$，则得到线性振动的二次修正解，若令$h_1/h=0$，则退化为文[1]的情形。

式(3.16)就是所求出的夹层圆板的振幅和振频的解析关系式，利用此式可对一定的幅值w_m求出ω值，然后由前面的公式求出$A_j^{(2)}$，$B_j^{(2)}$，$C_j^{(2)}$。这样矩阵C的元素C_{lm}和f_l，g_l就定出了，从而由方程(3.14)定出系数ξ_1，ξ_2，至此，问题(2.6)～(2.9)的二阶修正迭代解就完全确定了。

作者对所讨论的具有滑动固定边界条件的夹层圆板进行了数值计算，其结果列于表1～表4，并将所得结果与文[1]结果进行了比较，其中$K=D/G_2h_0a^2$为文[1]中的剪切参数，取泊松比$\nu=0.3$。

表 1　　$K=0.01$

w_m	0	1	2	3
文[1]结果	9.4230	9.6279	10.2139	11.0537
$h_1/h=0.05$	9.4606	9.6670	10.2529	11.0928
相对误差	0.40%	0.40%	0.38%	0.35%
$h_1/h=0.10$	9.5017	9.7158	10.2920	11.1318
相对误差	0.83%	0.90%	0.76%	0.70%
$h_1/h=0.15$	9.5450	9.7549	10.3408	11.1807
相对误差	1.28%	1.30%	1.23%	1.14%
$h_1/h=0.20$	9.5893	9.7939	10.3799	11.2197
相对误差	1.73%	1.70%	1.60%	1.48%

表 2　　$K=0.03$

w_m	0	1	2	3
文[1]结果	8.2611	8.4658	9.0029	9.7646
$h_1/h=0.10$	8.3343	8.5342	9.0811	9.8428
相对误差	0.88%	0.80%	0.86%	0.79%
$h_1/h=0.10$	8.4087	8.6123	9.1592	9.9209
相对误差	1.76%	1.70%	1.71%	1.57%
$h_1/h=0.15$	8.4833	8.6807	9.2373	9.9990
相对误差	2.62%	2.47%	2.54%	2.34%
$h_1/h=0.20$	8.5574	8.7588	9.3057	10.0772
相对误差	3.46%	3.34%	3.25%	3.10%

表 3 $K=0.05$

w_m	0	1	2	3
文 [1] 结果	7.4396	7.6357	8.1631	8.8662
$h_1/h=0.05$	7.5287	7.7236	8.2607	8.9639
相对误差	1.18%	1.14%	1.18%	1.09%
$h_1/h=0.10$	7.6185	7.8213	8.3486	9.0615
相对误差	2.35%	2.37%	2.22%	2.16%
$h_1/h=0.15$	7.7080	7.9092	8.4365	9.1592
相对误差	3.48%	3.46%	3.24%	3.20%
$h_1/h=0.15$	7.7966	7.9971	8.5244	9.2471
相对误差	4.58%	4.52%	4.24%	4.12%

表 4 $K=0.1$

w_m	0	1	2	3
文 [1] 结果	6.1256	6.3271	6.8447	7.4697
$h_1/h=0.05$	6.2256	6.4248	6.9424	7.5771
相对误差	1.61%	1.52%	1.41%	1.42%
$h_1/h=0.10$	6.3270	6.5322	7.0400	7.6846
相对误差	3.18%	3.14%	2.77%	2.80%
$h_1/h=0.15$	6.4284	6.6299	7.1475	7.7920
相对误差	4.71%	4.57%	4.24%	4.14%
$h_1/h=0.20$	6.5290	9.7275	7.1475	7.8994
相对误差	6.18%	5.95%	4.24%	5.44%

四、结　论

前面我们应用修正迭代法对计及表板抗弯刚度的夹层圆板轴对称大幅度振动问题进行了讨论，由前述分析和结果可见：

1. 在本文的分析中，计及了表板的抗弯刚度，所作的唯一近似是忽略了表板的一个边界条件，而在文[1]中也未加考虑，故所得结果比文[1]精确。

2. 由于把含有小参数的高阶导数项进行了特殊处理，使得问题的求解比较容易。

3. 随着h_1/h的增加，由忽略表板抗弯刚度所带来的相对误差逐渐增大，当$0.1<h_1/h<0.2$时，最大相对误差不超过6.2%，因此，在h_1/h较小的情况下，可应用文[1]的近似理论。

4. 当K较小时，文[1]的结果与本文结果接近.这表明表板抗弯刚度的影响不仅随h_1/h变化，而且也与夹层板的剪切参数有关。

5. 随w_m的变化，由忽略表板抗弯刚度产生的相对误差虽有变化，但变化很小。

参 考 文 献

[1] 杜国君，夹层圆板的大幅度振动，应用数学和力学，15 (5)(1994)，435.
[2] 刘人怀，夹层圆板的非线性弯曲，应用数学和力学，2(2) (1981)，173.
[3] 刘人怀、朱高秋，夹层圆板大挠度问题的进一步研究，应用数学和力学，10(12) (1989)，1041.
[4] 李东、刘人怀，修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用，应用数学和力学，11(1) (1990)，13.

Further Study on Large Amplitude Vibration of Circular Sandwich Plates

Du Guojun Chen Yingjie

(Northeast Institute of Heavy Machinery, Qiqihar 161042, *P.R.China)*

Abstract

In this paper, a solution of the axisymmetric large amplitude free vibration for circular sandwich plates with the flexure rigidity of the face layers taken into account is given. In solving the problem, the modified iteration method is proposed then our results are compared with those from paper[1].

Key words circular sandwich plate, large amplitude, vibration