应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

概率区间空间中的新型KKM定理及应用*

张石生[1]　赵烈济[2]　吴　鲜[3]

（1995年8月30日收到，1996年6月20日收到修改稿）

摘　要

本文建立了概率区间空间的概念，并在此框架下建立了一个新型的KKM定理．作为应用我们得到了概率区间空间中的一个新的极大极小定理和截口定理，匹配定理及一些重合点定理．所得结果均是全新的，它们不仅包含了Von Neumann[7]中的主要结果，而且将[1],[3～4],[6],[8]中的相应结果推广到概率区间空间．

关键词　概率度量空间　概率区间空间　可链　W-可链　重合点

一、引言及预备知识

众所周知，KKM定理在非线性泛函理论中起着十分重要的作用．

自1929年波兰数学家Knaster，Kuratowski和Mazurkiewicz建立著名的KKM定理（参见[5]）以来，于1961年，此定理由著名数学家 Ky Fan推广到无限维情形．此后，许多数学家对KKM定理进行了多种推广，并将其应用于研究变分不等式，极大极小问题，重合点问题……

本文的目的是在概率度量空间中引入一种概率区间结构，用可链性代替凸性建立新型的KKM型定理，并应用它去研究概率度量空间中的极大极小问题，重合点问题和与之相应的截口定理和匹配定理．其结果不仅包含了Von Neumann[7]中的主要结果（即下面的定理A）作为特例，而且将 Komorink[6]，Fan[3]，[4]，Chang和Ma[1]，Park[8]中的相应结果推广到概率区间空间．

定理A　设 M，N 是有限维单形，f：$M\times N\to R$是一个连续函数且 $x\mapsto f(x, y)$是拟凹的，$y\mapsto f(x, y)$是拟凸的．则

$$\sup_{x\in M}\inf_{y\in N} f(x, y)=\inf_{y\in N}\sup_{x\in M} f(x, y)$$

本文所使用的有关概率度量空间的概念．记号，术语及有关性质参见引文[2],[9～10]，用$\mathscr{F}(X)$表示集合X中的一切非空有限子集族．

定义1.1　称线性序空间Z是完备的，如果Z中每一非空子集有最小上界；称线性序空间

* 国家自然科学基金资助课题．
1 四川大学数学系，成都 610064．
2 庆尚国立大学数学系，韩国．
3 云南师范大学数学系，昆明 650092．

Z是稠密的，如果$\forall\alpha$，$\beta\in N$，$\alpha<\beta$，则必存在$\delta\in N$，使$\alpha<\delta<\beta$。

以下，N恒表示一完备稠密线性序空间。

定义1.2 设$(X, \mathscr{F})$为一概率度量空间，$D\subset X$称为是可链的，如果$\forall a$，$b\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\lambda\in(0, 1]$，恒存在有限子集$\{a=p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}, p_n=b\}\subset D$，使得$F_{p_i, p_{i-1}}(\varepsilon)>1-\lambda$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。其中$\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$称为一条连接$a$，$b$的$(\varepsilon,\lambda)$-链。(规定空集$\phi$可链)

定义1.3 Menger概率度量空间$(X, \mathscr{F}, \Delta)$如果具有映射$[\cdot,\cdot]X\times X\to 2^X$使得$\forall x_1$，$x_2\in X$，$[x_1, x_2]=[x_2, x_1]$为$X$中包含$x_1$，$x_2$的可链子集，则称$(X, \mathscr{F}, \Delta)$为一概率区间空间。其中$[x_1, x_2]$称为一概率区间。

定义1.4 设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$是一概率区间空间，$D\subset X$称为是W-可链的，如果$\forall x_1$，$x_2\in D$，恒有$[x_1, x_2]\subset D$。f：$X\to Z$称为是概率拟凸（凹）的，如果$\{x\in X: f(x)\leqslant r\}$（$\{x\in X: f(x)\geqslant r\}$）$W$-可链（$\forall r\in Z$）。

定义1.5[6] 设X是一拓扑空间，f：$X\to Z$称为上（下）半连续的，如果$\forall r\in Z$，$\{x\in X: f(x)\geqslant r\}$（$\{x\in X: f(x)\leqslant r\}$）闭；$f$：$X\to Z$称为上紧的，如果$\forall r\in Z$，集$\{x\in X: f(x)\geqslant r\}$紧。

注：当X紧，f：$X\to Z$上半连续时，f必是上紧的。

定义1.6 概率区间空间$(X, \mathscr{F}, \Delta)$称为是Dadekind完备的，如果$\forall x_1$，$x_2\in X$和任意满足$x_1\in H_1$，$x_2\in H_2$，$[x_1, x_2]\subset H_1\cup H_2$的$W$-可链子集$H_1$，$H_2\subset X$，恒$\exists x_0\in X$使$x_0\in H_1$，$[x_2, x_0):=[x_2, x_0]\backslash\{x_0\}\subset H_2$或$x_0\in H_2$，$[x_1, x_0)\subset H_1$。

Dadekind完备的概率区间空间$(X, \mathscr{F}, \Delta)$称为是强Dadekind完备的，如果$\forall x_1$，$x_2\in X$和任意n个点$u_1, \cdots, u_n\in[x_1, x_2)$，有$\bigcap_{i=1}^{n}[u_i, x_2)\neq\phi$。

命题1.1 在概率区间空间中，任意多个W-可链子集的交仍为W-可链的（ϕ规定为W-可链）。

命题1.2 概率赋范线性空间$(E, \mathscr{F}, \Delta)$的非空凸子集X必为强Dadekind完备的概率区间空间，其中$[x_1, x_2]:=\mathrm{co}\{x_1, x_2\}$（$\forall x_1$，$x_2\in X$）。

证 显然$(X, \tilde{\mathscr{F}}, \Delta)$为一概率度量空间，其中，$\tilde{F}_{a,b}:=F_{a-b}$，即$\tilde{\mathscr{F}}(a, b):=\mathscr{F}(a-b)$（$\forall a$，$b\in X$）。

下证X中的任意连通子集M必可链：设相反，$\exists\varepsilon>0$，$\lambda\in(0, 1]$和x，$y\in M$使得M中没有连接x，y的(ε, λ)-链。记M中所有能与x用(ε, λ)-链连接的点的全体为A，令$B=M\backslash A$，则$x\in A$，$y\in B$。

若有$p\in A\cap\bar{B}$，则$\exists q\in B$，使$\tilde{F}_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda$，从而知$q\in A$，故$q\in A\cap B=\phi$矛盾，由此知$A\cap\bar{B}=\phi$。同理可证$\bar{A}\cap B=\phi$。故$A$，$B$分离，而$M=A\cup B$，此和$M$连通相矛盾。由此矛盾知$M$可链。

又$[x_1, x_2]:=\mathrm{co}\{x_1, x_2\}$，故$[x_1, x_2]$为$X$中包含$x_1$，$x_2$的可链子集。因此，$(X, \tilde{\mathscr{F}}, \Delta)$为概率区间空间。又由[11]中的引理1知$X$还是Dadekind完备的。从而$(X, \tilde{\mathscr{F}}, \Delta)$为Dadekind完备的概率区间空间。

又$\forall x_1$，$x_2\in X$，$\forall z_1, \cdots, z_n\in[x_1, x_2)$，设$z_i=(1-\lambda_i)x_2+\lambda_i x_1$，则$0<\lambda_i\leqslant 1$。令$\lambda=\min\{\lambda_i: i=1, \cdots, n\}$则$0<\lambda\leqslant 1$。取$x_0=(1-\lambda)x_2+\lambda x_1$，有$x_0\in[x_1, x_2)$。再取$\alpha_i=\dfrac{\lambda}{\lambda_i}$，

有$0<\alpha_i\leqslant 1(i=1, 2, \cdots, n)$，且$x_0=(1-\alpha_i)x_2+\alpha_i z_i(i=1, 2, \cdots, n)$，故$x_0\in\bigcup_{i=1}^{n}[z_i, x_2)$。由此知$(X, \mathscr{F}, \varDelta)$是强Dadekind完备的概率区间空间。

另外，正如[10]中所指出，若$(X, \mathscr{F}, \varDelta)$是一具连续$t$-范数$\varDelta$的Menger概率度量空间，则$X$是$(\varepsilon, \lambda)$-邻域系$\{U_p(\varepsilon, \lambda): p\in X, \varepsilon>0, \lambda>0\}$导出拓扑的Hausdorff拓扑空间，其中$U_p(\varepsilon, \lambda)=\{x\in X: F_{x,p}(\varepsilon)>1-\lambda\}$。

概率区间空间$(X,\mathscr{F},\Delta)$中的子集D称为区间闭（开）的，如果对任意的区间$[x_1, x_2]\subset X$，$D\cap[x_1, x_2]$为$[x_1, x_2]$中相对闭（开）集。

拓扑空间X的子集D称为是紧开（闭）的，如果对X中的任意紧子集M，$D\cap M$为M中的相对开（闭）集。

设X，Y均为拓扑空间，用$\mathscr{C}(X, Y)$表示X到Y的全体连续映射之集。

$\mathscr{C}^*(X, Y):=\{s\in\mathscr{C}(X, Y): s^{-1}$将$Y$中连通集映为$X$中连通集$\}$

二、概率区间空间中的新型KKM定理

为了证明概率区间中的新型KKM定理，我们先引入下面的引理。

引理2.1 设$(X, \mathscr{F}, \varDelta)$是一概率区间空间，$Y$是任一非空集合，$G:X\to 2^Y$。则$\forall y\in Y$，$X\backslash G^{-1}(y)$ W-可链$\Leftrightarrow\forall x_1, x_2\in X$，$\forall x\in[x_1, x_2]$有$G(x)\subset\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i)$。

证 若$\forall y\in Y$，有$X\backslash G^{-1}(y)$ W-可链，则$\forall x_1, x_2\in X$，$\forall x\in[x_1,x_2]$，若$y\notin G(x_1)\cup G(x_2)$，有$\{x_1,x_2\}\subset X\backslash G^{-1}(y)$，从而$[x_1,x_2]\subset X\backslash G^{-1}(y)$，故$x\notin G^{-1}(y)$，即$y\notin G(x)$。于是知$G(x)\subset\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i)$。反之，若$\forall x_1, x_2\in X$，$\forall x\in[x_1, x_2]$有$G(x)\subset\bigcup_{i=1}^{2}G(x_i)$，则$\forall y\in Y$，$\forall a, b\in X\backslash G^{-1}(y)$，考察任意的$x\in[a, b]$。由于$a, b\notin G^{-1}(y)$知，$y\notin G(a)\cup G(b)$。但$G(x)\subset G(a)\cup G(b)$知$y\notin G(x)$，即$x\in X\backslash G^{-1}(y)$。从而可知$[a, b]\subset X\backslash G^{-1}(y)$。故$X\backslash G^{-1}(y)$ W-可链。

引理2.2 设$(X,\mathscr{F},\varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的Menger概率度量空间（简称M-PM空间），$\{p_n\}$，$\{q_n\}\subset X$，$p_n\to p$，$q_n\to q$，且$F_{p_n,q_n}\left(\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}$，$\forall n\in N$（自然数集）。则$p=q$。

证 $\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，由$\varDelta$的连续性知，$\exists\lambda'(0,1]$使$\varDelta(1-\lambda', 1-\lambda')>1-\lambda$。于是$\exists$充分大的$n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，有$\frac{1}{n}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \lambda\right\}$，且$F_{p_n,t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\lambda'$，从而当$n\geqslant n_0$时，有

$$
\begin{aligned}
F_{p,q_n}(\varepsilon)&\geqslant\varDelta F\left(p,p_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), F_{p_n,q_n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\\
&\geqslant\varDelta(1-\lambda', 1-\lambda')\\
&>1-\lambda
\end{aligned}
$$

故$q_n\to p$，而$q_n\to q$，故$p=q$。

定理2.1 设$(X, \mathscr{F}, \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的概率区间空间，$(Y, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\varDelta})$是一具有连续$t$-范数$\tilde{\varDelta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$G: Y\to 2^X$具非空紧值。如果

(i) $\forall A\in\mathscr{F}(Y)$，$\bigcap\limits_{y\in A}G(y)$可链；

(ii) $\forall x\in X$，$Y\backslash G^{-1}(x)$ W-可链；

(iii) $\forall x\in X$，$G^{-1}(x)$是区间闭的.

则 $\bigcap\limits_{y\in Y}G(y)\neq\phi$.

证 先证$\{G(y):y\in Y\}$具有限交性质. 用归纳法：

由G具非空值知，$\forall y\in Y$，$G(y)\neq\phi$. 设$\{G(y):y\in Y\}$中任意n个元之交非空，下证$\{G(y):y\in Y\}$中任意$n+1$个元之交也非空：

设相反，则$\exists\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}\subset Y$，使得$\bigcap\limits_{i=1}^{n+1}G(y_i)=\phi$. 令$H=\bigcap\limits_{i=3}^{n+1}G(y_i)$，则有

$$(H\cap G(y_1))\cap(H\cap G(y_2))=\phi \tag{2.1}$$

且由归纳假设和条件(i)知

$$H\cap G(y)\text{非空可链}\quad(\forall y\in Y) \tag{2.2}$$

由条件(ii)和引理2.1知，$\forall u,v\in Y$，有

$$G(y)\subset G(u)\cup G(v)\qquad(\forall y\in[u,v]) \tag{2.3}$$

特别地，有

$$G(y)\subset G(y_1)\cup G(y_2)\qquad(\forall y\in[y_1,y_2]) \tag{2.4}$$

从而

$$H\cap G(y)\subset(H\cap G(y_1))\cup(H\cap G(y_2))\qquad(\forall y\in[y_1,y_2])$$

于是，由$H\cap G(y)$可链和(2.1)知，$\forall y\in[y_1,y_2]$，有

$$H\cap G(y)\subset H\cap G(y_1)\text{或}H\cap G(y)\subset H\cap G(y_2) \tag{2.5}$$

若不然，$\exists x_1,x_2\in H\cap G(y)$，使$x_1\notin H\cap G(y_2)$，$x_2\notin H\cap G(y_1)$，从而$x_i\in H\cap G(y_i)$ $(i=1,2)$. 由$H\cap G(y)$可链知，$\forall n\in N$（自然数集），在$H\cap G(y)$中存在一条联结x_1，x_2的$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$-链；因此，$\exists a_n\in H\cap G(y_1)$，$b_n\in H\cap G(y_2)$，使得

$$F_{a_n,b_n}\left(\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}$$

又$H\cap G(y_i)$紧$(i=1,2)$，可不妨设$a_n\to a\in H\cap G(y_1)$ $b_n\to b\in H\cap G(y_2)$，由引理2.2知$a=b$，此和(2.1)相矛盾. 由此知(2.5)成立.

现令$E_i=\{y\in Y:\ H\cap G(y)\subset H\cap G(y_i)\}$ $(i=1,2)$. 则显然有$y_i\in E_i(i=1,2)$，且$[y_1,y_2]\subset E_1\cup E_2$. 又由(2.3)知$E_1$，$E_2$均为$Y$中$W$-可链子集.于是由$Y$的Dadekind完备性知，$\exists k\in\{1,2\}$，$y_0\in E_k$，使$[y_i,y_0)\subset E_i$，其中$i\in\{1,2\}\backslash\{k\}$. 不妨设$k=1$，从而$y_0\in E_1$，$[y_2,y_0)\subset E_2$，故

$$\left.\begin{aligned}&H\cap G(y_0)\subset H\cap G(y_1)\\&H\cap G(y)\subset H\cap G(y_2),\ \forall y\in[y_2,y_0)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

再由$[y_2,y_0]$可链知，$\forall n\in N$，$\exists p_n\in[y_2,y_0)$使

$$\tilde{F}_{p_n,y_0}\left(\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}$$

从而易知$p_n\to y_0$.

又$\forall\{u_1,\cdots,u_m\}\subset[y_2,y_0)$，由于$Y$是强Dadekind完备知，$\bigcap\limits_{i=1}^{m}[u_i,y_0)\cap[y_2,y_0)\neq\phi$.

从而 $\exists\, \bar{y}\in[u_i,\ y_0)\cap[y_2,\ y_0)(i=1,2,\ \cdots,\ m)$，故由(2.3)和(2.6)知

$H\cap G(\bar{y})\subset H\cap(G(u_i)\cup G(y_0))\cap(H\cap G(y_2))\subset H\cap G(u_i)\quad(i=1,2,\ \cdots,\ m)$。又$H\cap G(\bar{y})\neq\phi$知$\bigcap_{i=1}^{m}H\cap G(u_i)\neq\phi$。由此知$\{H\cap G(y):\ y\in[y_2,\ y_0)\}$具有限交性质。再由$H\cap G(y)$紧，$\forall y\in Y$知$\bigcap_{y\in[y_2,y_0)}H\cap G(y)\neq\phi$。于是$\exists\, x_0\in X$，使$x_0\in\bigcap_{y\in[y_2,y_0)}H\cap G(y)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}H\cap G(p_n)$。

一方面，由$x_0\in G(p_n)$，$\forall n\in N$知$p_n\in G^{-1}(x_0)$，$\forall n\in N$。故$\{p_n\}\subset G^{-1}(x_0)\cap[y_2,\ y_0]$。由$p_n\to y_0$和条件(iii)知$y_0\in G^{-1}(x_0)$，即$x_0\in G(y_0)$

另一方面，由$x_0\in H\cap G(y_2)$和(2.1)知$x_0\notin H\cap G(y_1)$，再由(2.6)知$x_0\notin H\cap G(y_0)$，从而$x_0\notin G(y_0)$相矛盾。由此矛盾知$\{G(y):\ y\in Y\}$中任意$n+1$个元之交非空。

由归纳法原理知$\{G(y):\ y\in Y\}$具有限交性质。又由G具紧值知$\bigcap_{y\in Y}G(y)\neq\phi$。

推论2.1 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\Delta$的概率区间空间，$(Y,\ \mathfrak{F},\ \boldsymbol{\varDelta})$是一具有连续$t$-范数$\boldsymbol{\varDelta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$G:\ Y\to 2^X$具非空紧的$W$-可链值。如果$\forall x\in X$，$G^{-1}(x)$是区间闭的，且$Y\backslash G^{-1}(x)$ W-可链。则$\bigcap_{y\in Y}G(y)\neq\phi$。

推论2.2 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的概率区间空间，$Y$是具连续$t$-范数$\boldsymbol{\varDelta}$的概率赋范线性空间$(\bar{E},\mathfrak{F},\boldsymbol{\varDelta})$的非空凸子集，$G:\ Y\to 2^X$具非空$W$-可链值。如果$\forall x\in X$，$G^{-1}(x)\cap\mathrm{co}\{y_1,\ y_2\}$为$\mathrm{co}\{y_1,\ y_2\}$中相对闭集，$\forall y_1,\ y_2\in Y$，且$Y\backslash G^{-1}(x)$凸。则$\bigcap_{y\in Y}G(y)\neq\phi$。

证 $\forall y_1,\ y_2\in Y$，令$[y_1,\ y_2]:=\mathrm{co}\{y_1,\ y_2\}$，则由命题1.2知$Y$是强Dadekind完备的概率区间空间，从而，结论由推论2.1得出。

注 定理2.1和推论2.1，推论2.2是概率度量空间上第一次建立起来的KKM-型定理，它们推广了近年来所出现的定理。

三、极大极小不等式

定理3.1 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的概率区间空间，$(Y,\ \mathfrak{F},\ \boldsymbol{\varDelta})$是具有连续$t$-范数$\boldsymbol{\varDelta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$\varphi:\ X\times Y\to Z$，如果

(i) $\forall A\in\mathscr{J}(Y)$，$\forall r\in Z$，$\bigcap_{y\in A}\{x\in X\}:\ \varphi(x,\ y)\geqslant r\}$可链；

(ii) $\forall y\in Y$，$\varphi(\cdot,\ y)$上紧；

(iii) $\forall x\in X$，$\varphi(x,\ \cdot)$概率凸且在Y的任何概率区间上是上半连续的。则

$$z_*:=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\varphi(x,\ y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}\varphi(x,\ y):=z^*$$

证 先证$z_*\geqslant z^*$：

设相反，则有$z_*<z^*$，由Z的稠性密知，$\exists\,\alpha\in Z$使$z_*<\alpha<z^*$。现作集值映射$G:\ Y\to 2^X$如下：

$$G(y):=\{x\in X:\ \varphi(x,\ y)\geqslant\alpha\}\quad(\forall y\in Y)$$

由条件(ii)知，$\forall y\in Y$，$G(y)$紧，由α的取法知，$\forall y\in Y$，$G(y)\neq\phi$。又由条件(i)知，定理2.1的条件(i)满足。又$\forall x\in X$，有

$$Y\backslash G^{-1}(x)=\{y\in Y:\varphi(x,\ y)<\alpha\}$$

于是由 $\varphi(x,\ \cdot)$ 概率拟凸知，$Y\backslash G^{-1}(x)$ W-可链。即定理2.1的条件(ii)满足。又对Y中任何概率区间$[y_1,\ y_2]$，$G^{-1}(x)\cap[y_1,\ y_2]=\{y\in[y_1,\ y_2]:\ \varphi(x,\ y)\geqslant\alpha\}$，从而由$\varphi(x,\ \cdot)$在$Y$中任何概率区间上是上半连续的知$G^{-1}(x)\cap[y_1,\ y_2]$为$[y_1,\ y_2]$中相对闭集，即定理2.1的条件(iii)满足。于是，由定理2.1知$\bigcap\limits_{y\in Y}G(y)\neq\phi$。从而 $\exists\,\bar{x}\in G(y)$，$\forall y\in Y$。即 $\varphi(\bar{x},\ y)\geqslant\alpha$，$\forall y\in Y$。故$\inf\limits_{y\in Y}\varphi(\bar{x},\ y)\geqslant\alpha$，因此，$\sup\limits_{x\in X}\ \inf\limits_{y\in Y}\varphi(x,\ y)\geqslant\alpha$，即$z^*\geqslant\alpha$，此和$\alpha$的取法相矛盾。由此矛盾知$z_*\geqslant z^*$。

另一方面，显然有$z^*\geqslant z_*$，故$z_*=z^*$。

推论3.1 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的概率区间空间，$(Y,\ \mathfrak{F},\ \tilde{\varDelta})$是具连续$t$-范数$\tilde{\varDelta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$\varphi:\ X\times Y\to Z$。如果

(i) $\forall y\in Y$，$\varphi(\cdot,\ y)$上紧且概率拟凹；

(ii) $\forall x\in X$，$\varphi(x,\ \cdot)$概率拟凸且在Y的任何概率区间上是上半连续的。则

$$\sup_{x\in X}\ \inf_{y\in Y}\varphi(x,\ y)=\inf_{y\in Y}\ \sup_{x\in X}\varphi(x,\ y)$$

推论3.2 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具连续 t-范数$\varDelta$的概率区间空间，$(\tilde{E},\ \mathfrak{F},\ \tilde{\varDelta})$是一具连续$t$-范数$\tilde{\varDelta}$的概率赋范线性空间，$Y$是$\tilde{E}$的非空凸子集，$\varphi:\ X\times Y\to Z$。如果

(i) $\forall y\in Y$，$\varphi(\cdot,\ y)$上紧且概率拟凹；

(ii) $\forall x\in X$，$\varphi(x,\ \cdot)$拟凸且在Y的任何线段上是上半连续的。则

$$\sup_{x\in X}\ \inf_{y\in Y}\varphi(x,\ y)=\inf_{y\in Y}\ \sup_{x\in X}\varphi(x,\ y)$$

证 由命题1.2和推论3.1即可得出结论。

注 推论3.1(从而定理3.1和推论3.1) 不仅包含了Von Neumann[7]中的主要结果，即定理A，而且将V. Komorinik[6]中的定理 3 推广到概率区间空间。

四、截口定理和匹配定理

下面的截口定理和定理2.1等价。

定理4.1 (截口定理) 设$(X,\ \mathscr{F},\ \varDelta)$是一具有连续$t$-范数$\varDelta$的概率区间空间，$(Y,\ \mathfrak{F},\ \tilde{\varDelta})$是具连续$t$-范数$\tilde{\varDelta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$A\subset X\times Y$。如果

(i) $\forall y\in Y$，截口$A(y):=\{x\in X:\ (x,\ y)\in A\}$非空紧，且$\forall S\in\mathscr{J}(Y)$，$\bigcap\limits_{y\in S}A(y)$可链；

(ii) $\forall x\in X$，$A(x):=\{y\in Y:(x,y)\in A\}$是区间闭的，且$Y\backslash A(x)$ W-可链。

则 $\exists\,\bar{x}\in X$使$\{\bar{x}\}\times Y\subset A$。

证 定理2.1⇒定理4.1：

$\forall y\in Y$，令$G(y)=A(y)$，则$\forall x\in X$，有$G^{-1}(x)=A(x)$。于是，在定理4.1的条件下易验证定理2.1的条件满足，从而由定理 2.1 知，$\exists\,\bar{x}\in G(y)$，$\forall y\in Y$，即 $\exists\,\bar{x}\in X$，使$\{\bar{x}\}\times Y\subset A$。

定理4.1⇒定理2.1：

在定理2.1的条件下，令$A=\{(x,\ y)\in X\times Y:\ x\in G(y)\}$则$A(y)=G(y)$。$A(x)=G^{-1}(x)$，$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$。于是易验证定理 4.1 的条件满足，从而，由定理 4.1 知，$\exists\,\bar{x}\in X$，使$\{\bar{x}\}$

$\times Y\subset A$。即$(\bar{x},\ y)\in A$，$\forall y\in Y$。亦即$\bar{x}\in\bigcap_{y\in Y}G(y)$。故$\bigcap_{y\in Y}G(y)\neq\phi$。

推论4.1 设$(X,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一具连续$t$-范数$\Delta$的概率区间空间，$(Y,\ \widetilde{\mathscr{F}},\ \widetilde{\Delta})$是一具连续$t$-范数$\widetilde{\Delta}$的强Dadekind完备概率区间空间，$A\subset X\times Y$。如果

(i) $\forall y\in Y$，截口$A(y)$非空紧W-可链；

(ii) $\forall x\in X$，截口$A(x)$区间闭且$Y\backslash A(x)W$-可链。则$\exists\,\bar{x}\in X$，使$\{\bar{x}\}\times Y\subset A$。

注 推论4.1将Ky Fan[3]中的截口定理推广到了概率区间空间。

推论4.2 设$(X,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一具连续$t$-范数$\Delta$的强Dadekind完备概率区间空间，$A\subset X\times X$。如果

(i) $\forall y\in X$，截口$A_1(y):=\{x\in X:\ (x,\ y)\in A\}$紧$W$-可链；

(ii) $\forall x\in X$，截口$A_2(x):=\{y\in X:\ (x,\ y)\in A\}$区间闭且$X\backslash A_2(x)$ W-可链。则或$\exists\,\bar{x}\in X$使$(\bar{x},\ \bar{x})\notin A$或$\exists\,\bar{x}\in X$使$\{\bar{x}\}\times X\subset A$。

证 若$\forall x\in X$，恒有$(x,\ x)\in A$，则推论4.1的条件满足，从而由推论4.1知，$\exists\,\bar{x}\in X$，使

$$\{\bar{x}\}\times X\subset A$$

定理4.2 设$(X,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一具连续$t$-范数$\Delta$的强 Dadekind 完备紧概率区间空间，$(Y,\ \widetilde{\mathscr{F}},\ \widetilde{\Delta})$是一概率区间空间，$H:X\to 2^Y$是具紧开值的集值映射。如果

(i) $\forall x\in X$，$H^c(x):=Y\backslash H(x)$ W-可链；

(ii) $\forall y\in Y$，$H^{-1}(y)$区间开；

(iii) $H(X)=Y$

则$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,\ Y)$，或者$\exists\,\bar{x}\in X$使$s(X)\cap H^c(\bar{x})=\phi$，或者$\exists\,x_1,\ x_2\in X$和$x_0\in[x_1,\ x_2]$使$s^{-1}(H^c(x_0)\cap H(x_1)\cap H(x_2))\neq\phi$。

证 $\forall s\in\mathscr{C}^*(X,\ Y)$，若$\forall x\in X$，恒有$s(X)\cap H^c(x)\neq\phi$，则令$G(x)=H^c(x)$，有$s^{-1}G:X\to 2^X$为具非空闭值的集值映射，由条件(i)和$s\in\mathscr{C}^*(X,\ Y)$易知$s^{-1}G$满足定理2.1的条件(i)。又$\forall x\in X$，$(s^{-1}G)^{-1}(x)=G^{-1}(s(x))=X\backslash H^{-1}(s(x))$，于是由条件(ii)知$(s^{-1}G)^{-1}(x)$区间闭，即$s^{-1}G$满足定理2.1的条件(iii)。

下证$\exists\,x_1,\ x_2\in X$和$x_0\in[x_1,\ x_2]$使$s^{-1}(H^c(x_0)\cap H(x_1)\cap H(x_2))\neq\phi$：若不然，$\forall x_1,\ x_2\in X$，$\forall x\in[x_1,\ x_2]$有

$$s^{-1}(H^c(x)\cap H(x_1)\cap H(x_2))=\phi$$

则$\forall z\in s^{-1}(H^c(x))$，有$s(z)\notin H(x_1)\cap H(x_2)$，故$s(z)\in H^c(x_1)\cup H^c(x_2)$即$z\in s^{-1}G(x_1)\cup s^{-1}G(x_2)$，从而$s^{-1}G(x)\subset s^{-1}G(x)\cup s^{-1}G(x_2)$，于是由引理2.1知$s^{-1}G$满足定理2.1的条件(ii)。于是由定理2.1知$\bigcap_{x\in X}s^{-1}G(x)\neq\phi$，故$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$。即$Y\backslash H(X)\neq\phi$，此和条件(iii)相矛盾。由此矛盾知定理的结论成立。

推论4.3 设$(X,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一具连续$t$-范数$\Delta$的强 Dadekind 完备紧概率区间空间，$H:X\to 2^X$为具开值的集值映射。如果

(i) $\forall x\in X$，$H^c(x)$ W-可链；

(ii) $\forall y\in X$，$H^{-1}(y)$区间开；

(iii) $H(X)=X$且$\forall x\in X$，$H(x)\neq X$。

则$\exists x_1, x_2\in X$和$x_0\in[x_1, x_2]$使$H^c(x_0)\cap H(x_1)\cap H(H_2)\neq\phi$.

证　在定理4.2中取s为X上的恒等映射，取$Y=X$. 则显然定理4.2的条件全满足，且由于$\forall x\in X$, $H(x)\neq X$知$s(X)\subset H^c(x)\neq\phi$, $\forall x\in X$. 于是由定理4.2即知$\exists x_1, x_2\in X$和$x_0\in[x_1, x_2]$使

$$H^c(x_0)\cap H(x_1)\cap H(x_2)\neq\phi.$$

注　定理4.2是概率区间空间中的新型匹配定理，它可以和Park[8], Fan[4], Chang-Ma[1]中的匹配定理相比较。

五、重合点定理和不动点定理

定理5.1　设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$是一具连续t-范数Δ的强Dadekind完备的紧概率区间空间，$(Y, \mathfrak{F})$是一概率度量空间，$s\in\mathscr{C}^*(X, Y)$, $G: X\to 2^Y$具紧闭值. 如果

(i)　$\forall A\in\mathscr{J}(X)$, $\bigcap_{x\in A}G(x)$可链；

(ii)　$\forall y\in Y$, $G^{-1}(y)$区间闭；

(iii)　$s(X)\cap G(x)\neq\phi$, $\forall x\in X$;

(iv)　$\forall x\in X$, $X\backslash G^{-1}(s(x))$ W-可链.

则$\exists \bar{x}\in X$使$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$.

证　考虑集值映射$s^{-1}G: X\to 2^X$, 由G具紧闭值及条件(iii)知$s^{-1}G$具非空紧值. 又由条件(i)及$s\in\mathscr{C}^*(X, Y)$知$s^{-1}G$满足定理2.1的条件(i). 由条件(ii)和(iv)知$s^{-1}G$满足定理2.1的条件(iii)和(ii), 于是由定理2.1知$\bigcap_{x\in X}s^{-1}G(x)\neq\phi$,从而$\exists \bar{x}\in X$, 使$\bar{x}\in s^{-1}G(x)$, $\forall x\in X$, $\forall x\in X$, 故$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$.

定理5.2　设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$是一具连续t-范数Δ的强 Dadekind 完备紧概率区间空间，$(Y, \mathfrak{F}, \bar{\Delta})$是一概率区间空间，$G: X\to 2^Y$是具紧开值的集值映射，$s\in\mathscr{C}^*(X, Y)$.如果

(i)　$\forall x\in X$, $G^c(x):=Y\backslash G(x)$ W-可链；

(ii)　$\forall x\in X$, $G^{-1}(s(x))$区间开且W-可链；

(iii)　$G(X)=Y$.

则$\exists \bar{x}\in X$使$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$.

证　检查定理4.2的证明可知，当$s\in\mathscr{C}^*(X, Y)$事先固定后，将定理4.2的条件(ii)换成：“$\forall x\in X$, $H^{-1}(s(x))$区间开.”定理4.2的结论成立.

又$\forall x_1, x_2\in X$, $\forall x\in[x_1, x_2]$, 若$z\in s^{-1}G(x_1)\cap s^{-1}G(x_2)$, 则$s(z)\in G(x_1)\cap G(x_2)$, 故$\{x_1, x_2\}\subset G^{-1}(s(z))$, 由于$G^{-1}(s(z))W$-可链，故$[x_1, x_2]\subset G^{-1}(s(z))$, 从而$x\in G^{-1}(s(z))$即$s(z)\in G(x)$,亦即$z\in s^{-1}G(x)$.因此,$s^{-1}G(x_1)\cap s^{-1}G(x_2)\subset s^{-1}G(x)$.又$s^{-1}(G^c(x))=X\backslash s^{-1}G(x)$, 故

$$s^{-1}(G^c(x)\cap G(x_1)\cap G(x_2))\neq\phi$$

于是，由定理4.2知，$\exists \bar{x}\in X$, 使$s(X)\cap G^c(\bar{x})=\phi$.即$s(X)\subset G(\bar{x})$, 从而，$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$.

特别当$Y=X$, s为X上的恒等映射时，则得下面的不动点定理.

推论5.1　设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$是一具连续t-范数Δ的强Dadekind完备紧概率区间空间，G: $X\to 2^X$具开值. 如果

(i) $\forall x\in X$, $G^c(x):=X\setminus G(x)W$-可链；

(ii) $\forall x\in X$, $G^{-1}(x)$区间开且W-可链；

(iii) $G(X)=X$。

则G在X中有不动点。

定理5.3 设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$是一具连续t-范数Δ的强Dadekind完备概率区间空间，$G:X\to 2^X$. 如果

(i) $\forall y\in X$, $G^c(y):=X\setminus G(y)$紧W-可链；

(ii) $\forall x\in X$, $G^{-1}(x)$非空区间开且$X\setminus G^{-1}(x)W$-可链。则G在X中有不动点。

证 令$A=\{(x, y)\in X\times X:\ x\notin G(y)\}$，则

$A_1(y):=\{x\in X:\ (x, y)\in A\}=\{x\in X:\ x\notin G(y)\}=G^c(y)$, $A_2(x):=\{y\in X:\ (x, y)\in A\}=X\setminus G^{-1}(x)$。由条件(i)，(ii)知推论4.2的条件全满足。又$\forall x\in X$, $G^{-1}(x)\neq\phi$知$\exists y\in G^{-1}(x)$，即$x\in G(y)$，亦即$(x, y)\notin A$。故$\forall x\in X$，有$\{x\}\times X\not\subset A$。于是由推论4.2知$\exists\ \bar{x}\in X$使$(\bar{x}, \bar{x})\notin A$，即$\bar{x}\in G(\bar{x})$。所以$G$在$X$中有不动点$\bar{x}$。

参 考 文 献

[1] Chang Shihsen and Ma Yihai, Generalized KKM theorem on H-space with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **163** (1992), 406—421.

[2] 张石生，概率度量空间的基本理论及应用（Ⅰ），（Ⅱ），应用数学和力学，9(2)(3) (1988).

[3] K. Fan, A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.*, **142** (1961), 303—310.

[4] K. Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorem, *Math, Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[5] B. Knaster, B. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132—137.

[6] V. Komorink, Minimax theorems for upper semi-continuous functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hunger*, **40** (1982), 159—163.

[7] J. von Neumann, Zur theorie der gesellshaftsphiele, *Math. Ann.*, **100** (1928), 295—320.

[8] S. Park, Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1998), 164—176.

[9] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York Amsterdam Oxford (1982).

[10] B. Schweizer and A. Sklar, Probabilistic metric space, *Paci. J. Math.*, **10** (1960), 313—334.

[11] L. L. Stacho, Minimax theorems beyond topological vector spaces, *Acta Sci. Math.*, **42** (1980), 157—164.

[12] 张石生, Yeol Je Cho and Shin Min Kang,《概率度量空间和非线性算子理论》，四川大学出版社 (1994).

New Version of KKM Theorem in Probabilistic Metric Spaces with Applications

Zhang Shisheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Yeol Je Cho

(*Gyeongsang National Univ., Chihju* 660-701, *Korea*)

Wu Xian

(*Yunan Normal Univ., Kunmig* 650092, *R. R. China*)

Abstract

In this paper we first introduce the concept of probabilistic interval space. Under this framework, a new version of KKM theorem is obtained. As applications, we utilize this result to study some new minimax theorem, section theorem, matching theorem, coincidence theorem, and fixed point theorem in probabilistic metric spaces. The results presented in this paper not only contain the main result of von Neumann [7] as its special case but also extend the corresponding results of [1, 3, 4, 6, 8] to the case of probabilistic metric spaces.

Key words probabilistic metric space, probabilistic interval space, chaiability, W-chainability, coincidence point