

任意形状弹性薄板弯曲的精确解*

周 叮¹

(潘立宙推荐, 1995年4月10日收到, 1996年4月26日收到修改稿)

摘 要

本文提供了一个求解任意形状弹性薄板弯曲的新方法, 在求得了极坐标系中弹性薄板弯曲微分方程的精确解后, 将解代入薄板的边界条件, 利用 Fourier 级数将边界方程展开, 可确定出各待定常数, 所得结果是精确的.

关键词 弹性薄板 弯曲变形 精确解析解

一、引 言

弹性板是航空、航天、建筑、桥梁和机械等工程中的基本结构, 多年来, 弹性薄板的受力及变形分析一直是人们感兴趣的问题之一, 取得的成果是丰富的^[1]. 到目前为止, 除了有限差分、有限元和 Galerkin 法等通用近似解法外^[2], 其它解法, 特别是求精确解的方法均是根据结构的形状特点建立起来的^{[3],[4]}, 只能适用于某类特殊形状的弹性薄板, 并不具有通用性. 本文提出了一个求解任意形状弹性薄板弯曲的新方法, 结果是精确的.

二、微分方程的解及边界条件

考虑如图1所示的任意形状的弹性薄板, 在极坐标系 r, θ 中, 任意载荷作用下弹性薄板弯曲的微分方程为

$$\Delta\Delta w = q/D \quad (2.1)$$

式中, $w(r, \theta)$ 是薄板的挠度, Δ 是二维 Laplace 算子, D 是薄板的弯曲刚度, $q(r, \theta)$ 是作用于薄板上的任意外力. 如将 $q(r, \theta)$ 展成关于 θ 的 Fourier 级数, 有

$$\left. \begin{aligned} q(r, \theta) &= \sum_{j=1}^2 \sum_n Q_n^j(r) \phi_n^j(\theta) \\ Q_n^j(r) &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} q(r, \theta) \phi_n^j(\theta) d\theta \\ \phi_n^1(\theta) &= \cos n\theta, \quad \phi_n^2(\theta) = \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

* 南京理工大学科研发展基金资助课题

1 南京理工大学105教研室, 南京 210014

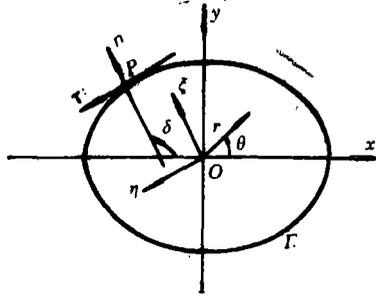


图1 任意形状的弹性薄板

设方程(2.1)的解为

$$w = \sum_{j=1}^2 w_j, \quad w_j = \sum_n \epsilon_n [W_{0n}^j(r) + W_{1n}^j(r)] \phi_n^j(\theta) \quad (2.3)$$

式中, $\epsilon_0 = 1/2, \epsilon_n = 1$ 当 $n \geq 1$, $\sum_n \epsilon_n W_{0n}^j(r) \phi_n^j(\theta)$ 是方程(2.1)的非齐次特解, $\sum_n \epsilon_n W_{1n}^j(r) \phi_n^j(\theta)$ 是方程(2.1)的齐次通解. 对于无孔的薄板, 如将极坐标原点取在板内, 考虑到原点无奇性要求, 可求得

$$W_{1n}^j(r) = A_n^j r^n + C_n^j r^{n+2} \quad (2.4)$$

式中, A_n^j, C_n^j 为待定的积分常数.

为便于描述薄板的边界条件, 对边界 Γ 上的任意一点 P , 引进局部直角坐标系 $O\xi\eta$, 使 ξ 轴和 η 轴分别平行于 P 点处沿边界 Γ 的法线和切线, 对于边缘挠度为零, 转角受弹性约束的弹性薄板, 其边界条件为

$$(w)_{r=0}, \quad D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)_r + K \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_r = 0 \quad (2.5)$$

式中, ν 为泊松比, K 为扭簧的刚度, $K = \infty$ 代表固支边, $K = 0$ 代表简支边, 对自由边也可写出类似的边界条件. 设边界 Γ 上 P 点处的法线与 x 轴的夹角为 δ , 则平面上任一点的极坐标 r, θ 和直角坐标 ξ, η 的关系为 $\xi = r \cos(\theta - \delta), \eta = r \sin(\theta - \delta)$, 应注意此时的 δ 是与 r 和 θ 无关的常数. 设薄板边界 Γ 的方程为 $r = R(\theta)$, 则(2.5)式可写成

$$\left. \begin{aligned} w(R, \theta) &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} [\cos^2(\theta - \delta) + \nu \sin^2(\theta - \delta)] + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} \right) (1 - \nu) \sin 2(\theta - \delta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) [\sin^2(\theta - \delta) + \nu \cos^2(\theta - \delta)] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{K}{D} \right) \left[\frac{\partial w}{\partial r} \cos(\theta - \delta) - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \sin(\theta - \delta) \right] \right\}_{r=R(\theta)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

三、边界条件的Fourier级数展开

将(2.3)、(2.4)两式代入(2.6)式可得到

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \sum_n \epsilon_n [W_{0n}^j(R) + A_n^j R^n(\theta) + C_n^j R^{n+2}(\theta)] \phi_n^j(\theta) = 0 \\ \sum_{j=1}^2 \sum_n \epsilon_n [G_{0n}^j(R, \theta) + A_n^j e_n^j(R, \theta) + C_n^j f_n^j(R, \theta)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} G_{0n}^1 = & \left\{ \frac{\partial^2 W_{0n}^1}{\partial r^2} [\cos^2(\theta - \delta) + \nu \sin^2(\theta - \delta)] + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_{0n}^1}{\partial r} - \frac{n^2}{r} W_{0n}^1 \right) [\sin^2(\theta - \delta) \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu \cos^2(\theta - \delta) \right] + \left(\frac{K}{D} \right) \frac{\partial W_{0n}^1}{\partial r} \cos(\theta - \delta) \right\}_{r=R(\theta)} \cos n\theta + \left\{ \frac{n}{r} [(1 - \nu) \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{\partial W_{0n}^1}{\partial r} - \frac{1}{r} W_{0n}^1 \right) \sin 2(\theta - \delta) + \left(\frac{K}{D} \right) W_{0n}^1 \sin(\theta - \delta) \right\}_{r=R(\theta)} \sin n\theta \\ e_n^1 = & nR^{n-2} \{ [(1 - \nu)(n - 1) \cos 2(\theta - \delta) + (K/D)R \cos(\theta - \delta)] \cos n\theta \\ & + [(1 - \nu)(n - 1) \sin 2(\theta - \delta) + (K/D)R \sin(\theta - \delta)] \sin n\theta \} \\ f_n^1 = & e_{n+2}^1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

当 $j=2$ 时, 仅需将上式中的 $\cos n\theta$ 用 $\sin n\theta$, $\sin n\theta$ 用 $-\cos n\theta$ 分别代替即可得 G_{0n}^2 , e_n^2 和 f_n^2 的表达式.

如板是关于 x 轴对称的, 将 (3.1)、(3.2) 两式对 θ Fourier 级数展开, 有

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \sum_n (A_n^j S_{nm}^{1j} + C_n^j S_{nm}^{2j}) \phi_m^j(\theta) = - \sum_m \sum_n P_{nm}^j \phi_m^j(\theta) \\ \sum_m \sum_n (A_n^j S_{nm}^{3j} + C_n^j S_{nm}^{4j}) \phi_m^j(\theta) = - \sum_m \sum_n Q_{nm}^j \phi_m^j(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} S_{nm}^{1j} &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi R^n(\theta) \phi_n^j(\theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \\ S_{nm}^{2j} &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi R^{n+2}(\theta) \phi_n^j(\theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \\ S_{nm}^{3j} &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi e_n^j(R, \theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \\ S_{nm}^{4j} &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi f_n^j(R, \theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \\ P_{nm}^j &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi W_{0n}^j(R) \phi_n^j(\theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \\ Q_{nm}^j &= (2/\pi) \epsilon_m \epsilon_n \int_0^\pi G_{0n}^j(R, \theta) \phi_m^j(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

以 $j=1$ 为例, 截断 (3.3) 式, 取 $m, n=0, 1, 2, \dots, N$, 可得 $-2(N+1)$ 阶的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix}
 S_{00}^{11} & S_{10}^{11} & \cdots & S_{N0}^{11} & S_{00}^{21} & S_{10}^{21} & \cdots & S_{N0}^{21} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_{01}^{11} & \cdots & \cdots & S_{01}^{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_{0N}^{11} & \cdots & \cdots & S_{0N}^{21} & \cdots & \cdots & \cdots & S_{0N}^{21} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_{00}^{31} & S_{10}^{31} & \cdots & S_{N0}^{31} & S_{00}^{41} & S_{10}^{41} & \cdots & S_{N0}^{41} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_{01}^{31} & \cdots & \cdots & S_{01}^{41} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_{0N}^{31} & \cdots & \cdots & S_{0N}^{41} & \cdots & \cdots & \cdots & S_{0N}^{41}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_0^1 \\
 A_1^1 \\
 \vdots \\
 A_N^1 \\
 C_0^1 \\
 C_1^1 \\
 \vdots \\
 C_N^1
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \sum_{n=0}^N P_{n0}^1 \\
 \sum_{n=0}^N P_{n1}^1 \\
 \vdots \\
 \sum_{n=0}^N P_{nN}^1 \\
 \sum_{n=0}^N Q_{n0}^1 \\
 \sum_{n=0}^N Q_{n1}^1 \\
 \vdots \\
 \sum_{n=0}^N Q_{nN}^1
 \end{bmatrix}
 \quad (3.5)$$

由上式可解出 $A_0^1, A_1^1, \dots, A_N^1$ 和 $C_0^1, C_1^1, \dots, C_N^1$, 当 $j=2$ 时, 取 $m, n=1, 2, 3, \dots, N$, 可得一类似的 $2N$ 阶线性代数方程组, 同样可解得 $A_1^2, A_2^2, \dots, A_N^2$ 和 $C_1^2, C_2^2, \dots, C_N^2$. 将计算结果代回 (2.3)、(2.4) 两式即得板的挠度方程. 如果薄板对 x 轴是非对称的, 也可得类似的结果, 只是计算更复杂一些罢了.

四、结 束 语

本文提供了一个求解任意形状弹性薄板弯曲的新方法, 解是精确的, 在具体计算时, 只要把级数项取得足够多 (N 足够大), 可得到任意要求的精度.

参 考 文 献

- [1] 张福范, 《弹性薄板》, 第二版, 科学出版社, 北京 (1984).
- [2] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社, 北京 (1980).
- [3] 张福范, 悬臂矩形板的不对称弯曲, 固体力学学报 5(2) (1980), 170—182.
- [4] 谢秀松、王磊, 梯形板弯曲问题的康托洛维奇解, 应用数学和力学, 5(3) (1984), 399—410.
- [5] S. 铁摩辛柯, 《板壳理论》, 科学出版社, 北京 (1977).

An Exact Method of Bending of Elastic Thin Plates with Arbitrary Shape

Zhou Ding

(*Nanjing University of Technology, Nanjing 210014,
P. R. China*)

Abstract

This paper presents a new method exactly to solve the bending of elastic thin plates with arbitrary shape. First the analytic solution of differential equation of elastic thin plate is derived in polar coordinate, then the analytic solution is substituted into the boundary conditions of elastic thin plate with arbitrary shape. The boundary equations are expanded along the boundary by the use of Fourier series, all unknown coefficients can be decided. The results are exact.

Key words elastic thin plate, flexible bending, exact analytic solution