

Melnikov方法和圆型平面限制性三体问题的横截同宿研究*

朱如曾¹ 向程²

(李骊推荐, 1995年7月23日收到, 1996年4月1日收到修改稿)

摘 要

本文对由两自由度近可积哈密顿系统经非正则变换而得到的, 具有高阶不动点的非哈密顿系统给出了判别横截同宿轨和横截异宿轨存在性的两条判据。对原二体质量比很小时近可积圆型平面限制性三体问题, 采用本文判据证明存在横截同宿轨, 从而存在横截同宿穿插现象; 还在一定假设下证明了存在横截异宿轨; 并给出了全局定性相图。

关键词 限制性三体问题 近可积哈密顿系统 高阶不动点 Melnikov方法
横截同宿(异宿)轨

一、引 言

Euler 于1772年提出圆型平面限制性三体问题, 并引进了旋转坐标系(其中原二体处于静止状态), 这是两个自由度的Hamilton系统。1836年, Jacobi发现了运动方程的一个积分, 被称为Jacobi积分。1899年Poincaré证明, 当 $\varepsilon = m_2 / (m_1 + m_2)$ 充分小时, 如果积分能展开为 ε 的幂级数, 并且 $\varepsilon = 0$ 对应有界运动, 那么不存在独立于Jacobi积分的另一个积分。1936年, Siegel证明不存在独立于Jacobi积分的另一代数积分。正如文[1, 2]所指出, 这些工作不能排除存在独立于Jacobi积分的其它类型的积分, 从而并未证明系统的不可积。

因此圆型平面限制性三体问题是否一定是不可积问题一直是个悬而未决的问题^[1,2], 当混沌概念渗透到天体力学领域之后, 一些数值结果^[3,4]表明, 此问题中有混沌运动, 但尚未有理论证明。如果从理论上证明确实存在混沌运动, 也就证明了系统的不可积性。

文[5, 6]对近可积平面限制性三体问题的混沌运动作了理论研究, 然而圆型平面限制性三体问题并不构成这类问题的特例, 因此具有独立的研究意义。

本文将对近可积($\varepsilon \ll 1$)的圆型平面限制性三体问题, 证明存在横截同宿轨, 从而存在同宿穿插现象, 并证明存在横截异宿轨。本文特点是未扰同宿和异宿轨都是无界运动, 须采用McGehee^[7]提出的非正则变换, 把无穷远点变换为有限点来研究, 结果系统变为非哈密顿

* 国家自然科学基金资助项目

1 中国科学院力学研究所, 非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京 100080

2 美国耶鲁大学机械工程系, New Haven, CT 06520, U.S.A.

的,且不动点是高阶的,没有现成的Melnikov方法可以利用.所以本文将在第二节发展适合这种情况的Melnikov方法,然后在第三节给出圆型平面限制性三体问题的数学表述,第四、五节证明横截同宿轨的存在性,并在一定假设条件下证明横截异宿轨的存在性,然后给出某等能面某Poincaré截面上的全局相图.

二、Melnikov方法的推广

现在对由近可积哈密顿系统经非正则变换所得到的非哈密顿系统,在未扰不动点是高阶的条件下给出判别横截同宿轨和横截异宿轨存在性的条件.

设连通开域 $V \subset R^2$, $B \subset R$, 而 $W = V \times S^1 \times B$. 考虑在 W 中定义的两自由度充分光滑近可积哈密顿系统,其哈密顿量为

$$H^\varepsilon(q, p, \theta, I) = H^0(q, p, I) + \varepsilon H'(q, p, \theta, I) + O(\varepsilon^2) \quad (0 \leq \varepsilon < 1) \quad (2.1)$$

式中, $(q, p) \in V$ 和 $(\theta, I) \in S^1 \times B$ 为两对共轨正则变量, H^0 是 θ 的周期为 2π 的函数. 此系统显然具有守恒量

$$H^\varepsilon = h \quad (2.2)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 还有另一独立守恒量 I . 设 U 为平面 (x, y) 上的连通开域. 引进可逆光滑非正则变换

$$\left. \begin{aligned} X &= X(q), \quad V \rightarrow U \\ X &= (x, y), \quad q = (q, p) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

系统在变数 $(x, y, \theta, I) \in U \times S^1 \times B$ 下为非哈密顿的

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial I} = \frac{\partial H^0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H'}{\partial I} + O(\varepsilon^2) \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial \theta} = \varepsilon \frac{\partial H'}{\partial \theta} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

若在 U 的某边界点集 δD 上, 方程 (2.4) 的右边存在极限, 则可对其进行连续延拓, 而将方程的定义域扩大到 $(U \cup \delta D) \times S^1 \times B$ 上, 这种扩张的意义主要在于 $\delta D \times S^1 \times B$ 中可能存在感兴趣的不变流形.

设连通子域 $Q \subset U \cup \delta D$. 设在 $Q \times S^1 \times B$ 中, $\Omega = \partial H^0 / \partial I$ 具有正的下确界, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 必定 $\partial H^\varepsilon / \partial I \neq 0$, 故对 H^0 的值域中的内点 h , 只要 ε 充分小, 便可从 $H^\varepsilon = h$ 解出定义在 $Q_1 \times S^1$ 上 ($Q_1 \subset Q$ 是连通域) 的函数 $I(x, y, \theta, h)$

$$I = I^\varepsilon = I^0(x, y, h) + \varepsilon I'(x, y, \theta, h) + O(\varepsilon^2) \quad (2.5)$$

将 (2.5) 代入 (2.4) 以消去变元 I , 并给出以 h 为参数的如下约化方程 (这里将文 [8] 的约化方法推广到非哈密顿系统)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \frac{\partial I^\varepsilon}{\partial y} \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \frac{\partial I^\varepsilon}{\partial x} \end{aligned} \right\} (x, y, \theta) \in Q_1 \times S^1 \quad (2.6)$$

对应的未扰方程为

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \frac{\partial I^0}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, p)} \frac{\partial I^0}{\partial x} \quad (2.7)$$

对系统(2.6)再补充如下三点假设:

A1 对某 h 值, 未扰系统(2.7)在 Q_1 上存在可能为高阶的不动点 p_0 , 且 p_0 有一始末于它的同宿轨 $X^0(\theta) = (x^0(\theta), y^0(\theta))$;

A2 当 ε 充分小时有周期轨 $\gamma_\varepsilon(\theta) = p_0 + O(\varepsilon)$;

A3 $\gamma_\varepsilon(\theta)$ 的, 与 $X^0(\theta)$ 对应的稳定流形 $W_s^*(\gamma_\varepsilon)$ 及 $W_u^*(\gamma_\varepsilon)$ 存在.

定理2.1 若系统(2.4)满足条件A1~A3, 并且函数(必然存在)

$$M(\theta_0, I) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\theta_0 - 2m\pi}^{\theta_0 + 2m\pi} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H'}{\partial \theta} \right) (q^0(\theta - \theta_0), \theta, I) d\theta \quad (2.8)$$

有简单零点, 则当 ε 充分小时, 系统(2.4), 即(2.1)在等能面 $H^\varepsilon = h$ 上含横截同宿轨. 这里 I 是同宿轨 $X^0(\theta)$ 对应的守恒量 $I^0(X^0(\theta), h)$ 的值.

证明 (2.6)是二维非自治系统. 在三维增广空间 $Q_1 \times S^1$ 内, 作 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{\theta_0}$: $\Sigma_{\theta_0} \rightarrow \Sigma_{\theta_0}$, 其中 $\Sigma_{\theta_0} = \{(x, y, \theta) \in Q_1 \times S^1 \mid \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi]\}$. 对假设A1中的 h , 由条件A2和A3可知 $P_\varepsilon^{\theta_0}$ 有不动点 $p_\varepsilon^{\theta_0} = p_0 + O(\varepsilon)$, 且存在其稳定和 unstable 流形 $W_s^*(p_\varepsilon^{\theta_0})$ 和 $W_u^*(p_\varepsilon^{\theta_0})$, 因此仿照文[8]引理4.5.2的证明可得, 在 $W_s^*(\gamma_\varepsilon)$ 和 $W_u^*(\gamma_\varepsilon)$ 上的轨道 $X_s^*(\theta, \theta_0)$ 和 $X_u^*(\theta, \theta_0)$ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} X_s^*(\theta, \theta_0) &= X^0(\theta - \theta_0) + \varepsilon X_s^*(\theta, \theta_0) + O(\varepsilon^2) & \theta \in [\theta_0, \infty) \\ X_u^*(\theta, \theta_0) &= X^0(\theta - \theta_0) + \varepsilon X_u^*(\theta, \theta_0) + O(\varepsilon^2) & \theta \in (-\infty, \theta_0] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

定义 $W_s^*(p_\varepsilon^{\theta_0})$ 与 $W_u^*(p_\varepsilon^{\theta_0})$ 在 Σ_{θ_0} 上点 $X^0(0)$ 处的差距

$$l(\theta_0, \varepsilon) = (X_u^*(\theta_0) - X_s^*(\theta_0)) \cdot \frac{\nabla I^0(X^0(0), h)}{|\nabla I^0(X^0(0), h)|} \quad (2.10)$$

其中 $X_s^*(\theta_0) = X_s^*(\theta_0, \theta_0)$, $X_u^*(\theta_0) = X_u^*(\theta_0, \theta_0)$ 位于 $X^0(\theta)$ 在 $X^0(0)$ 处的法线上, 且沿对应的流形到达 $p_\varepsilon^{\theta_0}$ 的路程最短 (如图1所示).

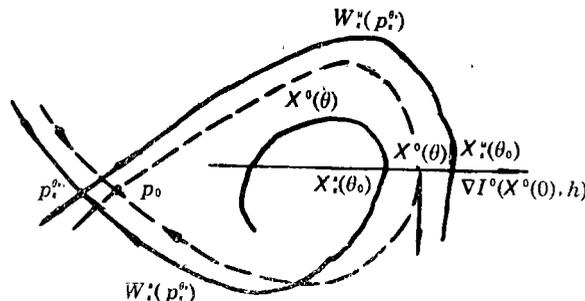


图 1

定义

$$\Delta I(\theta_0) = I(\mathbf{X}_1^*(\theta_0), \theta_0, h) - I(\mathbf{X}_2^*(\theta_0), \theta_0, h) \quad (2.11)$$

显然

$$\begin{aligned} \Delta I(\theta_0) = & \int_{\theta_0 - 2m\pi}^{\theta_0} \frac{d}{d\theta} I(\mathbf{X}_1^*(\theta, \theta_0), \theta, h) d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2n\pi} \frac{d}{d\theta} I(\mathbf{X}_2^*(\theta, \theta_0), \theta, h) d\theta \\ & + I(\mathbf{X}_1^*(\theta, \theta_0), \theta, h)|_{\theta=\theta_0 - 2m\pi} - I(\mathbf{X}_2^*(\theta, \theta_0), \theta, h)|_{\theta=\theta_0 + 2n\pi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

由(2.4)得

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{I}{\theta} = -\varepsilon \frac{1}{\Omega} \frac{\partial H'}{\partial \theta} + O(\varepsilon^2) \quad (2.13)$$

此处显然

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I(\mathbf{X}_1^*(\theta, \theta_0), \theta, h)|_{\theta=\theta_0 - 2m\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mathbf{X}_2^*(\theta, \theta_0), \theta, h)|_{\theta=\theta_0 + 2n\pi} \\ &= I(p_1^{\theta_0}, \theta_0, h) \end{aligned} \quad (2.14)$$

将(2.13), (2.14)代入(2.12)得知 $M(\theta_0, I)$ 存在且

$$\Delta I(\theta_0) = -\varepsilon M(\theta_0, I) + O(\varepsilon^2) \quad (2.15)$$

考虑到 $\mathbf{X}^0(0)$ 非 P^{θ_0} 的不动点, 故 $|\nabla I^0(\mathbf{X}^0(0), h)| \sim O(1)$, 于是(2.10)和(2.15)给出

$$I(\theta_0, \varepsilon) = -\varepsilon M(\theta_0, I) / |\nabla I^0(\mathbf{X}^0(0), h)| + O(\varepsilon^2) \quad (2.16)$$

此式表明, 若存在某数 $\bar{\theta}$, 使 $M(\theta_0, I)$ 在 $\theta_0 = \bar{\theta}$ 处有简单零点, 则对充分小的 ε , $I(\theta_0, \varepsilon)$ 必在 $\theta_0 = \bar{\theta} + O(\varepsilon)$ 处有简单零点, 从而定理2.1得证.

为了讨论横截异宿轨, 作如下4点假定:

B1 对某 h 值, 未扰系统(2.7)在 (x, y) 平面的 Q_1 上存在可能为高阶的不动点 p_1 和 p_2 , 且有始于 p_1 终于 p_2 的异宿轨 $\mathbf{X}_1^0(\theta) = (x_1^0(\theta), y_1^0(\theta))$.

B2 当 ε 充分小时有周期轨 $\gamma_{1\varepsilon}(\theta) = p_1 + O(\varepsilon)$ 和 $\gamma_{2\varepsilon}(\theta) = p_2 + O(\varepsilon)$.

B3 $\gamma_{1\varepsilon}(\theta)$ 和 $\gamma_{2\varepsilon}(\theta)$ 的, 与 $\mathbf{X}_1^0(\theta)$ 对应的不稳定流形 $W^u(\gamma_{1\varepsilon})$ 和稳定流形 $W^s(\gamma_{2\varepsilon})$ 存在.

B4 存在 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, 使得 $\gamma_{1\varepsilon}(\theta)$ 和 $\gamma_{2\varepsilon}(\theta)$ 在 Poincaré 映射 P^{θ_0} 下的不动点 $p_{1\varepsilon}^{\theta_0}$ 和 $p_{2\varepsilon}^{\theta_0}$ 满足条件 $I(p_{1\varepsilon}^{\theta_0}, \theta_0, h) = I(p_{2\varepsilon}^{\theta_0}, \theta_0, h)$.

定理2.2 若系统(2.4)满足条件B1~B4, 并且函数

$$M_1(\theta_0, I) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_{\theta_0 - 2n\pi}^{\theta_0 + 2m\pi} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H'}{\partial \theta} \right) (\mathbf{q}_1^0(\theta - \theta_0), \theta, I) d\theta \quad (2.17)$$

有简单零点, 则系统(2.4), 即(2.1)在等能面 $H^e = h$ 上含横截异宿轨. 这里 I 是与异宿轨 $\mathbf{X}_1^0(\theta)$ (即 $\mathbf{q}_1^0(\theta)$) 对应的守恒量 $I^0(\mathbf{X}_1^0(\theta), h)$ 的值.

证明 定理2.1的证明类似, 只是应注意到条件B4保证(2.14)中第一个等号的成立.

本文定理2.1的 Melnikov 函数(2.8)虽然与文[9]在4维情况下的有关公式形式相似, 但适用条件很不一样. 文[9]假定未扰哈密顿的有限不动点是二阶的, 本文定理2.1则适用于无穷远处的高阶不动点. 本文定理2.2则更是过去未有过的.

三、基本方程和未扰相图

考虑质量为 m_1 和 m_2 的两个质点在万有引力作用下绕其质心 O 以角速度 ω 相对于惯性系 Oxy (图2) 做圆周运动, 考虑 m_3 在 m_1 和 m_2 作用下的运动, 并假定 m_3 是如此之小, 以致可忽

略 m_3 对 m_1 和 m_2 的影响, 并且其初条件取得使其永远限制在 m_1 和 m_2 的运动平面内. 图2中, Oxy 是随 m_1 和 m_2 一起相对于 $O\bar{x}\bar{y}$ 转动的旋转系.

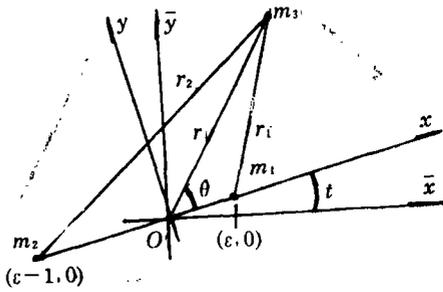
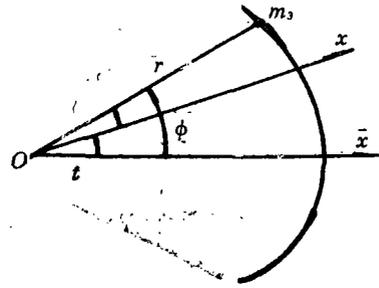


图 2

图3 ($I < 0$)的情况)

令 $\epsilon = m_2 / (m_1 + m_2)$, 并取特征尺度 l (m_1 与 m_2 之间的距离), ω 和 m_3 进行物理量的无量纲化, 于是在 Oxy 中, m_3 的无量纲哈密顿量和运动方程为

$$H^\epsilon = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{I^2}{r^2} \right) - I - f(r, \theta) = H^0 + \epsilon H' + O(\epsilon^2) \quad (3.1)$$

$$H^0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{I^2}{r^2} \right) - I - \frac{1}{r} \quad (3.2)$$

$$H' = \frac{1}{r} - \frac{\cos \theta}{r^2} - (r^2 + 2r \cos \theta + 1) - \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$f(r, \theta) = (1 - \epsilon) (r^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon r \cos \theta) - \frac{1}{2} + \epsilon (r^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2(1 - \epsilon)r \cos \theta) - \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H^\epsilon}{\partial p_r} = p_r \quad (3.5)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial r} = \frac{I^2}{r^3} + \frac{\partial f}{\partial r} \quad (3.6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} = \frac{I}{r^2} - 1 \quad (3.7)$$

$$\dot{t} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

式中 r 为 m_3 与 O 点之间的距离, θ 为 $\overrightarrow{Om_3}$ 相对于 x 轴的转角; p_r 和 I 为对应的正则动量.

未扰系统($\epsilon=0$)有两个独立积分 I 和 $H^0=h$, 系统是可积的, 解是熟知的圆锥曲线

$$r = I^2 / (1 + e \cos \phi) \quad (3.9)$$

$$p_r = e \sin \phi / I \quad (3.10)$$

$$\phi = \theta + t \quad (3.11)$$

其中, $e = \sqrt{1 + 2I^2(h + I)}$, ϕ 为惯性系 $O\bar{x}\bar{y}$ 中 m_3 转过的角度 (近地点取为 $\phi=0$), 如图3所示. 未扰轨有四类: 圆轨($h = -I - 1/2I^2$), 椭圆轨($-I - 1/2I^2 < h < -1$), 抛物轨($h = -I$)和双曲轨($h > -I$). 在未扰圆轨和椭圆轨情况下, 著名的KAM定理已描述了系统的扰动特征, 因此本文主要讨论抛物轨和双曲轨的扰动特征. 为了把无界轨变为有界轨, 采用如下的非正则变换^[7]

$$r = x^{-2} \quad (x > 0) \quad (3.12)$$

$$p_r = y, \quad I \text{ 和 } \theta \text{ 不变} \tag{3.13}$$

(3.5)~(3.18)化为

$$\dot{x} = -x^3 y / 2 \tag{3.14}$$

$$\dot{y} = I^2 x^6 + \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=x^{-2}} \tag{3.15}$$

$$\dot{\theta} = I x^4 - 1 \tag{3.16}$$

$$\dot{I} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{r=x^{-2}} \tag{3.17}$$

其中 $(x, y, \theta, I) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}$ 并有 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. 在

$$\dot{\theta} = I x^4 - 1 = \Omega(I, x) \neq 0 \tag{3.18}$$

的条件下, (3.14)~(3.17)可化为

$$dx/d\theta = -x^3 y / 2 (I x^4 - 1) \tag{3.19}$$

$$dy/d\theta = I^2 x^6 / (I x^4 - 1) + (\partial f / \partial r) / (I x^4 - 1) \tag{3.20}$$

其中 $I = I(x, y, \theta, h, \varepsilon)$ 由守恒方程 $H^\varepsilon = h$ 决定. 未扰 ($\varepsilon = 0$) 方程为自治形式

$$dx/d\theta = -x^3 y / 2 (I x^4 - 1) \tag{3.21}$$

$$dy/d\theta = (-x^4 + I^2 x^6) / (I x^4 - 1) \tag{3.22}$$

其中 $I = I(x, y, h, \theta, 0) = I^0(x, y, h)$ 是守恒量. 为确保(3.18)能满足, 本文只考虑 $I < 0$ 且 $h > 0$ 的情况. 未扰相图示于图4. 图中有一条连接高阶不动点 $(0, 0)$ 的同宿轨 $X^0(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, 其内为周期轨, 其外则为连接高阶不动点 $(0, \pm y)$ 的异宿轨, 在 x 轴上还有一个不动点 $(x = 1/|I_a|)$, I_a 由方程 $h = -I_a - 1/2 I_a^2$ 确定.

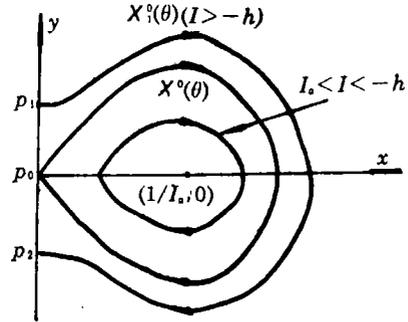


图4 h 取定值时的相图 ($I < 0$, 且 $h > 0$)

四、横截同宿轨的存在性证明

讨论图4中未扰同宿轨 $X^0(\theta)$ 所对应的扰动轨. 在 (r, p_r) 平面上, 此未扰轨由(3.9)~(3.11)中取 $I = I = -h$, 即 $e = 1$ 所表示. 显然, 在 (x, y) 平面上, $p_0(0, 0)$ 仍为(3.19)和(3.20)的平衡点, 它就是定理2.1假设A2中的周期轨 $\gamma_s(\theta)$. 对 Poincaré 映射 $P_{p_0}^0$, McGehee^[7] 已证明, p_0 的局部稳定和不稳定流形 $W_{loc}^s(p_0)$ 和 $W_{loc}^u(p_0)$ 存在且为实解析的弧, 因此条件A3满足. 现对 $X^0(\theta)$ 计算(2.8)式, 并限于 $I < 0$.

由(3.7)和(3.11)并取 $\phi|_{t=0} = 0$ 得单调函数

$$\theta = \theta(\phi) = \phi - \frac{I^3}{2} \left(\text{tg} \frac{\phi}{2} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{\phi}{2} \right), \quad \phi = \theta^{-1}(\theta) \tag{4.1}$$

将(3.3)和(3.18)代入(2.8), 并注意到 $p_0^0 = p_0$, 故积分与积分限趋向 ∞ 的方式无关, 故

$$M(\theta_0, I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta'}{I - r^2} \left[1 - \frac{r^3}{(r^2 + 2r \cos \theta' + 1)^{3/2}} \right] d\theta' \tag{4.2}$$

式中

$$r = I^2 / [1 + \cos \phi(\theta' - \theta_0)] \tag{4.3}$$

令 $\theta = \theta' - \theta_0$, (4.2)和(4.3)分别化为

$$M(\theta_0, I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta + \theta_0)}{I - r^2} \left[1 - \frac{r^3}{(r^2 + 2rc \cos(\theta + \theta_0) + 1)^{3/2}} \right] d\theta \quad (4.4)$$

$$r = I^2 / [1 + \cos\phi(\theta)] \quad (4.5)$$

(4.4)中当被积函数的分母 $r^2 + 2rc \cos(\theta + \theta_0) + 1$ 有零点时, 积分无意义, 这对应着 m_3 与 m_2 接近碰撞. 为了将此情况排除, 限定只考虑 $I < -\sqrt{2}$ 的情况. 此时(4.5)给出

$$r^2 + 2rc \cos(\theta + \theta_0) + 1 = \left[\frac{I^2}{1 + \cos\phi(\theta)} + \cos(\theta + \theta_0) \right]^2 + \sin^2(\theta + \theta_0) > 0$$

(4.4)和(4.5)显然给出 (利用 $r(-\theta) = r(\theta)$)

$$M(\pi, I) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial M(\theta_0, I)}{\partial \theta_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(I - r^2)} \left\{ \cos(\theta + \theta_0) \left[1 - \frac{r^3}{(r^2 + 2rc \cos(\theta + \theta_0) + 1)^{3/2}} \right] - \frac{3r^4 \sin^2(\theta + \theta_0)}{(r^2 + 2rc \cos(\theta + \theta_0) + 1)^{5/2}} \right\} d\theta \quad (I < -\sqrt{2})$$

$$\left. \frac{\partial M(\theta_0, I)}{\partial \theta_0} \right|_{\theta_0 = \pi} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{I - r^2} \left\{ \cos\theta \left[\frac{r^3}{(r^2 - 2rc \cos\theta + 1)^{3/2}} - 1 \right] - \frac{3r^4 \sin^2\theta}{(r^2 - 2rc \cos\theta + 1)^{5/2}} \right\} d\theta \quad (4.7)$$

(4.1)和(4.5)给出在 $\theta = 0$ 和 $I = -\sqrt{2}$ 附近的展开式

$$\phi = (2 - \sqrt{2})\theta + 3(3 - 2\sqrt{2})\theta\Delta + O_3(\theta, \Delta) \quad (4.8)$$

$$r = 1 - \sqrt{2}\Delta + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\theta^2 + O_3(\theta, \Delta) \quad (4.9)$$

$$r^2 - 2rc \cos\theta + 1 = 2\Delta^2 + \theta^2 + O_3(\theta, \Delta) \quad (4.10)$$

式中 $\Delta = I + \sqrt{2}$ 而 $O_3(\theta, \Delta)$ 为关于 θ 和 Δ 的三阶以上小量. 将(4.9)和(4.10)代入(4.7)给出

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta_0} M(\theta_0, I) \right|_{\theta_0 = \pi} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(I + \sqrt{2})^2} (1 + O(I + \sqrt{2})) \quad (4.11)$$

此式给出

$$\lim_{I \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta_0} M(\theta_0, I) \Big|_{\theta_0 = \pi} = +\infty \quad (4.12)$$

这表明, 至少存在 $a > 0$, 使得当 $-a - \sqrt{2} < I < -\sqrt{2}$ 时, $\partial M(\theta_0, I) / \partial \theta_0 \Big|_{\theta_0 = \pi} \neq 0$, 从而 $\theta_0 = \pi$ 是 $M(\theta_0, I)$ 的简单零点, 于是可由定理 2.1 得知系统存在横截同宿轨. 因此下面的定理 4.1 成立.

定理 4.1 对圆型平面限制性三体问题, 必存在正数 $a > 0$, 使得对每一个满足不等式 $a + \sqrt{2} > h > \sqrt{2}$ 的数 h , 都可找到正数 $\varepsilon_0(h)$, 只要 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(h)$, 那么等能面 $H^* = h$ 上便存在横截同宿轨.

横截同宿轨的存在保证了 Poincaré 截面上的同宿穿插现象. 还可进一步证明一定存在 Smale 马蹄, 我们将另文讨论.

五、横截异宿的证明和扰动相图

讨论图 4 中连结 $p_1(0, y)$ ($y > 0$) 和 $p_2(0, -y)$ 的未扰异宿轨 $\mathbf{X}_1^0(\theta)$ 所对应的扰动轨. 此时应在 (3.9)~(3.11) 中取 $I = I > -h$, 即 $e > 1$. 显然在 (x, y) 平面上, p_1 和 p_2 仍为 (3.19) 和 (3.20) 的平衡点, 它们就是定理 2.2 条件 B2 中的周期轨 $\gamma_{1e}(\theta)$ 和 $\gamma_{2e}(\theta)$. 因此, 对任意 θ_0 , 有 $p_{1e}^{\theta_0} = p_1$, $p_{2e}^{\theta_0} = p_2$. H^e 是 y 的偶函数, 故 I 是 y 的偶函数, 故条件 B4 是成立的. 因此对 $\mathbf{X}_1^0(\theta)$ 而言, 定理 2.2 中条件 B1~B4 中除 B3 外全部满足. 现在假设条件 B3 也成立, 于是可用函数 $M_1(\theta_0, I, e)$ 来判别横截异宿轨的存在性.

仍限于 $I < 0$, 于是 $\Omega \neq 0$. 此时, (4.1) 改为

$$\theta = \theta(\phi) = \phi - I^3 \int_0^\phi \frac{ds}{(1 + e \cos s)^2} \quad (5.1)$$

(4.4) 改为

$$M_1(\theta_0, I, e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{I - r^2} \left[1 - \frac{r^3}{(r^2 + 2r \cos(\theta + \theta_0) + 1)^{3/2}} \right] d\theta \quad (5.2)$$

其中

$$r = I^2 / [1 + e \cos \phi(\theta)] \quad (5.3)$$

为了排除 (5.2) 式中分母为零的情况, 限于讨论 $I < -\sqrt{1+e}$ 的情况. 此时, 利用 $r(-\theta) = r(\theta)$, (5.2) 给出

$$M_1(\pi, I, e) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} M_1(\theta_0, I, e) |_{\theta_0 = \pi}$$

仍由 (4.7) 表示, 只是其中 r 应由 (5.3) 表示. (5.1) 和 (5.3) 给出在 $\theta = 0$ 和 $I = I_0$ 处的展开式

$$\phi = \frac{I_0^4}{I_0^4 - I_0^3} \theta + \frac{3I_0^6}{(I_0^4 - I_0^3)^2} \theta \Delta + O_3(\theta, \Delta) \quad (5.5)$$

$$r = 1 + \frac{2}{I_0} \Delta + \frac{\Delta^2}{I_0^2} + \frac{eI_0^6}{2(I_0^4 - I_0^3)^2} \theta^2 + O_3(\theta, \Delta) \quad (5.6)$$

$$r^2 - 2r \cos \theta - 1 = \frac{4}{I_0^2} \Delta^2 + \theta^2 + O_3(\theta, \Delta) \quad (5.7)$$

式中 $\Delta = I - I_0$, 而 $I_0 = -\sqrt{1+e}$. 将 (5.6) 和 (5.7) 代入 (4.7) 得

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} M_1(\theta, I, e) |_{\theta_0 = \pi} = \frac{I_0^2}{2(1 - I_0)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right) (1 + O(\Delta)) \quad (5.8)$$

此式给出

$$\lim_{I \rightarrow I_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} M(\theta_0, I, e) |_{\theta_0 = \pi} = +\infty \quad (5.9)$$

从而类似于上节末, 可用定理 2.2 给出如下定理 5.1.

定理 5.1 对圆型平面限制性三体问题, 任给 $e > 1$, 必存在 $a > 0$, 使得对每一个满足不等式 $-a - \sqrt{1+e} < I < -\sqrt{1+e}$ 的 I 都可找到正数 $e_0(e, I)$, 只要 $0 < e \leq e_0(e, I)$, 那么等能面 $H^e = h$ 上便存在横截异宿轨. 此处 $h = (e^2 - 1) / 2I^2 - I$.

图5表示参数满足本文定理4.1和定理5.1的条件的某等能面某 P^0_0 上的扰动相图。它关于 x 轴的对称性来自方程(3.19)~(3.20)在变换 $(x, y, \theta) \rightarrow (x, -y, -\theta)$ 下的不变性；图的定性行为由KAM定理，本文定理4.1和定理5.1所决定；在 $(0, 0)$ 附近有复杂的同宿参插现象。

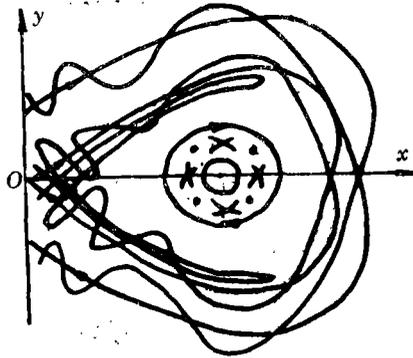


图5 扰动相图

作者感谢解伯民教授和李骊教授的有益讨论和意见。

参 考 文 献

- [1] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press (1947).
- [2] T. M. Cherry, On Poincaré's theorem of "the non-existence of uniform integrals of dynamical equations", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 22 (1924).
- [3] V. Szebehely, *Long Time Prediction in Dynamics*, Ed. by W. Horton and L. Richi, Wiley, Austin (1981).
- [4] V. Szebehely, Is celestial mechanics deterministic? *Applications of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics*, Ed. by Szebehely, D. Reidel Pub. Company (1982), 321-324.
- [5] R. Easton and R. McGehee, Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, *Indiana U. Math. J.*, 28 (1979), 211-240.
- [6] R. Easton, Capture orbits and Melnikov integrals in the planar three body problem, *Cele. Mech. and Dyn. Astro.*, 50 (1991), 283-297.
- [7] R. McGehee, A stable manifold theorem for degenerate fixed points with application to celestial mechanics, *J. Diff. Eq.*, 14 (1973), 70-88.
- [8] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [9] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, Springer-Verlag (1988).

Studies of Melnikov Method and Transversal Homoclinic Orbits in the Circular Planar Restricted Three-Body Problem

Zhu Ruzeng

*(LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing
100080, P. R. China)*

Xiang Cheng

*(Department of Mechanical Engineering, Yale University,
New Haven, CT 06520, U. S. A.)*

Abstract

Non-Hamiltonian systems containing degenerate fixed points obtained from two degrees of freedom near-integrable Hamiltonian systems through non-canonical transformations are dealt with in this paper. Two criteria for determining the existence of transversal homoclinic and heteroclinic orbits are presented. By exploiting these criteria the existence of the transversal homoclinic orbits and so, of the transversal homoclinic tangle phenomenon in the near-integrable circular planar restricted three-body problem with sufficiently small mass ratio of the two primaries is proven. Under some assumptions, the existence of the transversal heteroclinic orbits is proven. The global qualitative phase diagram is also illustrated.

Key words restricted three-body problem, near integrable Hamiltonian system, degenerate fixed point, Melnikov method, transversal homoclinic (heteroclinic) orbit