

一边固定及一角点支承的矩形板 在均布荷载作用下的弯曲解

许琪楼¹ 姬同庚²

(丁皓江推荐, 1995年1月12日收到, 1995年3月2日收到修改稿)

摘 要

本文采用叠加法求出一边固定及一角点支承的矩形板在均布荷载作用下的弯曲解答, 计算表明这种解法收敛速度快, 计算精度高。

关键词 弹性薄板弯曲 矩形板 均布荷载

图1所示边长为 a , b 的矩形板, AB 边固定, C 角点支承, D 角点自由, 承受板面法向均布荷载 q 作用。由于 C 角点的支承反力无法利用静力平衡条件确定, 因而该弯曲问题的边界条件是不完全确定的, 其弯曲解可以采用以下步骤计算:

1. 撤去角点 C 的点支座而代之以未知力 R , 即为在悬臂板上作用均布外荷载 q 和角点集中力 R 的弯曲;
 2. 分别求解悬臂板在外荷载 q 作用下和角点单位未知力作用下的弯曲解;
 3. 由悬臂板在角点 C 的支座方向位移为零的条件求出 C 角点的支反力 R ;
 4. 利用叠加法求出原结构体系的弯曲解。
- 计算时坐标系见图1所示。

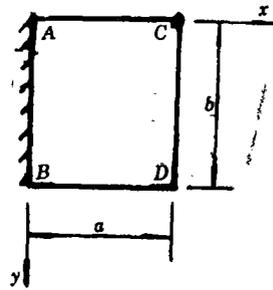


图 1

一、悬臂板在均布荷载作用下的解答

悬臂矩形板在 q 作用下挠度 W 应满足下列平衡微分方程:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.1)$$

1 郑州工学院土建系, 郑州 450002

2 河南省交通厅勘察设计院, 郑州 450052

式中 D 为板的抗弯刚度, $D=Et^3/12(1-\mu)$, 其中 E , μ 分别为板的弹性模量及泊松比, t 为板的厚度.

$$\text{设 } W=W_1+W_2 \quad (1.2)$$

W_1 为方程(1.1)所对应的齐次方程的通解, W_2 为方程(1.1)的一个特解. 取 W_1 为双向单三角级数, 以对应板的双向弯曲变形. 三角级数必须是一个完整的正交三角函数族, 悬臂板可取为:

$$\begin{aligned} W_1 = & \sum_{m=1,3,5,\dots} (A_m \operatorname{sh} \alpha y + B_m \operatorname{ch} \alpha y + C_m \alpha y \operatorname{sh} \alpha y + D_m \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \sin \alpha x \\ & + (E_0 x + F_0 + G_0 x^2 + H_0 x^3) \\ & + \sum_{n=1,2,\dots} (E_n \operatorname{sh} \beta x + F_n \operatorname{ch} \beta x + G_n \beta x \operatorname{sh} \beta x + H_n \beta x \operatorname{ch} \beta x) \cos \beta y \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中 $\alpha=m\pi/2a$, $\beta=n\pi/b$. A_m, B_m, C_m, D_m, E_n (包括 E_0) F_n (包括 F_0), G_n (包括 G_0), H_n (包括 H_0)为8个待定常数.

W_1 表达式中采用了二个级数形式, 第一个为

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \Phi_1(y) \sin \frac{m\pi}{2a} x$$

第二个为

$$\sum_{n=0,1,2,\dots} \Phi_2(x) \cos \frac{n\pi}{b} y$$

应当指出: 第二个级数中 n 的取值必须从零开始, 因为在 $[0, b]$ 区间上

$$\sum_{n=0,1,2,\dots} \cos \frac{n\pi}{b} y$$

是一个完整的正交三角函数族. 当 $n=0$ 时 $\cos(n\pi y/b)=1$, 为防止在引入边界条件后 $\Phi_2(x)$ 等于零, 将 $n=0$ 时的 $\Phi_2(x)$ 由双曲函数改为 x 的多项式, 即认为 E_0, F_0, G_0, H_0 是 $n=0$ 时的 E_n, F_n, G_n, H_n .

级数 $\sum_{m=1,3,5,\dots} \sin \frac{m\pi}{2a} x$ 在 $[0, a]$ 区间上具有下列正交性, 当 i, j 为任意正奇数时, 有

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{j\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ a/2 & (i = j) \end{cases} \quad (1.4)$$

级数 $\sum_{n=0,1,2,\dots} \cos \frac{n\pi}{b} y$ 在 $[0, b]$ 区间上具有下列正交性, 当 i, j 为任意正整数时(包括零), 有

$$\int_0^b \cos \frac{i\pi y}{b} \cdot \cos \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ b/2 & (i = j \neq 0) \\ b & (i = j = 0) \end{cases} \quad (1.5)$$

特解 W_2 取:

$$W_2 = \frac{q}{24D} (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2) \quad (1.6)$$

W_2 满足下列边界条件:

$$x=0 \text{ 时: } W_2=0, \quad \frac{\partial W_2}{\partial x}=0,$$

$$x=a \text{ 时: } \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \text{ 时} \\ y=b \text{ 时} \end{array} \right\} \frac{\partial^3 W_2}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

显然 W 已满足下列自由角点条件:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=a \text{ 或 } x=b \\ y=0 \text{ 或 } y=b}} = 0 \tag{1.7}$$

W_1 中的 8 个待定常数可仅由边界条件确定.

W 应满足下列边界条件:

$$(W)_{x=0} = 0 \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \tag{1.9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \tag{1.10}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \tag{1.11}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=0, y=b} = 0 \tag{1.12}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=0, y=b} = 0 \tag{1.13}$$

将式(1.3)与式(1.6)相加后代入, 由式(1.8)有

$$F_0 + \sum_{n=1,2,\dots} F_n \cos \frac{n\pi}{b} y = 0$$

得

$$F_0 = 0 \quad (n=0) \tag{1.14a}$$

$$F_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \tag{1.14b}$$

由式(1.11)得:

$$6H_0 + \sum_{n=1,2,\dots} \{ E_n(\mu-1) \operatorname{ch} \beta a + F_n(\mu-1) \operatorname{sh} \beta a + G_n[(\mu+1) \operatorname{sh} \beta a + (\mu-1) \beta a \operatorname{ch} \beta a] + H_n[(\mu+1) \operatorname{ch} \beta a + (\mu-1) \beta a \operatorname{sh} \beta a] \} \beta^3 \cos \frac{n\pi}{b} y = 0$$

有:

$$6H_0 = 0 \quad (n=0) \tag{1.15a}$$

$$E_n(\mu-1) \operatorname{ch} \beta a + F_n(\mu-1) \operatorname{sh} \beta a + G_n[(\mu+1) \operatorname{sh} \beta a + (\mu-1) \beta a \operatorname{ch} \beta a] + H_n[(\mu+1) \operatorname{ch} \beta a + (\mu-1) \beta a \operatorname{sh} \beta a] = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \tag{1.15b}$$

由式(1.9)和式(1.10)得:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} (A_m \operatorname{sh} \alpha y + B_m \operatorname{ch} \alpha y + C_m \alpha y \operatorname{sh} \alpha y + D_m \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \alpha + E_0 + \sum_{n=1,2,\dots} (E_n + H_n) \beta \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1,3,5} \{A_m(\mu-1)\text{sh}ay + B_m(\mu-1)\text{ch}ay + C_m[2\mu\text{ch}ay + (\mu-1)a\text{ysh}ay] \\
& + D_m[2\mu\text{sh}ay + (\mu-1)a\text{ych}ay]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} + 2G_0 + 6H_0 a \\
& + \sum_{n=1,2,\dots} \{E_n(1-\mu)\text{sh}\beta a + F_n(1-\mu)\text{ch}\beta a + G_n[2\text{ch}\beta a + (1-\mu)\beta\text{ash}\beta a] \\
& + H_n[2\text{sh}\beta a + (1-\mu)\beta\text{ach}\beta a]\} \beta^2 \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \quad (1.17)
\end{aligned}$$

利用式(1.5)的正交性, 将双曲函数在 $[0, b]$ 区间上展成下列三角级数:

$$\text{sh}ay = \text{sh} \frac{m\pi}{2a} y = \sum_{n=0,1,2,\dots} a_{n1} \cos \frac{n\pi}{b} y = \sum_{n=0,1,2,\dots} a_{n1} \cos \beta y \quad (1.18)$$

$$\text{ch}ay = \sum_{n=0,1,2,\dots} a_{n2} \cos \beta y \quad (1.19)$$

$$a\text{ysh}ay = \sum_{n=0,1,2,\dots} a_{n3} \cos \beta y \quad (1.20)$$

$$a\text{ych}ay = \sum_{n=0,1,2,\dots} a_{n4} \cos \beta y \quad (1.21)$$

其中

$$a_{n1} = \begin{cases} \frac{1}{ab}(\text{ch}ab - 1) & (n=0) \\ \frac{2\alpha(\text{ch}ab\cos n\pi - 1)}{b(\alpha^2 + \beta^2)} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.22)$$

$$a_{n2} = \begin{cases} \frac{1}{ab}\text{sh}ab & (n=0) \\ \frac{2a\text{sh}ab\cos n\pi}{b(\alpha^2 + \beta^2)} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.23)$$

$$a_{n3} = \begin{cases} \frac{1}{ab}(ab\text{ch}ab - \text{sh}ab) & (n=0) \\ \frac{2a\text{sh}ab\cos n\pi}{b(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2\alpha^2\text{ch}ab\cos n\pi}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{4\alpha^3\text{sh}ab\cos n\pi}{b(\alpha^2 + \beta^2)^2} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.24)$$

$$a_{n4} = \begin{cases} \frac{1}{ab}(ab\text{sh}ab - \text{ch}ab + 1) & (n=0) \\ \frac{2\alpha(\text{ch}ab\cos n\pi - 1)}{b(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2\alpha^2\text{sh}ab\cos n\pi}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{4\alpha^3(\text{ch}ab\cos n\pi - 1)}{b(\alpha^2 + \beta^2)^2} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.25)$$

将式(1.18)~式(1.21)代入式(1.16), 式(1.17), 调换 m 和 n 的求和次序, 比较级数各项, 有:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha(A_m a_{01} + B_m a_{02} + C_m a_{03} + D_m a_{04}) + E_0 = 0 \quad (n=0) \quad (1.26a)$$

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha(A_m a_{n1} + B_m a_{n2} + C_m a_{n3} + D_m a_{n4}) + \beta(E_n + H_n) = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.26b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \{A_m(\mu-1)a_{01} + B_m(\mu-1)a_{02} + C_m[2\mu a_{02} + (\mu-1)a_{03}] \\ & + D_m[2\mu a_{01} + (\mu-1)a_{04}]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} \\ & + 2G_0 + 6H_0 a = 0 \quad (n=0) \end{aligned} \quad (1.27a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \{A_m(\mu-1)a_{n1} + B_m(\mu-1)a_{n2} + C_m[2\mu a_{n2} + (\mu-1)a_{n3}] \\ & + D_m[2\mu a_{n1} + (\mu-1)a_{n4}]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} \\ & + \beta^2 \{E_n(1-\mu) \operatorname{sh} \beta a + F_n(1-\mu) \operatorname{ch} \beta a + G_n[2 \operatorname{ch} \beta a + (1-\mu) \beta a \operatorname{sh} \beta a] \\ & + H_n[2 \operatorname{sh} \beta a + (1-\mu) \beta a \operatorname{ch} \beta a]\} = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.27b)$$

式(1.26a)、式(1.27a)中的 a_{01} , a_{02} , a_{03} , a_{04} 即为 $n=0$ 时的 a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} , a_{n4} 。

由式(1.12)得:

$y=0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha^2 [B_m(1-\mu) + 2C_m] \sin \frac{m\pi}{2a} x + \mu(2G_0 + 6H_0 x) \\ & + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2 \{E_n(\mu-1) \operatorname{sh} \beta x + F_n(\mu-1) \operatorname{ch} \beta x + G_n[2\mu \operatorname{ch} \beta x + (\mu-1) \beta x \operatorname{sh} \beta x] \\ & + H_n[2\mu \operatorname{sh} \beta x + (\mu-1) \beta x \operatorname{ch} \beta x]\} = -\frac{q\mu}{2D} (x^2 - 2ax + a^2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$y=b$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha^2 \{A_m(1-\mu) \operatorname{sh} ab + B_m(1-\mu) \operatorname{ch} ab + C_m[2 \operatorname{ch} ab + (1-\mu) ab \operatorname{sh} ab] \\ & + D_m[2 \operatorname{sh} ab + (1-\mu) ab \operatorname{ch} ab]\} \sin \frac{m\pi}{2a} x + \mu(2G_0 + 6H_0 x) \\ & + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2 \{E_n(\mu-1) \operatorname{sh} \beta x + F_n(\mu-1) \operatorname{ch} \beta x + G_n[2\mu \operatorname{ch} \beta x + (\mu-1) \beta x \operatorname{sh} \beta x] \\ & + H_n[2\mu \operatorname{sh} \beta x + (\mu-1) \beta x \operatorname{ch} \beta x]\} \cos n\pi = -\frac{q\mu}{2D} (x^2 - 2ax + a^2) \end{aligned} \quad (1.29)$$

利用式(1.4)的正交性, 将非三角函数在 $[0, a]$ 区间上展成下列三角级数:

$$\operatorname{sh} \beta x = \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m1} \sin \frac{m\pi}{2a} x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m1} \sin ax \quad (1.30)$$

$$\operatorname{ch} \beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m2} \sin ax \quad (1.31)$$

$$\beta x \operatorname{sh} \beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m3} \sin ax \quad (1.32)$$

$$\beta x \operatorname{ch} \beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m4} \sin ax \quad (1.33)$$

$$x^2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m2} \sin \alpha x \quad (1.34)$$

$$x = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m1} \sin \alpha x \quad (1.35)$$

$$x^0 = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m0} \sin \alpha x \quad (1.36)$$

其中

$$b_{m1} = \frac{2\beta \operatorname{ch} \beta a \sin(m\pi/2)}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (1.37)$$

$$b_{m2} = \frac{2(\alpha + \beta \operatorname{sh} \beta a \sin(m\pi/2))}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (1.38)$$

$$b_{m3} = \frac{2\beta^2 \operatorname{ch} \beta a \sin(m\pi/2)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\beta(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh} \beta a \sin(m\pi/2) - 4\alpha\beta^2}{a(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (1.39)$$

$$b_{m4} = \frac{2\beta^2 \operatorname{sh} \beta a \sin(m\pi/2)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\beta(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch} \beta a \sin(m\pi/2)}{a(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (1.40)$$

$$d_{m2} = \frac{4}{\alpha^2} \left[-\frac{2}{m\pi} + \sin \frac{m\pi}{2} \right] \quad (1.41)$$

$$d_{m1} = \frac{2}{\alpha^2 a} \sin \frac{m\pi}{2} \quad (1.42)$$

$$d_{m0} = \frac{2}{\alpha a} \quad (1.43)$$

将式(1.30)~式(1.36)代入式(1.28)、式(1.29)中, 调换 n 和 m 的求和次序, 比较级数各项, 有

$$\begin{aligned} & \alpha^2 [B_m(1-\mu) + 2C_m] + 2\mu G_0 d_{m0} + 6\mu H_0 d_{m1} \\ & + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2 \{E_n(\mu-1)b_{m1} + F_n(\mu-1)b_{m2} + G_n[2\mu b_{m2} + (\mu-1)b_{m3}] \\ & + H_n[2\mu b_{m1} + (\mu-1)b_{m4}]\} \\ & = -\frac{q\mu}{2D} (d_{m2} - 2ad_{m1} + a^2 d_{m0}) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \{A_m(1-\mu) \operatorname{sh} ab + B_m(1-\mu) \operatorname{ch} ab + C_m[2\operatorname{ch} ab + (1-\mu)ab \operatorname{sh} ab] \\ & + D_m[2\operatorname{sh} ab + (1-\mu)ab \operatorname{ch} ab]\} + 2\mu G_0 d_{m0} + 6\mu H_0 d_{m1} \\ & + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2 \{E_n(\mu-1)b_{m1} + F_n(\mu-1)b_{m2} + G_n[2\mu b_{m2} + (\mu-1)b_{m3}] \\ & + H_n[2\mu b_{m1} + (\mu-1)b_{m4}]\} \cos n\pi \\ & = -\frac{q\mu}{2D} (d_{m2} - 2ad_{m1} + a^2 d_{m0}) \end{aligned} \quad (1.45)$$

由式(1.13)得:

$y=0$ 时, 有

$$A_m(\mu-1) + D_m(\mu+1) = 0 \quad (1.46)$$

$y=b$ 时, 有

$$\begin{aligned} & A_m(\mu-1) \operatorname{ch} ab + B_m(\mu-1) \operatorname{sh} ab + C_m[(\mu+1) \operatorname{sh} ab + (\mu-1)ab \operatorname{ch} ab] \\ & + D_m[(\mu+1) \operatorname{ch} ab + (\mu-1)ab \operatorname{sh} ab] = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

式(1.14a,b)、式(1.15a,b)、式(1.26a,b)、式(1.27a,b)、式(1.44)、式(1.45)、式(1.46)、式(1.47)组成一组以待定常数为未知量的线性方程组。计算时 W 表达式中二个级数取的项数要相同,即当第一个级数取 $m=1, 3, 5$ 前三项时,第二个级数也要取 $n=0, 1, 2, \dots$ 前三项。当级数取前 K 项时,有 $8K$ 个待定常数,由该线性方程组可建立 $8K$ 个方程,便可求出全部待定常数。

算例 悬臂正方形板($a=b$), 均布荷载 q 作用, $\mu=0.3$, 表1列出图2中各点的挠度系数(挠度单位为 qa^4/D), 并与已有结果及有限元的结果进行比较。表中 K 为级数的取项数。结果表明: 当级数取第一项时本文结果已相当精确, 而文献[2]的解是在引入广义简支边的基础上叠加五部分挠度, 且各系数取24项时的计算值, 文献[3]的解是级数取前9项时的计算值。

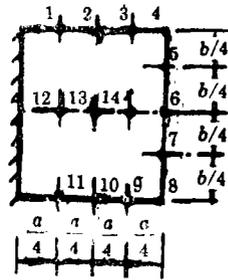


图 2

表1 挠度系数 (单位 qa^4/D)

计算点	本 文 结 果			文献[2]解	文献[3]解	有限元解
	$K=1$	$K=2$	$K=3$			
$W(1)$	0.01231	0.01133	0.01159	0.01195	0.01182	0.01176
$W(2)$	0.04288	0.04254	0.04319	0.04433	0.04334	0.04330
$W(3)$	0.08224	0.08380	0.08411	0.08505	0.08408	0.08406
$W(4)$	0.1247	0.1275	0.1272	0.1293	0.1273	0.1273
$W(5)$	0.1274	0.1289	0.1287	0.1306	0.1286	0.1286
$W(6)$	0.1283	0.1295	0.1292	0.1310	0.1291	0.1291
$W(12)$	0.01365	0.01407	0.01380			0.01380
$W(13)$	0.04536	0.04610	0.04591			0.04587
$W(14)$	0.08549	0.08647	0.08628			0.08621

由于对称, $W(11), W(10), W(9), W(8), W(7)$ 分别与 $W(1), W(2), W(3), W(4), W(5)$ 相等。

二、悬臂板在角点处作用单位力的弯曲解

在悬臂矩形板的自由角点 C 处作用向下(设与 q 同向)的单位力, 挠度 W 应满足下列平衡微分方程及角点条件:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_c = -2D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=0} = 1 \quad (2.2)$$

$$R_b = -2D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0 \quad (2.3)$$

现设 $W = W_1 + W_2$, W_1 为方程(2.1)的通解, 仍取式(1.3)表达式, W_2 为其特解, 取

$$W_2 = \frac{3x(y-b)^2 + (\mu-2)x^3}{12Db(1-\mu)} + \frac{ax^2}{Db} \quad (2.4)$$

W 满足式(2.1)、式(2.2)、式(2.3)的要求,其待定常数 N_1 仅由边界条件确定.与悬臂矩形板作用均布荷载的情况相比,求解待定常数的线性方程组左端系数项不变,而右端的常数项要由新的特解确定, W_2 的式(2.4)满足下列边界条件:

$$x=0 \text{ 时: } W_2=0$$

$$x=a \text{ 时: } \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \text{ 时} \\ y=b \text{ 时} \end{array} \right\} \frac{\partial^3 W_2}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial y \partial x^2} = 0$$

因此,线性方程组中式(1.14a,b)、式(1.15a,b)、式(1.27a,b)、式(1.46)、式(1.47)保持不变,式(1.26a,b)变为:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha (A_m a_{01} + B_m a_{02} + C_m a_{03} + D_m a_{04}) + E_0 \\ &= - \frac{C_{02} - 2bC_{01} + b^2 C_{00}}{4Db(1-\mu)} \quad (n=0) \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha (A_m a_{n1} + B_m a_{n2} + C_m a_{n3} + D_m a_{n4}) + \beta (E_n + H_n) \\ &= - \frac{C_{n2} - 2bC_{n1} + b^2 C_{n0}}{4Db(1-\mu)} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.5b)$$

式中 C_{02} , C_{01} , C_{00} 即为 $n=0$ 时的 C_{n2} , C_{n1} , C_{n0} ; C_{n2} , C_{n1} , C_{n0} 分别为 y^2 , y , y^0 在 $[0, b]$ 区间上展成下列三角级数时的展开系数,即:

$$y^2 = \sum_{n=0,1,2,\dots} C_{n2} \cos \beta y \quad (2.6)$$

$$y = \sum_{n=0,1,2,\dots} C_{n1} \cos \beta y \quad (2.7)$$

$$y^0 = \sum_{n=0,1,2,\dots} C_{n0} \cos \beta y \quad (2.8)$$

其中

$$C_{n2} = \begin{cases} \frac{b^2}{3} & (n=0) \\ \frac{4}{\beta^2} \cos n\pi & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$C_{n1} = \begin{cases} \frac{b}{2} & (n=0) \\ \frac{2}{b} \frac{1}{\beta^2} (\cos n\pi - 1) & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$C_{n0} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.11)$$

式(1.44)、式(1.45)分别变为:

$$\alpha^2[B_m(1-\mu) + 2C_m] + 2\mu G_0 d_{m0} + 6\mu H_0 d_{m1} + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2\{E_n(\mu-1)b_{m1} + F_n(\mu-1)b_{m2} + G_n[2\mu b_{m2} + (\mu-1)b_{m3}] + H_n[2\mu b_{m1} + (\mu-1)b_{m4}]\} = -\frac{1+\mu(\mu-2)}{2Db(1-\mu)}d_{m1} - \frac{a\mu}{Db}d_{m0} \quad (2.12)$$

$$\alpha^2\{A_m(1-\mu)shab + B_m(1-\mu)chab + C_m[2chab + (1-\mu)abshab] + D_m[2shab + (1-\mu)abchab]\} + 2\mu G_0 d_{m0} + 6\mu H_0 d_{m1} + \sum_{n=1,2,\dots} \beta^2\{E_n(\mu-1)b_{m1} + F_n(\mu-1)b_{m2} + G_n[2\mu b_{m2} + (\mu-1)b_{m3}] + H_n[2\mu b_{m1} + (\mu-1)b_{m4}]\} = -\frac{1+\mu(\mu-2)}{2Db(1-\mu)}d_{m1} - \frac{a\mu}{Db}d_{m0} \quad (2.13)$$

算例 悬臂正方形板($a=b$), 在自由角点C处作用向下(设与 q 同向)的单位力, $\mu=0.3$, 表2列出图2中各点的挠度系数, 并与有限元的结果进行比较, 同样可以看出本文方法收效快、计算精度高的特点. 其中 $W(11)$ 由于挠度较小, 数值收敛稍慢, 但当 $K=4$ 时, $W(11)=0.008869(a^2/D)$, $K=5$ 时, $W(11)=0.009062(a^2/D)$, 即与有限元的计算结果 $0.009042(a^2/D)$ 相接近.

表2 挠度系数 (单位 a^2/D)

计算点	本文结果			有限元结果
	$K=1$	$K=2$	$K=3$	
$W(1)$	0.0715	0.04270	0.04283	0.04286
$W(2)$	0.1931	0.1549	0.1569	0.1567
$W(3)$	0.3513	0.3142	0.3152	0.3139
$W(4)$	0.5309	0.4982	0.4961	0.4935
$W(5)$	0.4242	0.4084	0.4082	0.4050
$W(6)$	0.3277	0.3298	0.3305	0.3294
$W(7)$	0.2456	0.2663	0.2662	0.2688
$W(8)$	0.1738	0.2157	0.2144	0.2193
$W(9)$	0.08345	0.1257	0.1260	0.1274
$W(10)$	0.01452	0.05160	0.05248	0.05290
$W(11)$	0.01778	0.007800	0.008432	0.009042
$W(12)$	0.02930	0.02999	0.02952	0.02953
$W(13)$	0.1049	0.1061	0.1058	0.1057
$W(14)$	0.2102	0.2118	0.2116	0.2114

三、原结构在均布荷载作用下的弯曲

由悬臂板在角点C处挠度为零的条件可求出角点C支承反力 R 为: 当 $K=1$ 时, $R=-0.2349qa^2$; $K=2$ 时, $R=-0.2559qa^2$; $K=3$ 时, $R=-0.2564qa^2$, R 为负值表示反力方向与假设方向相反. 原结构在均布荷载作用下的挠度值即等于悬臂板在均布荷载作用下的挠度与悬臂板在单位角点力作用下的挠度乘以角点反力后的代数和, 见表3所示. 表3中的有限元结果是直接对原结构进行计算的结果, 与本文结果很接近, 表明本文方法是合理的.

本文所提的叠加方法概念清晰, 计算收敛快, 这种方法具有一定的普遍性, 它还可以解决二邻边支承(或为固定边, 或为简支边)、二邻边自由且有角点支承的矩形板在均布荷载

作用下的弯曲。

表3 挠度系数 (单位 qa^4/D)

计算点	本文结果			有限元结果
	$K=1$	$K=2$	$K=3$	
$W(1)$	-0.00449	0.00402	0.00061	0.00071
$W(2)$	-0.00247	0.00290	0.00296	0.00288
$W(3)$	-0.00027	0.00339	0.00329	0.00310
$W(4)$	0	0	0	0
$W(5)$	0.02776	0.02438	0.02404	0.02416
$W(6)$	0.05133	0.04510	0.04446	0.04415
$W(7)$	0.06971	0.06075	0.06045	0.05927
$W(8)$	0.08388	0.07230	0.07223	0.07073
$W(9)$	0.06264	0.05163	0.05180	0.05121
$W(10)$	0.03947	0.02933	0.02973	0.02965
$W(11)$	0.00813	0.00933	0.00943	0.00943
$W(12)$	0.00677	0.00639	0.00623	0.00619
$W(13)$	0.02072	0.01895	0.01878	0.01860
$W(14)$	0.03612	0.03227	0.03203	0.03169

参 考 文 献

- [1] S. 铁摩辛柯, S. 沃诺斯基著, 《板壳理论》, 科学出版社(1977).
 [2] 张福范, 《弹性薄板》(第二版), 科学出版社(1984).
 [3] 林小松、袁文伯, 用双向三角级数法解悬臂矩形薄板在均布荷载下的弯曲, 应用数学和力学, 6(8) (1985), 735—744.

Bending Solution of a Rectangular Plate with One Edge Built-in and One Corner Point Supported Subjected to Uniform Load

Xu Qilou

(Zhengzhou Institute of Technology, Zhengzhou 450002, P. R. China)

Ji Tonggeng

(Survey and Design Institute, He'nan Provincial Communications Planning, Zhengzhou 450052, P. R. China)

Abstract

In this paper, using of the superposition principle, the bending solution of rectangular plate with one edge built-in and one corner point supported subjected to uniform load is derived. The results indicate the method has the advantages of rapid convergence and high precision.

Key words bending of elastic plate, rectangular plate, uniform load