

裂纹面任意点受反平面集中力时裂纹 线场的弹塑性分析

吴承平¹ 王 成¹

(1995年9月14日收到)

摘 要

本文采用线场分析方法, 对理想弹塑性Ⅲ型裂纹无限板, 在裂纹面上任意点受一对集中力的情形, 进行弹塑性分析。本文的分析完全放弃了小范围屈服条件, 其结果在裂纹线附近足够精确。

关键词 Ⅲ型裂纹 线场分析 弹塑性 反平面 集中力

一、前 言

文[1,2]采用线场分析方法, 对理想弹塑性Ⅲ型加载下的经典裂纹问题(即具有中心穿透裂纹的无限大板受到远场面外均匀剪切作用), 进行了成功的分析。文[1,2]的分析完全放弃了通常的小范围屈服假定, 得出了不受小范围屈服条件限制的, 在裂纹线附近足够精确的弹塑性解答, 这些解答不仅适用于塑性区较小的情形, 而且也适用于塑性区不断增大的情形。

本文将对理想弹塑性材料的中心裂纹无限板, 裂纹面任意点受一对反平面集中力时, 裂纹线附近的应力场和变形场进行分析。由于该问题在实际工程中经常遇见, 也便于实验研究, 因而对该问题的研究具有重要的理论意义和实际意义。

本文的分析方法与文[1,2]类似, 完全放弃小范围屈服条件, 且不附加任何其它近似假定, 其结果在裂纹线附近足够精确。但是, 我们发现本文的分析得出的结果与文[1,2]不同, 即得出了一些不同于Ⅲ型加载下经典裂纹问题的一些重要特性。

二、基本方程

图1所示为理想弹塑性Ⅲ型裂纹无限板, 裂纹面任意点受一对反平面集中力的问题, 不为零的应力分量和位移分量分别为 τ_{xz} , τ_{yz} 和 w 。

平衡微分方程和屈服条件分别为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

¹ 重庆交通学院, 重庆 630074

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (2.2)$$

其中 k 为剪切屈服极限。

应变定义为

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3a, b)$$

弹塑性理论的应力应变关系为

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} + \lambda \tau_{xz} \quad (2.4a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} + \lambda \tau_{yz} \quad (2.4b)$$

式中 G 为剪切弹性模量, λ 为塑性因子。

三、裂纹线附近的应力变形场

对图 1 所示 III 型裂纹无限板在裂纹面任意点受一对集中力的问题, 采用复变函数解法, 选取 Westergaard 应力函数为

$$Z_{\text{I}}(z) = \frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi(z-b)\sqrt{z^2-a^2}} \quad (3.1)$$

则弹性应力分量为

$$\tau_{xz} = \text{Im} Z_{\text{I}}'(z) \quad (3.2a)$$

$$\tau_{yz} = \text{Re} Z_{\text{I}}'(z) \quad (3.2b)$$

此解满足弹性理论的基本方程, 并且也满足裂纹面的边界条件及远离裂纹点的远场边界条件, 因此, 解 (3.2a, b) 即为该问题弹性应力场的精确解。此解无限趋于裂纹尖端邻域的主项 ($r \rightarrow 0$ 的解), 即为通常的裂纹线弹性奇异 K 场 (亦即应力强度因子场)。

本文不再按小范围屈服理论将应力强度因子 K 场作为塑性区外的弹性应力场, 而是采用线场分析方法, 将弹性应力场 (3.2a, b) 按小 θ 的幂级数展开到裂纹线附近, 然后与塑性区的应力场在弹塑性边界上进行匹配。

将式 (3.2a, b) 按小 θ 的幂级数展开到裂纹线附近则为

$$\tau_{xz} = -\frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi(a-b+r)\sqrt{r(2a+r)}} \left(\frac{r}{a-b+r} + \frac{a+r}{2a+r} \right) \theta + O(\theta^3) \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi(a-b+r)\sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[\frac{a+2r}{2(2a+r)} - \frac{3}{2} \frac{(a+r)^2}{(2a+r)^2} + \frac{r}{2(a-b+r)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r^2}{(a-b+r)^2} - \frac{r(a+r)}{(a-b+r)(2a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4) \end{aligned} \quad (3.3b)$$

式 (3.3a, b) 在裂纹线附近 $r \rightarrow 0$ 至 $r \rightarrow \infty$ 的邻域是精确的。

在裂纹线附近的塑性区内 ($0 < x \leq r_0$, $y/x \ll 1$), 各场量可展为

$$\tau_{xz} = \tau_1(x)y + O(y^3) \quad (3.4a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_0(x) + \tau_2(x)y^2 + O(y^4) \quad (3.4b)$$

$$\lambda = \lambda_0(x) + \lambda_2(x)y^2 + O(y^4) \quad (3.5)$$

$$w = w_1(x)y + O(y^3) \quad (3.6)$$

这里我们已经考虑了 τ_{yz} 和 λ 关于 $y=0$ 的对称性及 τ_{xz} 和 w 关于 $y=0$ 的反对称性。将式 (3.4)

~(3.6)代入基本方程(2.1)~(2.4),按 y 的同次幂系数相等可得一组方程,解此方程组求得 τ_0, τ_1, τ_2 及 w_1 的具体表达式,然后将其代回式(3.4)~(3.6),则得塑性区的应力和位移分量为

$$\tau_{xz} = -\frac{k}{x+L}y + O(y^3) \tag{3.7a}$$

$$\tau_{yz} = k - \frac{k}{2(x+L)^2}y^2 + O(y^4) \tag{3.7b}$$

$$w = \frac{C}{x+L}y + O(y^3) \tag{3.8}$$

式中 L, C 为积分常数.显然式(3.7a, b)、(3.8)即为裂纹线附近塑性区应力场和位移场的通解.塑性场通解的全场形式虽然很难求得,但它在裂纹线附近 θ 的幂级数形式却容易求得,式(3.7a, b), (3.8)中已略去了 y^3 以上的无穷小量.

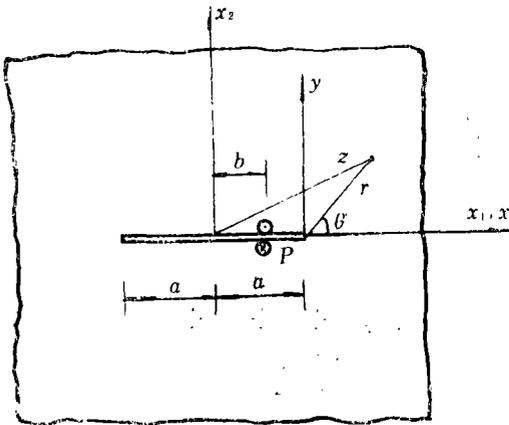


图1 中心裂纹无限板裂纹面任意点受一对反平面集中力

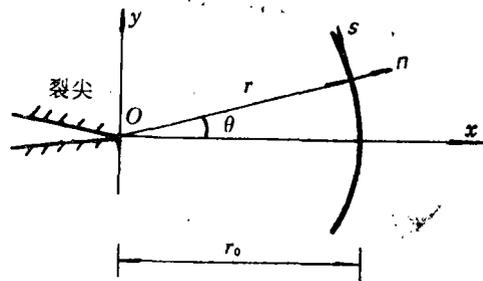


图2 裂纹线附近的弹塑性边界

四、裂纹线附近弹塑性边界上的匹配结果

我们将塑性场的通解式(3.7a, b)和(3.8)与弹性场的精确解(3.3a, b)式在裂纹线附近的弹塑性边界上进行匹配.裂纹线附近的弹塑性边界定义为 $r=r_s(\theta)$,如图2所示.由 $r_s(\theta)$ 关于裂纹线的对称性,对于一个小 θ ,有

$$r_s(\theta) = r_0 + r_2\theta^2 + O(\theta^4) \tag{4.1}$$

由此可得弹塑性边界上任意一点的单位法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为

$$n_x = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{r_2}{r_0}\right)\theta^2 + O(\theta^4) \tag{4.2a}$$

$$n_y = \left(1 - 2\frac{r_2}{r_0}\right)\theta + O(\theta^3) \tag{4.2b}$$

在弹塑性边界上有

$$x = r_0 + r_0\left(\frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2}\right)\theta^2 + O(\theta^4) \tag{4.3b}$$

$$y = r_0\theta + O(\theta^3) \tag{4.3b}$$

将弹性场(3.3a, b)式和塑性场(3.7a, b)式匹配并利用(4.1)~(4.3)式, 分别求出其在弹塑性边界上应力的法向分量和切向分量。由弹塑性边界上法向应力和切向应力分量的连续性, 比较等式两端 θ 同次幂的系数得

$$\frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi(a-b+r_0)\sqrt{r_0(2a+r_0)}} = k \quad (4.4)$$

$$\frac{r_0}{a-b+r_0} + \frac{a+r_0}{2a+r_0} = \frac{r_0}{r_0+L} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_0} \cdot \frac{a^2+4ar_0+2r_0^2-b(a+r_0)}{(2a+r_0)(a-b+r_0)} - \frac{a}{2(2a+r_0)} + \frac{3}{2} \frac{(a+r_0)^2}{(2a+r_0)^2} \\ - \frac{r_0}{2(a-b+r_0)} + \frac{r_0^2}{(a-b+r_0)^2} + \frac{br_0}{(a-b+r_0)(2a+r_0)} \\ = \frac{r_0^2}{2(r_0+L)^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

求解式(4.4)~(4.6)可得到 r_0 、 L 和 r_2/r_0 。引入两个无量纲变数 $\xi=r_0/a$ 和 $\eta=b/a$, 式(4.4)~(4.6)可写为

$$(1-\eta+\xi)\sqrt{\xi(2+\xi)} = \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\pi} \left(\frac{P}{2ak} \right) \quad (4.7)$$

$$L = \frac{(1-\eta-\xi-\xi^2)\xi}{(1-\eta+\xi)(1+\xi)+\xi(2+\xi)} \cdot a \quad (4.8)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\xi}{2} \left[\frac{1}{(2+\xi)^2} + \frac{1-\eta}{(1-\eta+\xi)^2} \right] \cdot \frac{(1-\eta+\xi)(2+\xi)}{(1-\eta+\xi)(1+\xi)+\xi(2+\xi)} \quad (4.9)$$

至此, 我们已确定了沿裂纹线塑性区的尺寸 r_0 (或 ξ), 塑性区应力及位移场(3.7a, b)式和(3.8)式中的积分常数 L 。将式(4.9)代入式(4.2a, b)即可得出裂纹线附近弹塑性边界的单位法向量, 由此可以估计塑性区的形状。

利用弹性区位移与塑性区位移在弹塑性边界上的连续可得式(3.8)中的积分常数 C 为

$$C = \frac{k}{G} (r_0+L) \quad (4.10)$$

于是得出塑性区内的应变为

$$\gamma_{xz} = -\frac{k}{G} \frac{r_0+L}{(x+L)^2} \cdot y + O(y^3) \quad (4.11a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{k}{G} \cdot \frac{r_0+L}{x+L} + O(y^2) \quad (4.11b)$$

五、结论与讨论

1. 本文的分析完全放弃了小范围屈服理论的所有近似假定, 并且不再附加任何其他近似假定, 因而本文的结果在裂纹线附近是足够精确的。

2. 虽然本文分析方法与文[1, 2]类似, 但本文结果与此二文有一些重要差别。文[1, 2]分析的Ⅲ型经典问题, 当外载 τ 由零不断增大时, L 会不断增大, 因而其在裂纹线上的应力和应变不存在奇异性。而本文研究的裂纹面任意点受一对集中力的情形, 当 $\xi=(\sqrt{5-4\eta}-1)/2$ 时, 即 $P/2a=mk$ 时, $L=0$, 式中 m 为下式

$$m = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} (\sqrt{5-4\eta} - 2\eta + 1)^{3/2} / \sqrt{1-\eta^2} \quad (5.1)$$

此时若 $x \rightarrow 0$, 裂尖塑性区应力及应变将趋于无限大, 即存在奇异性。而当 $P/2a = mk$ 时, 裂尖应力及应变将成为负值, 这是不符合实际的。因此, 为了保证裂尖应变不存在奇异性且不为负值, 必须 $P/2a < mk$ 。

3. 从上面分析可以认为 $P/2a = mk$ 为一临界值, 当 $P/2a > mk$ 时, 裂纹已不可能处于静止状态, 裂纹很可能已起裂扩展或失稳扩展。此时裂纹前缘沿裂纹线塑性区尺寸的最大值为

$$(r_0)_{\max} = \frac{1}{2} (\sqrt{5-4\eta} - 1)a \quad (5.2)$$

特别地, 当 $\eta = 0$ (集中力位于裂纹面中点) 时, $(r_0)_{\max} = 0.618a$ 。

4. 式(4.7)表示反平面集中力位于不同位置 (即不同 $\eta = b/a$) 时, 裂纹线塑性区尺寸 r_0 随 P 的变化关系, 如图 3 所示。图中虚线为各条曲线的包络线, 式(5.1)即为该包络线的包络方程。

5. 从(4.2)式结合(4.9)式可以推知, 当荷载 $P \ll 1$, 即 P 很小时, 塑性区形状近似为圆形, 但随着荷载的增大 (包括 η 不变时 P 的增大和 P 不变时 η 的增大), 塑性区沿 y 方向的变化大于沿 x 方向的变化。这一点与文[1, 2]的结果差别较大。

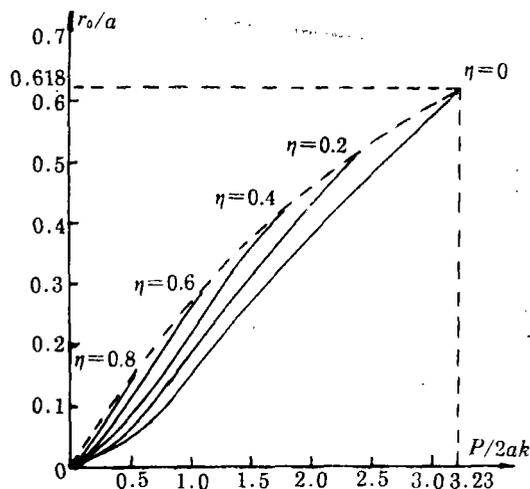


图3 在不同 b/a 值下 r_0 随 P 的变化曲线

参 考 文 献

- [1] Yi Zhijian, The most recent solutions of near crack line field for mode II cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 47(1) (1994), 147--155.
- [2] 易志坚, 理想弹塑性 II 型扩展裂纹的全新和精确分析, *应用数学和力学*, 14(4) (1993), 327--333.

Near Crack Line Elastic-Plastic Analysis for a Crack Loaded by Antiplane Point Forces

Wu Chengping Wang Cheng

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 630074, P. R. China)

Abstract

In this paper, the improved near crack line analysis method proposed in Refs. [1] and [2] is used to investigate a mode III crack loaded by antiplane point forces in an infinite plate in an elastic-perfectly plastic solid. The solutions of this paper are sufficiently precise near the crack line region because the assumptions of the small scale yielding theory have not been used and no other assumptions have been taken.

Key words mode III crack, near crack line analysis, elastic-plastic, antiplane, point forces