

# 不相混流体在多孔介质中置换 不稳定现象的三维数值模拟

谭小苹<sup>1</sup> 裴觉民<sup>1</sup> 陈君楷<sup>1</sup>

(康振黄推荐, 1995年7月2日收到)

## 摘 要

本文采用不连续势函数在特定界面上变化的方法模拟不相混流体在多孔介质中置换。描述流体在多孔介质中的流动连续方程在三维直角坐标系下被转化为七点式代数方程。采用强隐式法(Strongly implicit procedure)求解,再确定变动的流体间界面。计算中只模拟从稳定向不稳定置换转化这一过程中界面的变动。计算中考虑了多孔介质的浸润特性、毛细管压力、及多孔介质渗透不均匀性。

**关键词** 不相混流体 界面运动 多孔介质 不稳定

## 一、引 言

不相混流体在多孔介质中置换广泛应用在强化石油开采中。其界面的稳定性问题一直为人们所关注,因此它关系到石油的铲除效率。因而无论从理论分析方面,还是从实验角度,都有不少人探索界面不稳定现象产生的条件及不稳定界面的形态发展特性。在理论分析方面,Scheidegger从最少能量角度得出,只要 $M = (\kappa_{wor}/\mu_w)/(\kappa_{oiw}/\mu_o) > 1$  (其中 $\kappa_{wor}$ 为水在残留有油的多孔介质中的渗透系数, $\kappa_{oiw}$ 为油在含水多孔介质中的渗透系数),指进就会发生<sup>[1]</sup>。Saffiman和Talor首先运用线性扰动理论得出不稳定时的临界置换速度<sup>[2]</sup>,以后Chuoque等人<sup>[3]</sup>又改进了Saffiman的工作,笔者的实验表明置换速度远大于临界速度,界面仍稳定,临界波长也仅是理论上的一种探讨。线性稳定理论能指出在某些条件下不稳定现象可能发生,而不能指出不稳定现象怎样发生。Outman<sup>[4]</sup>认为用非线性的方法描述指进的发展更为合适。Chikhliwala<sup>[5]</sup>提出了弱非线性非稳定分析,在不考虑重力的条件下研究了粘性指进的初期变化。在模拟粘性指进方面Fagers、Odeh等提出了经验模型,而不考虑控制方程。近些年来, Monte Carlo求解技术用于模拟两相流动。隐格式的压力方程用一般方法求解,而置换流体的饱和度随时间的变化则表达为概率密度函数。Hughes等<sup>[6,7]</sup>发表了模拟不相混及相混流体通过多孔介质的不稳定现象的文章。他们指出,由于解的概率性质,因而界面不是一个确定的位置,当饱和度高度低于置换界面时, Monte Carlo解将在数值解上发散。

1 四川联合大学西区工程力学系, 成都 610065.

从解控制方程的方法角度模拟不相混流体的不稳定置换多在 Hele-shaw 小室这样的物理模型下。Hele-shaw 小室为两块非常近的平行玻璃板, 研究在缝隙中一相流体对另一相流体置换中的不稳定。这样问题被简化为二维流动, 且不存在多孔介质及其均匀性问题<sup>[8]</sup>。由于多孔介质中不稳定界面无论从物理角度中去描述, 还是从数学角度去求解都有一些待解决的问题, 因而目前还没有完全靠解控制方程去模拟不相混流体在多孔介质中不稳定置换的报导。本文采用有限差分方法, 将实验室里水置换多孔介质中熔融石蜡中的某些实验参数, 用于计算不稳定界面产生的过程, 模拟到水穿透之前, 计算作为三维问题处理。毛细管压力、多孔介质的浸润特性及介质渗透不均匀性在计算中给予考虑。

## 二、控制方程及边界条件

### 1. 物理现象的描述

在立方柱体的多孔介质中首先注满液体 2 (如熔融石蜡), 然后从柱体的一端注入不相混流体 1 (如水), 这样柱体的另一端将有液体 2 流出。界面运动速度即为流体 1 对液体 2 的置换速度。运动界面的大形态受流体在柱形多孔介质中的分布及柱体内各渗透参数的影响。其微观形态则与多孔介质颗粒度大小及分布, 多孔介质的排列情况, 二相流体对多孔介质的浸润特性等因素有关。实验表明, 如果多孔介质中不含原生水, 在油浸润及不稳定置换条件下, 界面的过渡区很窄, 可把界面看成是两种流体截然分开的清晰界面。

### 2. 控制方程

上述置换过程沿  $z$  方向进行, 运动看成是无旋流, 则这两种流体存在势函数

$$\phi_i = p_i + \rho_i g z \quad (2.1)$$

其中  $i=1$  表示置换流体,  $i=2$  表示被置换流体。将 Darcy 定律推广至三维, 在直角坐标系下, 这两种流体的连续方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\kappa_{i1}}{\mu_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\kappa_{i2}}{\mu_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\kappa_{i3}}{\mu_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.2)$$

其中  $\kappa_{i1}, \kappa_{i2}, \kappa_{i3}$  分别表示流体  $i$  在  $x, y, z$  方向上的渗透系数,  $\mu_i$  为流体的粘滞系数。

对于非渗透边界, 垂直于界面的流速为零, 所以

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = 0 \quad (x=0, x=x_n) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = 0 \quad (y=0, y=y_n) \quad (2.4)$$

势函数在进出口断面上为已知

$$\phi_i = f_1(x, y, z) \quad (z=0) \quad (2.5)$$

$$\phi_i = f_2(x, y, z) \quad (z=1) \quad (2.6)$$

流体 1, 2 之间的界面为可动边界, 其高度可表达为

$$z = \eta(x, y, t) \quad (2.7)$$

流体在界面上的连续性要求界面两边垂直于界面的速度分量相等, 则

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (2.8)$$

界面两边的势函数的关系可表达为

$$\phi_1 = \phi(\phi_2) \quad (2.9)$$

可动边界运动的描述是一个较复杂的问题, 对于可动界面  $z = \eta(x, y, t)$

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.10)$$

因为

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{-\kappa_1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = v = \frac{-\kappa_2}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = w = \frac{-\kappa_3}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

其中  $\varepsilon$  为孔隙率, 假定  $Dz/Dt = dz/dt$ , 则可动界面上的垂直方向速度可表达为

$$\frac{\kappa_3}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\kappa_1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\kappa_2}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.11)$$

方程(2.11)应用于界面两侧的流体. 该方程意味着速度从欧拉法转为拉格朗日法, 即

$$\frac{D\eta}{Dt} = -\frac{\kappa_3}{\mu \varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.12)$$

### 三、数值方法

#### 1. 控制方程及边界条件

方程(2.2)在直角坐标系下表达成有限差分形式

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_1 \alpha_{i,j,k}}{\mu_a \Delta x^2} (\phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k}) + \frac{\kappa_2 \alpha_{i,j,k}}{\mu_a \Delta y^2} (\phi_{i,j+1,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j-1,k}) \\ & + \frac{\kappa_3 \alpha_{i,j,k}}{\mu_a \Delta z^2} (\phi_{i,j,k+1} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j,k-1}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)'$$

其中  $\alpha = 1, 2$ . 在进出口边界势函数为:

$$\phi_{1i,j,1} = f_1(t) \quad (\text{进口}) \quad (2.5)'$$

$$\phi_{2i,j,N_3} = f_2(t) \quad (\text{出口}) \quad (2.6)'$$

对于不可渗透边界, 即将方程(2.3)(2.4)表达成差分形式; 对于两相流体的交界面在不考虑重力影响的条件下, 界面上的势函数存在如下关系:

$$\phi_1 - \phi_2 = p_0 \quad (3.1)$$

其中  $p_0$  为多孔介质中的毛细管压力, 根据Laplace理论,  $p_0$  可表达为

$$p_0 = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.2)$$

方程(3.2)中  $\sigma$  为两相流体间的表面张力;  $r_1$  与  $r_2$  为微观界面上的曲率半径. 对于一定孔隙率的松散沙粒, 其毛细管压力可表达为

$$p_0 = \sigma \frac{a}{d} \quad (3.2)'$$

其中  $d$  为沙的平均粒径,  $a$  为一浸润特性系数, 其值可为正值, 也可为负值. 取决与流体对松散介质的浸润特性, 如果置换流体对松散介质是浸润的, 则  $a$  为负值, 反之既然, 这样在界面上

$$\phi_{2i,j,k'} = \phi_{1i,j,k'} - \frac{\sigma a}{d} \quad (3.3)$$

流体间界面为一运动边界，它由下式确定

$$\eta_{i,j}^{t+\Delta t} = \eta_{i,j}^t - (\phi_{1,t,j,k'}^i - \phi_{2,t,j,k''}^i) \frac{K_{1,2,t,j,k}}{\mu \varepsilon \Delta z} \Delta t \quad (3.4)$$

其中  $\Delta t$  是时间步长。在  $t$  时刻， $\phi_{1,t,j,k'}^i$  是  $\phi_1$  在界面  $\eta$  上的势函数； $\phi_{2,t,j,k''}^i$  是  $\phi_2$  在  $i, j, k''$  上的值。 $\eta_{k'} = \eta_{k''} - \Delta z$ 。 $\eta$  的值可能介于  $z_k$  与  $z_{k+1}$  之间，因此  $\phi_{1,t,j,k'}$  和  $\phi_{2,t,j,k''}$  并不一定是结点上的值， $\phi_{1,t,j,k'}$  与  $\phi_{2,t,j,k''}$  的值由界面临近结点上的  $\phi$  值线性插值确定。

## 2. 模拟过程

不相容流体在多孔介质中的置换过程是一个初边值问题。在置换初始阶段，界面的初始位置是已知的。进出口处  $\phi$  为已知， $\phi_1$  和  $\phi_2$  可通过解 Laplace 方程确定。

在界面以内，松散多孔介质中既含流体 1，也含流体 2。根据实验，发现界面处流体 1, 2 的饱和度梯度很大。在界面内不远处，流体 2 的含量已达残留饱和度，这样在界面内流体 1 的渗透系数按有效渗透系数考虑，而界面外流体 2 的渗透系数按绝对渗透系数考虑。在本计算中对多孔介质不均匀性的影响，采用不均匀系数自由分布的方法。

根据有限差分方法，控制方程 (2.2) 变成七点式代数方程组。对于域内所有的结点  $(i, j, k)$ ， $i=1, 2, \dots, n_1$ ； $j=1, 2, \dots, n_2$ ； $k=1, 2, \dots, n_3$ ，可得矩阵方程

$$M\Phi = q \quad (3.5)$$

其中  $M$  为  $(n_1 \times n_2 \times n_3) \times (n_1 \times n_2 \times n_3)$  的系数矩阵；势函数在 (3.5) 式中为未知的  $(n_1 \times n_2 \times n_3)$  向量； $q$  为  $(n_1 \times n_2 \times n_3)$  的已知向量。采用强隐格式方法， $\phi$  值通过叠代得到。假定初始的  $\phi$  为  $\phi^{(1)}$ ，可有

$$\begin{aligned} r^{(n)} &= q - M\phi^{(n)} \\ MS^{(n)} &= r^{(n)} \\ \phi^{(n+1)} &= \phi^{(n)} + S^{(n)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中  $r^{(n)}$  为第  $n$  次迭代时的余值， $S^{(n)}$  为迭代修正向量。给定最大迭代次数，迭代加速因子，及临界误差值，经过若干次迭代后  $\phi_1^{(n)}$  与  $\phi_2^{(n)}$  可以确定。因此新的界面高度可由 (2.11)' 的差分方程来确定。

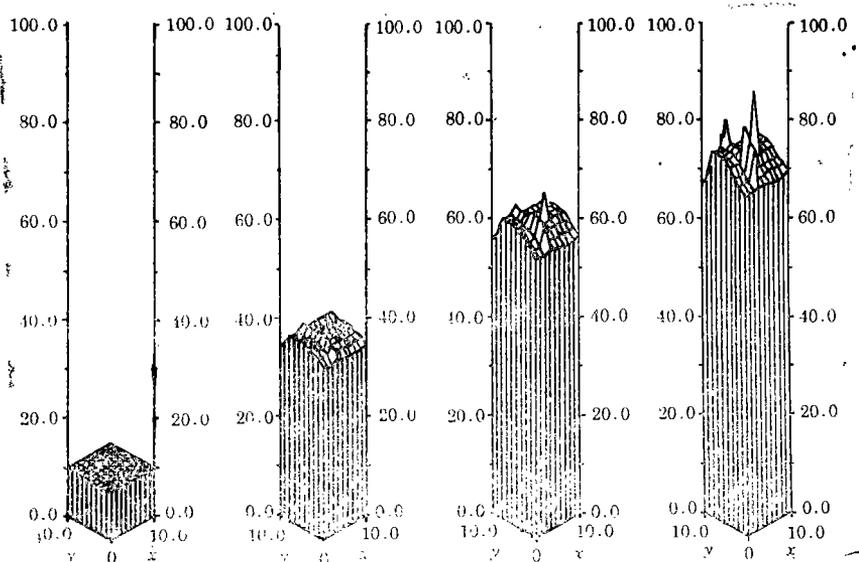


图1 界面高度变化 ( $\phi_{1a} = 168000$  多孔介质不均匀 油浸润)

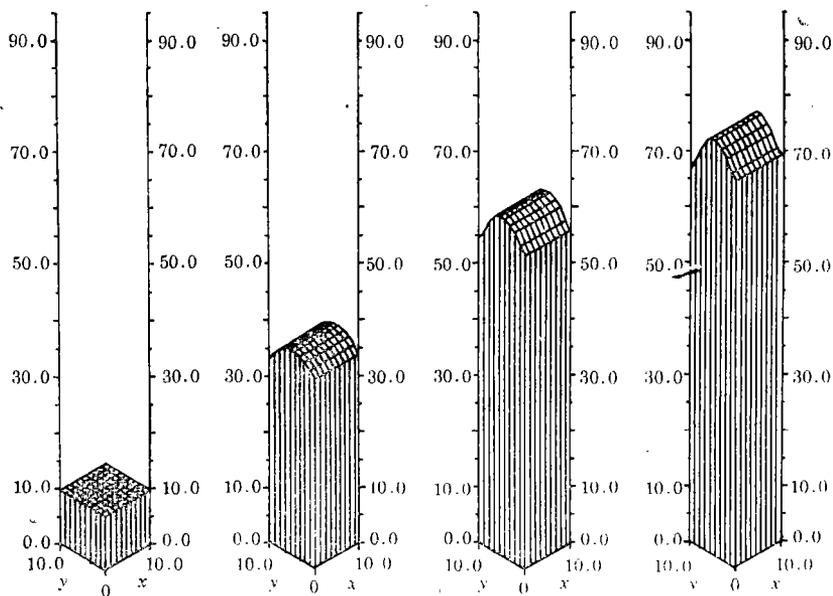


图2 界面高度变化( $\phi_{in}=168000$  多孔介质均匀 油浸润)

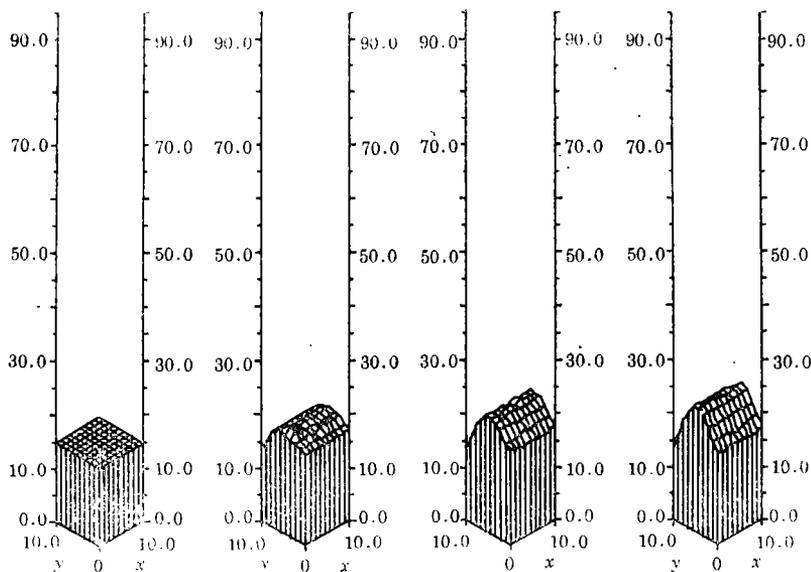


图3 界面高度变化( $\phi_{in}=20000$  多孔介质不均匀 油浸润)

整个计算进行到界面表现出大的起伏变动，即不稳定界面逐渐形成。

#### 四、计算结果

计算中进出口断面的  $\phi$  值、孔隙率、沙粒直径、置换流体与被置换流体的粘滞系数，表面张力等数据采用笔者的水在沙中的置换熔融石蜡的实验资料。多孔介质的不均匀性则根据实验经验取不均匀系数1. (均匀) 1.05, 1.03, 1.02, 0.95, 1.15, 随机分布在计算结点

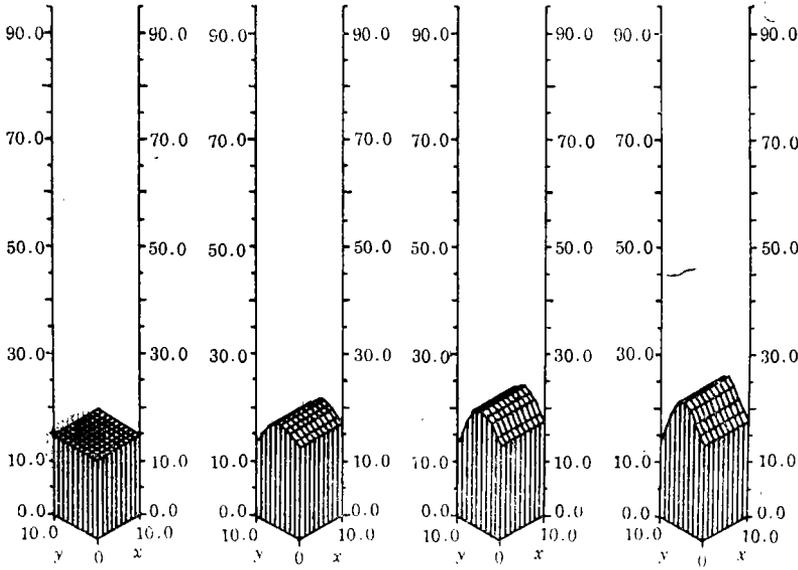


图4 界面高度变化( $\phi_{in}=20000$  多孔介质均匀 油浸润)

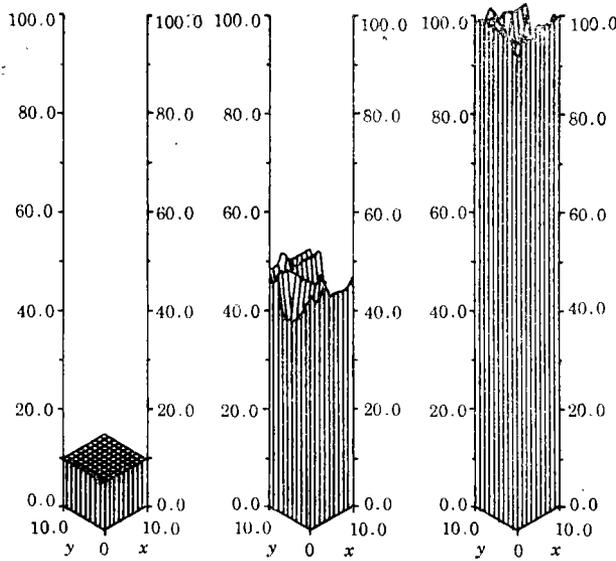


图5 界面高度变化( $\phi_{in}=168000$  多孔介质不均匀 水浸润)

上。计算中没考虑渗透系数 $k$ 值在 $x$ ,  $y$ ,  $z$ 方向的变化。

主要参数是：油的粘滞系数 $=4.44 \times 10^{-2} \text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s})$ ，水的粘滞系数 $=0.41 \times 10^{-2} \text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s})$ ，孔隙率 $\epsilon=0.41$ ，沙平均粒径 $d=0.07 \text{cm}$ ，表面张力 $=42.9 \text{dyn}/\text{cm}$ ， $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1 \text{cm}$ ， $\alpha=0.8$ ，迭代精度 $=0.06$ 。

计算分六种情况（前四种浸润条件均为油浸润）：

- (1).  $\phi_{1inlet}=168000$ ,  $\phi_{2out}=0$ ,  $\Delta t=100 \text{s}$ , 多孔介质不均匀。
- (2). 多孔介质均匀, 其余同(1)。
- (3).  $\phi_{1inlet}=20000$ ,  $\phi_{2out}=0$ ,  $\Delta t=150 \text{s}$ , 多孔介质不均匀,

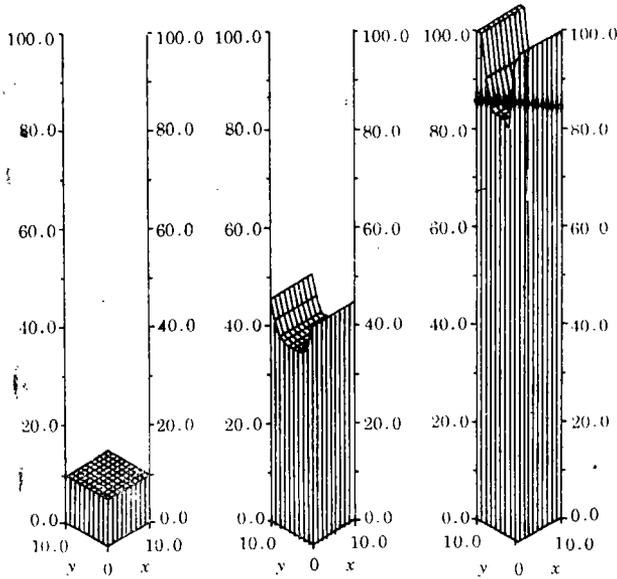


图6 界面高度变化( $\phi_{1n}=168000$ 多孔介质均匀水浸润)

- (4). 多孔介质均匀, 其余同(3).  
 (5). 同(1), 但浸润条件为水浸润.  
 (6).  $\phi_{1\text{进口}}=168000$ ,  $\phi_{2\text{出口}}=0$ ,  $\Delta t=100\text{s}$ , 多孔介质为均匀, 水浸润.  
 计算结果通过调用ALTSURE程序而画出, 如图1, 2, 3, 4, 5, 6所示.

## 五、讨 论

(1) 该计算初步反映了界面不稳定变化的过程. 计算结果表明势函数梯度(表现为置换速度)对界面稳定状况有着很大影响. 在势函数较大的情况下, 多孔介质的不均匀性诱发了界面的不稳定. 然而, 在多孔介质均匀, 在势函数梯度较大的情况下, 界面仍稳定. 在势函数梯度较小的置换中, 多孔介质的不均匀性仅引起界面数量波动, 而这种波动并未不断发展. 此外置换流体的浸润特性也对界面形状有很大影响.

(2) 界面形态稳定表现在数值计算中求解势函数时其迭代次数较少(29~40次左右). 随着界面不稳定现象的发展, 数值计算迭代次数加多, 甚至发散. 界面不稳定状况的发展, “指进”现象的形成和发展与数值计算中的不稳定有着相似之处.

(3) 本计算中在 $x$ ,  $y$ 方向边界条件的处理是相同的, 但绘图结果在 $y$ 方向上的变化并没有表达出来, 这也许与绘图程序的功能有关. 本计算的界面推进速度与实验基本一致, 但不稳定界面的形态还不可能与实验结果进行对比. 实验中指进的直径约0.7~2.5cm长左右, 而计算中 $\Delta x=\Delta y=1\text{cm}$ . 此外计算中界面的处理还须更细微. 所以该计算只是初步的.

## 参 考 文 献

- [1] A. E. Scheidegger, On the stability of displacement fronts in porous media: A discussion of the muskat aranofsky model, *Can. J. Phys.*, (1960), 153—162.  
 [2] P. G. Saffman and F. R. S., Taylor, The penetration of a fluid into a porous

- medium or Hele-Shaw cell containing more viscous liquid, *Pro. R. Soc., London Ser, A245* (1958), 312—329.
- [ 3 ] R. L. Chuoke, The instability of stow immiscible viscous liquid-liquid displacement in pereable media, *Pet. Trans, AIME.*, 216 (1959) , 188.
- [ 4 ] H. D. Outmans, Nonlinear theory for frontel stability and viscous fingering in porous media, *Pet. Trans, AIME.*, 225 (1962), 165.
- [ 5 ] E. D. Chikhliwala, Investigation on viscous fingering by linear and weakly non-linear stability analysis, *SPE. Reser. Eng., Nov* (1988), 1268—1277.
- [ 6 ] D. S. Hughes and P. Murphy, Use of a mote carlo method to somulate unstable and immiscible flow through porous media, *SPE Reservoir Eng., Nov.* (1988), 1129—1136.
- [ 7 ] D. G. Kirakidis and E. G. Mitsoulis, et al., Linear displacement of a predictive algorithm, *The Canadian J. Chem, Eng.*, 69 (1991), 557—563.
- [ 8 ] A. J. Degregoria and L. W. Schwartz, A Boundary integral method for two phase displacement in Hele-shaw cell, *J. Fluid Mech.* 164 (1986), 383—400.

## Three Dimensional Simulation of Unstable Immiscible Displacement in the Porcus Medium

Tan Xiaoping    Pei Juemin    Chen Junkai

(Sichuan Union University, Chengdu 610065, P. R. China)

### Abstract

In this study changes of uncontinuous potential functions at the interface were used to simulate the immiscible displacemnt in porous media. The elliptic partial differential equation was changed to a seven-point molecule form algebraic equation in three dimensions using the finite difference method. The strongly implicit procedure was adopted to determine the potential functions at every time instant. Then the change of interface was continued until the displacement changed to unstable state. The effect of capillary pressure, wetting property, and nonuniformity were considered.

**Key words** immiscible fluids, interface movement, porous medium, instability