应用数学和力学，第18卷 第1期（1997年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多夹层板壳的非线性理论及应用（I）
——基本理论

吴建成[1]　潘立宙[2]

（1995年8月1日收到）

摘　要

本文建立了多夹层壳体小应变状态下的中转动二阶大挠度的理论，接着进行适当的简化，获得了中转动、中小转动的一阶大挠度的理论。

关键词　多夹层板壳　非线性理论

一、前　言

近年来，多夹层板壳结构在航空、航天及海洋工程获得了广泛的应用。这是由于其具有结构的重量轻、强度高、刚度大等特点，以及通过适当选择表层和夹心还可获得抗振、隔热、隔音及滤波等特性，从而满足各种需要。因此，有关学者对多夹层板壳进行了研究。但是，现有的研究大多数限于线性范围。Liaw和Little[1]研究了多夹层板的线性弯曲，Wong和Salama[2]研究了稳定问题。而Azar[3]考虑了表板非各向同性的问题，Abdulhadi[4]研究了非各向同性表板的振动问题。关于多夹层壳体，Azar[5]研究了非各向同性表层的圆柱壳，Liaw[6]研究过锥形壳。

有关多夹层板壳的非线性大挠度的研究，Rajagopal[7]等研究了多夹层矩形板的大挠度弯曲及非线性振动问题。至于多夹层板壳的非线性理论及应用，正是需要进一步研究的课题，本文首先就多夹层板壳的非线性理论进行了研究。

利用考虑横向剪切变形的壳体几何关系，给出了多夹层壳体在小应变状态下中转动二阶大挠度理论的基本方程和边界条件，以及中转动、中小转动的一阶大挠度理论。

二、中转动二阶理论的基本方程

壳体的严格的几何关系相当复杂，必须进行适当的简化才可以应用，由此产生了各种壳体理论及基本方程。钱伟长[8]用摄动法对壳体的各种简化理论进行了系统的分类。若根据应变和转动的相对量阶，也可以对壳体理论进行分类和简化[9]。本文采用变分法，在求得的总

1　同济大学工程力学研究所，上海　200092.

2　上海市应用数学和力学研究所，上海　200072.

势能中保持误差量阶一致，从而求得简化的非线性基本方程。

假设壳体未变形的参考构形为B_0，壳体占有区域C_0，壳体的中面为A_0。取A_0中的一曲面坐标系θ^α($\alpha=1$，2，文中的奇腊字母都取值1，2)，那么A_0的基矢为$\mathbf{a}_\alpha$，单位法向量$\mathbf{n}$，曲率张量分量$b_{\alpha\beta}$。

壳体受外力作用后，占有区域C_t。在这里假设，变形后壳体中面的原法线仍为直线，但已不再是中面的法线。变形后壳体中面的原法线$\mathbf{n}$变为$\bar{\mathbf{a}}_3$，而中面的法线为$\bar{\mathbf{n}}$。且定义

$$\boldsymbol{\omega}=\bar{\mathbf{n}}-\mathbf{n},\quad \mathbf{Y}=\bar{\mathbf{a}}_3-\bar{\mathbf{n}} \tag{2.1}$$

即$\boldsymbol{\omega}$，$\mathbf{Y}$分别是法线转动和横向变形矢量。

壳体变形后的位移$\mathbf{u}$，$\mathbf{Y}$可视为基本位移量，

$$\mathbf{u}=u^\alpha\mathbf{a}_\alpha+u_3\mathbf{n},\quad \mathbf{Y}=\gamma^\alpha\mathbf{a}_\alpha+r_3\mathbf{n} \tag{2.2}$$

这样可以推得考虑横向剪切变形的壳体几何关系[9,10]。如前所述，几何关系需要作适当的简化，才能实际应用。根据 Pietraszkiewicz[9]的研究，壳体的转动矢量与($\varepsilon^{\alpha\beta}\phi_\beta\mathbf{a}_\alpha+\phi\mathbf{n}$)是同量阶的，$\phi_\beta$、$\phi$的定义见(2.6)式，因此薄壳的小应变变形，可分为$\phi_\alpha=O(\varepsilon^2)$，$\phi=O(\varepsilon^2)$时的小转动；$\phi_\alpha=O(\varepsilon)$，$\phi=O(\varepsilon^2)$时的中小转动；$\phi_\alpha=O(\varepsilon)$，$\phi=O(\varepsilon)$时的中转动等。小转动就对应着最常见的线性理论，而这里的ε是由文[11]和[12]定义的小量

$$\varepsilon=\max\left(h/L,\ h/L^*,\ h/d,\ \sqrt{h/R},\ \sqrt{\eta}\right) \tag{2.3}$$

h，R分为壳厚、最小曲率半径，L，L^*分别为变形、曲率模态波长，d为壳内部点至边界距离，η为最大应变值。

在应用变分法推导基本方程时，若应变能密度W的误差阶为$O(\varepsilon^3)$，则为二阶理论；若误差阶为$O(\varepsilon)$，则为一阶理论。

依照以上的分析，可得简化后可用于中转动二阶理论的几何关系。

$$e_{\alpha\beta}=\theta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\phi_\alpha\phi_\beta+\frac{1}{2}u^\gamma_{1\alpha}u_{\gamma1\beta},\quad e_{\alpha3}=\frac{1}{2}\gamma_\alpha,\quad e_{33}=\gamma_3 \tag{2.4}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}-zK_{\alpha\beta}+z^2D_{\alpha\beta},\quad \gamma_{\alpha3}=e_{\alpha3}=\frac{1}{2}\gamma_\alpha,\quad \gamma_{33}=e_{33}=\gamma_3 \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha11\beta}+u_{\beta11\alpha})-b_{\alpha\beta}u_3,\quad \psi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\beta11\alpha}-u_{\alpha11\beta})=\varepsilon_{\alpha\beta}\phi\\
&\phi=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}u_{\beta11\alpha},\quad \phi_\alpha=u_{3,\alpha}+b^\gamma_\alpha u_\gamma\\
&K_{\alpha\beta}=\chi_{\alpha\beta}+\lambda_{(\alpha\beta)},\quad D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(b^\gamma_\alpha\chi_{\gamma\beta}+b^\gamma_\beta\chi_{\gamma\alpha})\\
&\chi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\phi_{\alpha11\beta}+\phi_{\beta11\alpha}+b_{\gamma\alpha}u^\gamma_{1\beta}+b_{\gamma\beta}u^\gamma_{1\alpha})\\
&\lambda_{\alpha\beta}=-\gamma_{\beta11\alpha},\quad \omega_\alpha=-\phi_\alpha,\quad \mu=1-2zH+z^2K\\
&H=\frac{1}{2}b^\alpha_\alpha,\quad K=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中，$u_{1\alpha}$和$u_{11\alpha}$分别表示u在C_0，A_0中的三维、二维协变导数，$\lambda_{(\alpha\beta)}$表示它的对称部分。

中转动和中小转动一阶理论的几何关系同样可以给出，这里略去。下面研究多夹层壳体小应变中转动的二阶理论。

多夹层壳体的结构和坐标如图1，夹层壳体由薄的硬表层和厚的软夹心构成，一般地都可

满足以下的假设：1．各层由线性正交各向异性材料构成；2．表层厚t与夹心厚h_c之比$\varepsilon_2=t/h_c$是小量；3．夹心的横向剪切横量${}_cG_{3\alpha}$与表层的横向剪切横量${}_fG_{3\alpha}$之比$\varepsilon_1={}_cG_{3\alpha}/{}_fG_{3\alpha}$是小量；4．夹层壳厚$h$与壳最小曲率半径之比$h/R\leqslant O(\varepsilon^2)$。

位移场和几何关系

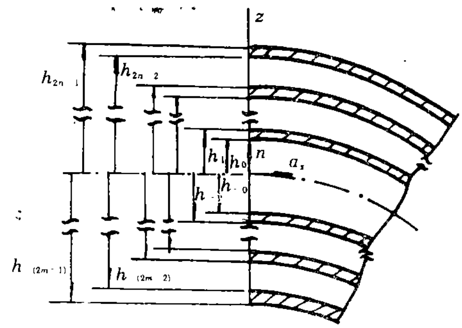

图1　多夹层壳体的结构和坐标

如图1，设壳体中面是夹心层，往上由0至$(2n-1)$层，向下由0至$-(2m-1)$层，计有$2(n+m)-1$层。第i层中面的位移${}_iu_\alpha$，${}_i\phi_\alpha$，${}_iu_\alpha^1$为第i层的位移。本文中变量的左下标都代表层数。对于中心层，有位移场

$$\left.\begin{aligned}&{}_0u_\alpha^*={}_0u_\alpha+({}_0\omega_\alpha+{}_0\gamma_\alpha)z=u_\alpha+(\omega_\alpha+{}_0\gamma_\alpha)z\\&{}_0u_3=w,\qquad (h_{-0}\leqslant z\leqslant h_0)\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

第i层，有

$$\left.\begin{aligned}&{}_iu_\alpha^*={}_iu_\alpha+({}_i\omega_\alpha+{}_i\gamma_\alpha)\left(z-\frac{h_i+h_{i-1}}{2}\right)\\&{}_iu_3=w,\qquad (h_{i-1}\leqslant z\leqslant h_i)\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

根据层间位移连续，可得第i层的位移场与中心层的位移场的关系如下

$$\left.\begin{aligned}&{}_iu_\alpha^*=u_\alpha+{}_if_\alpha^\beta\gamma_\beta+\omega_\alpha z+{}_i\gamma_\alpha(z-{}_ig)\\&{}_ig=\frac{h_i+h_{i-1}}{2},\quad {}_i\gamma_\alpha={}_id_\alpha^\beta\gamma_\beta\\&{}_if_\alpha^\beta=\frac{h_i-h_{i-1}}{2}{}_id_\alpha^\beta+(h_{i-1}-h_{i-2})_{i-1}d_\alpha^\beta+\cdots+(h_1-h_0)_1d_\alpha^\beta+h_0\,{}_0d_\alpha^\beta\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

${}_id_\alpha^\beta$是描述各层剪应变关系的量，以后可由层间剪应力连续的条件来确定。

那么中心层及第i层的应变场为

$$\left.\begin{aligned}&{}_0\gamma_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}-z(\chi_{\alpha\beta}+{}_0\lambda_{(\alpha\beta)})+\frac{1}{2}z^2(b_\alpha^\gamma\chi_{\gamma\beta}+b_\beta^\gamma\chi_{\gamma\alpha})\\&{}_0\gamma_{\alpha3}={}_0e_{\alpha3}=\frac{1}{2}{}_0\gamma_\alpha=\frac{1}{2}{}_0d_\alpha^\gamma\gamma_\gamma\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&{}_i\gamma_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}({}_i\bar{f}_\alpha^\gamma\lambda_{\beta\gamma}+{}_i\bar{f}_\beta^\gamma\lambda_{\alpha\gamma})-\frac{1}{2}z({}_id_\alpha^\gamma\lambda_{\beta\gamma}+{}_id_\beta^\gamma\lambda_{\alpha\gamma})\\&\qquad -z\chi_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}z^2(b_\alpha^\gamma\chi_{\gamma\beta}+b_\beta^\gamma\chi_{\gamma\alpha})\\&{}_i\gamma_{\alpha3}={}_ie_{\alpha3}=\frac{1}{2}{}_i\gamma_\alpha=\frac{1}{2}{}_id_\alpha^\beta\gamma_\beta\\&{}_i\bar{f}_\alpha^\beta={}_if_\alpha^\beta-{}_ig_id_\alpha^\beta\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

本构关系和广义内力。

线弹性材料的虎克定律，可表示为

$$\begin{bmatrix}\sigma^{\alpha\beta}\\\sigma^{\alpha3}\\\sigma^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C^{\alpha\beta\gamma\delta}&2C^{\alpha\beta\gamma3}&C^{\alpha\beta33}\\C^{\alpha3\gamma\delta}&2C^{\alpha3\gamma3}&C^{\alpha333}\\C^{33\gamma\delta}&2C^{33\gamma3}&C^{3333}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{\gamma\delta}\\\gamma_{\gamma3}\\\gamma_{33}\end{bmatrix}\tag{2.12}$$

对于正交异性材料，有$C^{\alpha\beta\gamma3}=C^{\alpha3\gamma\delta}=C^{\alpha333}=C^{33\gamma3}=0$. 并且由$\sigma^{33}=O(\varepsilon^2\sigma^{\alpha\beta})\doteq0$，可得

$$\gamma_{33}=-\frac{C^{33\gamma\delta}}{C^{3333}}\gamma_{\gamma\delta} \tag{2.13}$$

因此有

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{\alpha\beta}=\left(C^{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{C^{33\gamma\delta}}{C^{3333}}C^{\alpha\beta33}\right)\gamma_{\gamma\delta}=L^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta},\quad \sigma^{\alpha3}=2C^{\alpha3\gamma3}\gamma_{\gamma3}\\&L^{\alpha\beta\gamma\delta}=C^{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{C^{33\gamma\delta}}{C^{3333}}C^{\alpha\beta33}\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

对于均质材料，$C^{\alpha\beta\gamma\delta}$和$L^{\alpha\beta\gamma\delta}$可按$z$展开

$$\left.\begin{aligned}&L^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_0^{\alpha\beta\gamma\delta}+zL_1^{\alpha\beta\gamma\delta}+O(h^2/R^2L_0^{\alpha\beta\gamma\delta}),\quad C^{\alpha3\gamma3}=C_0^{\alpha3\gamma3}+zC_1^{\alpha3\gamma3}+O(h^2/R^2C_0^{\alpha\beta\gamma\delta})\\&L_1^{\alpha\beta\gamma\delta}=O(L_0^{1\beta\gamma\delta}/R),\quad C_1^{\alpha\beta\gamma\delta}=O(C_0^{\alpha\beta\gamma\delta}/R)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

假设各层材料，当$\alpha\neq\gamma$时，有${}_iC^{\alpha3\gamma3}=0$，那么由第$i-1$，i层的剪应力${}_{i-1}\sigma^{\alpha3}={}_i\sigma^{\alpha3}$，可得

$$\left.\begin{aligned}&{}_i\gamma_\alpha\ {}_iC_0^{\alpha3\alpha3}={}_{i-1}\gamma_\alpha\ {}_{i-1}C_0^{\alpha3\alpha3}=\gamma_\alpha C_0^{\alpha3\alpha3}\\&{}_id_\alpha^\alpha=\frac{C_0^{\alpha3\alpha3}}{{}_iC_0^{\alpha3\alpha3}},\quad {}_id_\alpha^\gamma=0\qquad(\alpha\neq\gamma)\\&\gamma_\alpha=\frac{\sum\limits_{i=-(2m-2)}^{2n-1}(h_i-h_{i-1})\,{}_i\gamma_\alpha}{h},\qquad C_0^{\alpha3\alpha3}=\frac{h}{\sum\limits_{i=-(2m-2)}^{2n-1}\dfrac{h_i-h_{i-1}}{{}_iC_0^{\alpha3\alpha3}}}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

式中 ${}_id_\alpha^\alpha$上下标不求和. 从这里可看出，由于层间剪应力连续，因此各层的${}_i\gamma_\alpha$不再独立，只有γ_α独立，并且是${}_i\gamma_\alpha$的某种平均值. 根据假设3，表层的${}_{2k+1}C_0^{\alpha3\alpha3}$一般大许多，则有${}_{2k+1}d_\alpha^\beta\doteq0$. 如果各夹心材料相同，则有${}_{2k}d_\alpha^\alpha=1$，那么${}_if_\alpha^\alpha$变为

$${}_{2k+1}f_\alpha^\alpha=h_0+(h_2-h_1)+(h_4-h_3)+\cdots+(h_{2k}-h_{2k-1})={}_{2k+1}f \tag{2.17}$$

若每夹心层都有${}_{2k}G_{13}={}_{2k}G_{23}$，那么可得

$${}_{2k}d_1^1={}_{2k}d_2^2={}_{2k}d,\quad {}_{2k}f_1^1={}_{2k}f_2^2={}_{2k}f \tag{2.18}$$

下面研究壳体的广义内力. 由壳体的内力、内力矩的定义，在多夹层壳体的情况下，有

$$\left.\begin{aligned}&N^{\alpha\beta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha\delta}\mu_\delta^\beta\mu dz=\sum\int_{h_{i-1}}^{h_i}{}_i\sigma^{\alpha\delta}\mu_\delta^\beta\mu dz\\&Q^\alpha=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha3}\mu dz=\sum\int_{h_{i-1}}^{h_i}{}_i\sigma^{\alpha3}\mu dz\\&M^{\alpha\beta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha\delta}\mu_\delta^\beta\mu zdz=\sum\int_{h_{i-1}}^{h_i}{}_i\sigma^{\delta\alpha}\mu_\delta^\beta\mu zdz\\&\Sigma=\sum_{i=-(2m-2)}^{2n-1}\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

式中，有

$$\mu_\delta^\beta=\delta_\delta^\beta-b^\beta z,\quad \mu=1-2Hz \tag{2.20}$$

经过推导，可得

$$N^{\alpha\beta}=N'^{\alpha\beta}-b^{\beta}_{\delta}M'^{\alpha\delta},\quad M^{\alpha\beta}=M'^{\alpha\beta}-b^{\beta}_{\delta}O'^{\alpha\delta}$$
$$N'^{\alpha\beta}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}e_{\gamma\delta}-(E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}-F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}b^{\varepsilon}_{\sigma})\chi_{\gamma\delta}-G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}\lambda_{\gamma\delta}$$
$$M'^{\alpha\beta}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}e_{\gamma\delta}-(E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}-F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4}b^{\delta}_{\sigma})\chi_{\gamma\delta}-G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}\lambda_{\gamma\delta}$$
$$O'^{\alpha\beta}=F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}e_{\gamma\delta}-F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4}\chi_{\gamma\delta}-G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}\lambda_{\gamma\delta}$$
$$(E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1},\ E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2},\ E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3},\ F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3},\ F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4},\ G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1},\ G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2},\ G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3})$$
$$=\Sigma({}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1},\ {}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2},\ {}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3},\ {}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3},\ {}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4},\ {}_{i}G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1},\ {}_{i}G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2},\ {}_{i}G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3})$$
$${}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}={}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}(h_{i}-h_{i-1})-(2H_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}-{}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1})\frac{h_i^2-h_{i-1}^2}{2}-2H_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}\frac{h_i^3-h_{i-1}^3}{3}$$
$${}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}={}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}\frac{h_i^2-h_{i-1}^2}{2}-(2H_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}-{}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1})\frac{h_i^3-h_{i-1}^3}{3}$$
$${}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}={}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}\frac{h_i^3-h_{i-1}^3}{3}-(2H_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}-{}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1})\frac{h_i^4-h_{i-1}^4}{4}$$
$${}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}={}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}\frac{h_i^3-h_{i-1}^3}{3},\quad {}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4}={}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{0}\frac{h_i^4-h_{i-1}^4}{4}$$
$${}_{i}G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}={}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{1}\,{}_{i}f^{\delta}_{\sigma}+{}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}\,{}_{i}d^{\delta}_{\sigma}$$
$${}_{i}G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}={}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{2}\,{}_{i}f^{\delta}_{\sigma}+{}_{i}E^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}\,{}_{i}d^{\delta}_{\sigma}$$
$${}_{i}G^{\delta\beta\gamma\delta}_{3}={}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{3}\,{}_{i}f^{\delta}_{\sigma}+{}_{i}F^{\alpha\beta\gamma\delta}_{4}\,{}_{i}d^{\delta}_{\sigma}$$

(2.21)

由以上的表达式，可得

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(N^{\alpha\beta}+b^{\alpha}_{\tau}M^{\tau\beta})=0 \tag{2.22}$$

这就是壳体内的内力、内力矩应满足的条件．对于Q^{α}有

$$Q^{\alpha}=\Sigma_{i}Q^{\alpha}=C^{\alpha\beta3\gamma3}_{0}\gamma_{\gamma}\Sigma(h_{i}-h_{i-1}) \tag{2.23}$$

平衡方程及边界条件

为了推导出平衡方程及边界条件，需要求出壳体的应变能．应变能密度为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}L^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}+2C^{\alpha3\gamma3}\gamma_{\alpha3}\gamma_{\gamma3} \tag{2.24}$$

那么壳体中面的应变能密度为

$$\left.\begin{aligned}
W&=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{\varepsilon}\mu dz=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}L^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}\mu dz+2\int_{-h/2}^{h/2}C^{\alpha3\gamma3}\gamma_{\alpha3}\gamma_{\gamma3}\mu dz\\
&=W_1+W_2\\
W_1&=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}L^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\delta}\mu dz\\
W_2&=2\int_{-h/2}^{h/2}C^{\alpha3\gamma3}\gamma_{\alpha3}\gamma_{\gamma3}\mu dz
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

若定义${}_{i}W_1$和${}_{i}W_2$为第i层的应变能密度，则有

$$\left.\begin{aligned}
W_1&=\Sigma_{i}W_1=\Sigma\frac{1}{2}\int_{h_{i-1}}^{h_i}{}_{i}L^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{i}\gamma_{\alpha\beta}{}_{i}\gamma_{\gamma\delta}\mu dz\\
W_2&=\Sigma_{i}W_2=\Sigma2\int_{h_{i-1}}^{h_i}{}_{i}C^{\alpha3\gamma3}{}_{i}\gamma_{\alpha3}{}_{i}\gamma_{\gamma3}\mu dz
\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

经过推导，可得结果如下

$$\left.\begin{aligned}
&W_1=\frac{1}{2}\Big[E_1^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-(E_2^{\alpha\beta\gamma\delta}-F_3^{\alpha\beta\gamma\delta}b_\gamma^\delta)\chi_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-G_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}\\
&\quad -E_2^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}+(E_3^{\alpha\beta\gamma\delta}-F_4^{\alpha\beta\gamma\delta}b_\sigma^\delta-F_4^{\alpha\tau\gamma\delta}b_\tau^\beta)\chi_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}\\
&\quad +(G_2^{\alpha\beta\gamma\delta}-G_3^{\alpha\tau\gamma\delta}b_\tau^\beta)\lambda_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}-G_1'^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}\lambda_{\alpha\beta}+(G_2'^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
&\quad -G_3'^{\alpha\beta\gamma\delta}b_\sigma^\delta)\chi_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}+G_0^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}\lambda_{\alpha\beta}\\
&\quad +\frac{1}{2}(F_3^{\alpha\alpha\tau\gamma\delta}b_\tau^\beta+F_3^{\beta\tau\gamma\delta}b_\tau^\alpha)e_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}\Big]\\
&(G_1'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ G_2'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ G_3'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ G_0^{\alpha\beta\gamma\delta})=\Sigma({}_iG_1'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_2'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_3'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_0^{\alpha\beta\gamma\delta})\\
&{}_iG_1'^{\alpha\beta\delta\gamma}={}_iE_1^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_if_\tau^\beta+{}_iE_2^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_id_\tau^\beta\\
&{}_iG_2'^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iE_2^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_if_\tau^\beta+{}_iE_3^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_id_\tau^\beta\\
&{}_iG_3'^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_3^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_if_\tau^\beta+{}_iF_4^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_id_\tau^\beta\\
&G_0^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iE_1^{\alpha\tau\gamma\sigma}{}_if_\sigma^\delta{}_if_\tau^\beta+{}_iE_2^{\alpha\tau\gamma\sigma}({}_if_\sigma^\delta{}_id_\tau^\beta+{}_if_\tau^\beta{}_id_\sigma^\delta)+{}_iE_3^{\alpha\tau\gamma\sigma}{}_id_\gamma^\delta{}_id_\tau^\beta\\
&W_2=\frac{1}{2}C_0^{\alpha3\gamma3}\gamma_\alpha\gamma_\gamma\Sigma(h_i-h_{i-1})
\end{aligned}\right\}\quad(2.27)$$

若定义

$$\bar{N}^{\alpha\beta}=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}},\ \bar{M}^{\alpha\beta}=-\frac{\partial W}{\partial \chi_{\alpha\beta}},\ \bar{m}^{\alpha\beta}=-\frac{\partial W}{\partial \lambda_{\alpha\beta}},\ \bar{Q}^\alpha=\frac{\partial W}{\partial \gamma_\alpha}\tag{2.28}$$

那么可以获得下列的关系式

$$\bar{N}^{\alpha\beta}=N'^{\alpha\beta},\ \bar{M}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(M^{\alpha\beta}+M^{\beta\alpha}),\ \bar{Q}^\alpha=Q^\alpha\tag{2.29}$$

若外载是保守的或是定载荷（不随系统的变化而改变），系统的总势能可写为（不考虑面分布力矩）

$$U=\iint_{A_0}(W-\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})ds-\int_l(\mathbf{q}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{T}\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\omega})dl\tag{2.30}$$

其中，$\mathbf{p}$为分布面力，$\mathbf{q}$为边界分布力，$\mathbf{T}$是边界分布力矩（与$\boldsymbol{\gamma}$有关），t 也是边界分布力矩（与$\boldsymbol{\omega}$有关）.

根据最小势能原理，系统的平衡状态是使U取极小值．此时，应有$\delta U=0$，以u_α、u_3和γ_α为变分变量，可得平衡方程

$$\left.\begin{aligned}
&[(\delta_\alpha^\gamma+u_{1\alpha}^\gamma)\bar{N}^{\alpha\beta}-b_\alpha^\gamma\bar{M}^{\alpha\beta}]_{11\beta}-b_\alpha^\gamma(\phi_\beta\bar{N}^{\alpha\beta}+\bar{M}^{\alpha\beta}{}_{11\beta})+p^\gamma=0\\
&(\phi_\beta\bar{N}^{\alpha\beta}+\bar{M}^{\alpha\beta}{}_{11\beta})_{11\alpha}+b_{\gamma\beta}[(\delta_\alpha^\gamma+u_{1\alpha}^\gamma)\bar{N}^{\alpha\beta}-b_\alpha^\gamma\bar{M}^{\alpha\beta}]+p^3=0\\
&\bar{m}^{\beta\alpha}{}_{11\beta}-Q^\alpha=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.31}$$

边界条件

$$\left.\begin{aligned}
&[(\delta_\alpha^\gamma+u_{1\alpha}^\gamma)\bar{N}^{\alpha\beta}-b_\alpha^\gamma\bar{M}^{\alpha\beta}]n_\beta=q^\gamma &&\text{或}\ u_\alpha=u_\alpha^0\\
&(\phi_\alpha\bar{N}^{\alpha\beta}+\bar{M}^{\alpha\beta}_{11\beta})n_\beta=q^3 && w=w^0\\
&\bar{M}^{\alpha\beta}n_\beta=t^\alpha && \phi_\alpha=\phi_\alpha^0\\
&\bar{m}^{\beta\alpha}n_\beta=T^\alpha && \gamma_\alpha=\gamma_\alpha^0
\end{aligned}\right\}\tag{2.32}$$

式中，n_β是壳体中面的周边界l的外法线在θ^β上的分量.

至此，我们已经建立了小应变状态下多夹层壳体中转动二阶理论的基本方程．此方程是相当复杂，下节对其进行适当的简化，以便于应用．

三、中转动和中小转动一阶理论的基本方程

一阶理论的基本假设及推导过程与上节基本一致.壳体的位移假设不变，中心层及第i层几何关系简化为

$$ {}_0\gamma_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}-z(\chi_{\alpha\beta}+{}_0\lambda_{(\alpha\beta)}),\quad e_{\alpha\beta}=\theta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\phi_\alpha\phi_\beta+\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\phi^2 \tag{3.1}$$

$$ {}_i\gamma_{\alpha\beta}={}_ie_{\alpha\beta}-z({}_i\chi_{\alpha\beta}+{}_i\lambda_{(\alpha\beta)}),\quad {}_i\gamma_{\alpha3}={}_ie_{\alpha3}=\frac{1}{2}{}_i\gamma_\alpha \tag{3.2}$$

即$e_{\alpha\beta}$略去了$u_{\gamma1\alpha}$中的对称部分$\theta_{\alpha\gamma}$，${}_0\gamma_{\alpha\beta}$、${}_i\gamma_{\alpha\beta}$略去了z^2项，$a_{\alpha\beta}$是$\mathbf{a}_\alpha$的度量张量分量.

广义内力的定义不变，取$\mu_\delta^\beta=\delta_\delta^\beta$、$\mu=1$，经推导可得

$$\left.\begin{aligned}
&N^{\alpha\beta}=F_1^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}-F_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}-G_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}\\
&M^{\alpha\beta}=F_2^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}-F_3^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}-G_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}\\
&Q^\alpha=C_0^{\alpha3\gamma3}\gamma_\gamma\Sigma(h_i-h_{i-1})\\
&(F_1^{\alpha\beta\gamma\delta},\ F_2^{\alpha\beta\gamma\delta},\ F_3^{\alpha\beta\gamma\delta},\ G_1^{\alpha\beta\gamma\delta},\ G_2^{\alpha\beta\gamma\delta})=\sum_{\rm I}({}_iF_1^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iF_2^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iF_3^{\alpha\beta\gamma\delta},\\
&\qquad {}_iG_1^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_2^{\alpha\beta\gamma\delta})\\
&\sum_{\rm I}=\sum_{i=-2m+2,-2m+4}^{2n-1}\qquad\text{(只对表层求和)}\\
&{}_iF_1^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iL_0^{\alpha\beta\gamma\delta}(h_i-h_{i-1})\quad {}_iF_2^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iL_0^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{h_i^2-h_{i-1}^2}{2}\quad {}_iF_3^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iL_0^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{h_i^3-h_{i-1}^3}{3}\\
&{}_iG_1^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{f}_\sigma^\delta\qquad {}_iG_2^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_2^{\alpha}\ {}_i\mathfrak{f}_\sigma^\delta
\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

应变能密度

$$\left.\begin{aligned}
&W=W_1+W_2\\
&W_1=\frac{1}{2}(F_1^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-F_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-G_1^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}e_{\alpha\beta}-F_2^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}\\
&\qquad+F_3^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}+G_2^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}-G_1'^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta}\lambda_{\alpha\beta}+G_2'^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}\lambda_{\alpha\beta}\\
&\qquad+G_0^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_{\gamma\delta}\lambda_{\alpha\beta})\\
&(G_1'^{\alpha\beta\gamma\delta},G_2'^{\alpha\beta\gamma\delta},G_0^{\alpha\beta\gamma\delta})=\sum_{\rm I}({}_iG_1'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_2'^{\alpha\beta\gamma\delta},\ {}_iG_0^{\alpha\beta\gamma\delta})\\
&{}_iG_1'^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_1^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_i\mathfrak{f}_\tau^\beta\quad {}_iG_2'^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_2^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_i\mathfrak{f}_\tau^\beta\quad {}_iG_0^{\alpha\beta\gamma\delta}={}_iF_1^{\alpha\tau\gamma\delta}{}_i\mathfrak{f}_\tau^\beta{}_i\mathfrak{f}_\sigma^\delta\\
&W_2=\frac{1}{2}C_0^{\alpha3\gamma3}\gamma_\alpha\gamma_\gamma\Sigma(h_i-h_{i-1})
\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

同样地，可由(2.28)式定义$\bar{N}^{\alpha\beta}$，$\bar{M}^{\alpha\beta}$，$\bar{m}^{\alpha\beta}$，$\bar{Q}^\alpha$. 而一阶理论有

$$\bar{N}^{\alpha\beta}=N^{\alpha\beta},\qquad \bar{M}^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta},\qquad \bar{Q}^\alpha=Q^\alpha. \tag{3.5}$$

由最小势能原理，可求得平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(N^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha}\phi N_\gamma^\gamma-\frac{1}{2}b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}+\frac{1}{2}b_\gamma^\beta M^{\gamma\alpha}\right)_{11\beta}-b_\beta^\alpha(\phi^\gamma N^{\gamma\beta}+M_{11\gamma}^{\beta\gamma})+p^\alpha=0\\
&(\phi_\alpha N^{\alpha\beta}+M_{11\alpha}^{\alpha\beta})_{11\beta}+b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+p^3=0,\quad m_{11\beta}^{\beta\alpha}-Q^\alpha=0
\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

下面研究中小转动的一阶理论. 此时，有$\phi_\alpha=O(\varepsilon)$，$\phi=(\varepsilon^2)$，即$u_\alpha\leqslant O(\varepsilon w)$，$\phi\leqslant 0(\varepsilon\phi_\alpha)$. 那么，几何关系中略去$\phi$，$\phi_\alpha$中舍去$b_\alpha^\gamma u_\gamma$，

$$\left.\begin{aligned}
&e_{\alpha\beta}=\theta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\phi_\alpha\phi_\beta,\qquad \chi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\phi_{\alpha11\beta}+\phi_{\beta11\alpha})\\
&\phi_\alpha=w,\ \alpha,\qquad \phi=0
\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

同为一阶理论，中转动，中小转动的广义内力、应变能密度的表达式在形式上是一致的，差别在于$e_{\alpha\beta}$，$\chi_{\alpha\beta}$的不同。

同样，可得平衡方程和边界条件如下

$$\left.\begin{aligned}&N^{\alpha\beta}_{\ \ \|\alpha}+p^{\alpha}=0\\&(M^{\alpha\beta}_{\ \ \|\alpha}+\phi_{\alpha}N^{\alpha\beta},_{\ \|\beta}+b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+p^{3}=0\\&m^{\alpha\beta}_{\ \ \|\beta}-Q^{\alpha}=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.8)$$

$$\left.\begin{aligned}&N^{\alpha\beta}n_{\beta}=q^{\alpha} && \text{或} && u_{\alpha}=u^{0}_{\alpha}\\&(M^{\alpha\beta}_{\ \ \|\alpha}+\phi_{\alpha}N^{\alpha\beta})n_{\beta}=q^{3}, && && w=w^{0}\\&M^{\alpha\beta}n_{\beta}=t^{\alpha} && && \phi_{\alpha}=\phi^{0}_{\alpha}\\&m^{\beta\alpha}n_{\beta}=T^{2} && && \gamma_{\alpha}=\gamma^{0}_{\alpha}\end{aligned}\right\}\qquad(3.9)$$

这样，我们就获得了多夹层壳体中小转动的一阶理论的基本方程。

本文推得的多夹层壳体的中转动二阶理论，精度高，但公式繁冗复杂，应用受到一定限制。一阶理论，特别是中小转动的一阶理论，是所有有关壳体几何非线性理论中最简单的一种，实际运用也最为广泛。本文的第二部分就利用其研究正交异性表层多夹层扁壳的基本方程。

参 考 文 献

[1] B. D. Liaw and R. W. Little, Theory of bending multilayer sandwich plates, *AIAA Journal*, 5 (1967), 301—304.

[2] J.P. Wong and A. E. Salama, Elastic stability of multilayer sandwich plates, *Developments in Mechanics*, 4 (1968), 289—304.

[3] J. J. Azar, Bending theory of multilayer orthotropic sandwich plates, *AIAA Journal*, 6 (1968), 2166—2169.

[4] F. Abdulhadi, Vibrations of multicore orthotropic sandwich plates, ASME Paper 71—vibr—48, Toronto, Ontario, Canada (1971).

[5] J. J. Azar, Elastic constants for multilayered sandwich cylinclers shells, *AIAA Journal*, 8 (1970), 157—158.

[6] B. D. Liaw, A bending theory for multi-layer anisotropic conical shells. *Aeronautical Quarterly*, 20 (1969), 61—74.

[7] S.V. Rajagopal, et al., Large-deflection and nonlinear vibration of multilayered sandwich plates, *AIAA Journal*, 25 (1987), 130—133.

[8] W.Z. Chien, The intrinsic theory of thin shells and plates, Part Ⅲ, Application to thin shells, *Quart. Appl. Math.*, 2 (1944), 120—135.

[9] W. Pietraszkiewicz, Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 19 (1985), 115—139.

[10] 刘人怀、朱金福，《夹层壳非线性理论》，机械工业出版社 (1993).

[11] F.John, Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 18 (1965), 235—267.

[12] W.T. Koiter, The intrinsic equations of shell theory with some applications, *Mech. Today*, 5 (1980), 139—154.

Nonlnear Theory of Multilayer Sandwich Shells and Its Application(I)——General Theory

Wu Jiancheng

(*Institute of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai* 200092, *P.R.China*)

Pan Lizhou

(*Shanghai Inst. of Appl. Math. & Mech., Shanghai University, Shanghai* 200072, *P.R.China*)

Abstract

In this paper, a nonlinear theory is given for multilayer sandwich shells undergoing small strains and moderate rotations. Then a simplified theory for the shells undergoin g moderate or moderate/small rotations are obtained.

Key words multilayer sandwich shells, nonlinear theory