

非保守力作用下杆的塑性动态稳定性

揭 敏¹

(杨桂通推荐, 1995年2月22日收到, 1995年8月10日收到修改稿)

摘 要

本文用Liapunov第二方法分析非保守力作用下直杆的塑性动态稳定性。杆处于粘性阻尼介质中, 并受到切向均布的随动载荷作用。分析中在应力—应变关系中引入了应变率效应, 导出了一个稳定性条件, 并求出了临界失稳载荷, 讨论了应变率效应对杆的稳定性的影响。

关键词 非保守力 杆 塑性 稳定性

一、引 言

当变形体在某一介质中运动时, 其间的相互作用力如摩擦力的方向应随变形体的变形而改变。这是一种非保守力。例如空中飞行的导弹和火箭受到气体摩擦力的方向总是和其外形相切, 又如水下运动的潜艇以及输油管道等等, 其受力都有类似的性质。随着与之相应的工程技术的发展, 结构在非保守力作用下的动态稳定性问题越来越受到人们的关注。同时, 这类问题在理论上也有代表性, 详细的理论体系可参见Bolotin^[1], Ziegler^[2], Herrmann^[3]及 Leipholz^[4]等人的著作。具体到杆来说, 常考虑其受切向均布随动力^[5]以及端部随动力^[6]两种情况。近来还有关于非保守力作用下的杆件动态稳定的随机可靠性分析的工作^[7]。迄今为止, 所有的工作都是在弹性范围内进行的。

本文分析了非保守力作用下杆件的塑性动态稳定性。杆件被假设处于粘性阻尼介质中, 受到沿切向均匀分布的随动载荷作用。本文将采用由 Movchan^[8]在连续系统中发展起来的Liapunov第二方法(以下简称M-L法)进行分析。众所周知, 对于保守系统, 用Liapunov第二方法分析其稳定性是方便的, 因为这时可选取系统的Hamilton函数为M-L泛函。然而对于非保守系统构造其M-L泛函常会遇到很大困难。Leipholz在受非保守力作用的杆件分析中引入了粘性阻尼力, 这也是一种非保守力, 并成功地构造出在这两种非保守力作用下系统的M-L泛函^[5]。当粘性介质中的杆件在随动力作用下进入塑性状态时, 系统中又多了一个耗散的因素, 这使得上述分析方法变得更加困难。为了能用解析法得到稳定性条件以及临界载荷的封闭表达式, 本文对杆中应力变化以及材料应力—应变关系作了一些简化假定, 首先假定杆在屈曲时服从Shanley假定^[9], 即横截面上应力不发生卸载; 其次假定准静态时材料应力—应变关系为线性强化, 动态时则满足Malvern的过应力模型^[10]。由此导出了一

¹ 华中理工大学, 武汉 430074

个线性动力学微分方程。并在此基础上构造了一个 M-L 泛函，进一步导出了稳定性条件及临界失稳载荷。从中可看出应变率效应对杆的稳定性的影响。

二、基本方程和不等式

Malvern 的过应力模型的一阶 σ - ϵ 近似式为^[10]

$$E\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + D[\sigma - f(\epsilon)] \tag{2.1}$$

其中“ \cdot ”=“ $\partial/\partial t$ ”， E 为杨氏模量； D 为材料常数，Malvern 认为对大多数金属材料 $D = 10^6 s^{-1}$ ； $f(\epsilon)$ 为准静态 σ - ϵ 关系，对性线强化弹塑性材料 $f(\epsilon) = \sigma_Y + E_1(\epsilon - \sigma_Y/E)$ ，其中 E_1 为强化模量； σ_Y 为准静态屈服应力。若忽略弹性应变率 $\dot{\sigma}/E$ ，则有

$$E\dot{\epsilon} = D[\sigma - \sigma_Y - E_1(\epsilon - \sigma_Y/E)] \tag{2.2}$$

考虑图 1 所示的长为 l 、横截面积为 A 、并处于阻尼介质中的直杆，其动力学平衡方程为

$$\rho A \dot{y} = -M'' - q(l-x)y'' - R\dot{y} \tag{2.3}$$

其中 $y(x, t)$ 为杆的横向挠度；“ $'$ ”=“ $\partial/\partial x$ ”， ρ 为材料密度； q 为均布切向载荷； R 为粘性阻尼系数； M 为杆横截面上的弯矩。在 Shanley 假定下，利用 (2.2) 式不难算出 $M = EI\dot{y}''/D + E_1 I y''$ ， I 为横截面惯性矩。

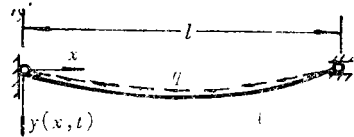


图 1

假定 $y = kw$ ， $x = k\xi$ ， $t = k\tau/c$ ，其中 $k = \sqrt{I/A}$ 为横截面惯性半径； $c = \sqrt{E/\rho}$ 为弹性纵波波速。代入 (2.3) 式可得无量纲形式的动力学微分方程

$$\dot{w}'''' + \alpha\gamma w'''' + \mu\gamma(\xi_l - \xi)w'' + \gamma\dot{w} + \beta\gamma w = 0 \tag{2.4}$$

(2.4) 式中，“ \cdot ”=“ $\partial/\partial \tau$ ”，“ $'$ ”=“ $\partial/\partial \xi$ ”， $\alpha = E_1/E$ ， $\beta = kRc/(EA)$ ， $\gamma = kD/c$ ， $\mu = qk/(EA)$ ， $\xi_l = l/k$ 。图 1 中的边界条件为

$$w|_{\xi=0, \xi_l} = 0, \quad w''|_{\xi=0, \xi_l} = 0 \tag{2.5}$$

出于下一节中推导演绎的需要，现从文献[4]或[5]中摘录一个关于弹性直杆 Rayleigh 商的无量纲形式的不等式，如图 2 所示，杆受到均布的保守力 g 作用。若 $w(\xi = \tau)$ 为其可能位移，则有

$$\frac{\int_0^{\xi_l} w''^2 d\xi}{\int_0^{\xi_l} (\xi_l - \xi) w'^2 d\xi} \geq \nu_{cr} \tag{2.6}$$

其中 $\nu_{cr} = g_{cr}k/(EA)$ ， $g_{cr} = 10\pi EI/l^3$ 为该杆的最小弹性屈曲载荷^[4]，其余符号如前所定义。故又有

$$\frac{\int_0^{\xi_l} w''^2 d\xi}{\int_0^{\xi_l} (\xi_l - \xi) w'^2 d\xi} \geq \frac{10\pi}{\xi_l^3} \tag{2.7}$$

(2.4)、(2.5) 两式的解 $w(\xi, \tau)$ 是图 2 中杆的一个可能的无量纲挠度，因此它应满足不等式 (2.7)。

类似地，考虑图 3 中两端受到载荷 P 作用的杆。作为其一个可能位移，(2.4)、(2.5) 两式的解 $w(\xi, \tau)$ 应满足关于其 Reyleigh 商的无量纲形式的不等式

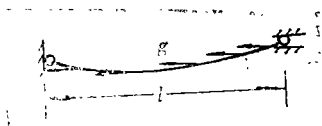


图 2

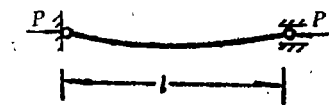


图 3

$$\frac{\int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi}{\int_0^{\xi_1} w^2 d\xi} \geq \frac{\pi^2}{\xi_1^2} \quad (2.8)$$

其中 π^2/ξ_1^2 为图 3 中杆的无量纲形式的最小弹性屈曲载荷 $P_{cr}/(EA)$ 。此外还可以证明 (详见附录),

$$\frac{\int_0^{\xi_1} w''^2 d\xi}{\int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi} \geq \frac{\pi^2}{\xi_1^2} \quad (2.9)$$

另根据文献[5], 由 Schwarz 不等式可得

$$w^2 \leq \xi \int_0^{\xi} w'^2 d\xi \leq \xi \int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi \leq \xi_1 \int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi \quad (2.10)$$

其中 $\xi \in [0, \xi_1]$ 。

三、M-L 泛函和稳定性条件

经过若干次尝试, 最后决定取 M-L 泛函为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} [\gamma w^2 + \alpha \gamma w''^2 - \mu \gamma (\xi_1 - \xi) w'^2 + \beta^2 \gamma w^2 / 2 + \beta \gamma w \dot{w}] d\xi \quad (3.1)$$

利用分部积分法, 并考虑到 (2.4)、(2.5) 两式, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^{\xi_1} \{ [\alpha \gamma w'''' + \mu \gamma (\xi_1 - \xi) w'' + \gamma \dot{w} + \beta \gamma \dot{w}] \dot{w} - \mu \gamma w' \dot{w} + \beta^2 \gamma w \dot{w} / 2 \\ &\quad - \beta \gamma \dot{w}^2 / 2 + \beta \gamma w \dot{w} / 2 \} d\xi \\ &= \int_0^{\xi_1} \{ -\dot{w} w'''' - \mu \gamma w' \dot{w} + \beta^2 \gamma w \dot{w} / 2 - \beta \gamma \dot{w}^2 / 2 \\ &\quad - \beta w [\dot{w}'''' + \alpha \gamma w'''' + \mu \gamma (\xi_1 - \xi) w'' + \beta \gamma \dot{w}] / 2 \} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \dot{V} &= \int_0^{\xi_1} [-\dot{w} w''^2 - \mu \gamma w' \dot{w} - \beta w'' w'' / 2 - \beta \gamma \dot{w}^2 / 2 \\ &\quad - \alpha \beta \gamma w''^2 / 2 + \mu \beta \gamma (\xi_1 - \xi) w'^2 / 2] d\xi \quad (3.2) \end{aligned}$$

定义度量 ρ_0 , ρ 为 $\rho_0 = \sup w^2 + \sup w''^2 + \sup w'^2$ 以及 $\rho = |w|$ 。将不等式 (2.7) 代入等式 (3.1), 有

$$V \geq \frac{\gamma}{2} \int_0^{\xi_1} \left[\left(\alpha - \frac{\mu \xi_1^3}{10\pi} \right) w''^2 + \left(\dot{w} + \frac{\beta w}{2} \right)^2 + \beta^2 \frac{w^2}{4} \right] d\xi \geq \frac{\gamma}{2} \int_0^{\xi_1} \left(\alpha - \frac{\mu \xi_1^3}{10\pi} \right) w''^2 d\xi$$

若 $\alpha - \mu \xi_1^3 / 10\pi \geq 0$, 即

$$\mu \leq 10\pi \alpha / \xi_1^3 \quad (3.3)$$

则由不等式(2.9)、(2.10)可知

$$V \geq \pi^2 \gamma \left(\alpha - \frac{\mu \xi_i^3}{10\pi} \right) \int_0^{\xi_i} \frac{w'^2 d\xi}{2\xi_i^2} \geq \pi^2 \gamma \left(\alpha - \frac{\mu \xi_i^3}{10\pi} \right) \frac{\rho^2}{2\xi_i^2}$$

即 V 关于度量 ρ 正定。又有

$$V \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^{\xi_i} [\alpha w''^2 + (w + \beta w/2)^2 + \beta^2 w^2/4] d\xi$$

由不等式 $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, a, b 为实数, 有

$$V \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^{\xi_i} \left(\alpha w''^2 + 2w^2 + \frac{3\beta^2 w^2}{4} \right) d\xi \leq \kappa (\sup w^2 + \sup w''^2 + \sup w^2) = \kappa \rho_0$$

其中 $\kappa = \max[\alpha \gamma \xi_i/2, \gamma \xi_i, 3\beta^2 \xi_i/(8\gamma)]$ 。故 V 关于度量 ρ_0 连续。由(3.2)式, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \int_0^{\xi_i} [-\beta(\alpha\gamma - \beta/8)w''^2/2 - \beta\gamma(w + \mu w'/\beta)^2/2 - (w'' + \beta w''/4)^2 \\ & + \mu^2 \gamma w'^2/(2\beta) + \beta\gamma\mu(\xi_i - \xi)w'^2/2] d\xi \end{aligned}$$

利用不等式(2.7)、(2.9)可以导出

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \int_0^{\xi_i} [-\alpha\beta\gamma + \beta^2/8 + \xi_i^2 \mu^2 \gamma / (\pi^2 \beta) + \beta\gamma\mu \xi_i^3 / (10\pi)] w''^2 d\xi$$

故当

$$\alpha \geq \beta/(8\gamma) + \xi_i^2 \mu^2 / (\pi^2 \beta^2) + \mu \xi_i^3 / (10\pi) \quad (3.4)$$

时, $\dot{V} < 0$ 。综合以上推导过程, 由 Liapunov 第二方法 (详见文献 [4]) 可知, 当 (3.3)、(3.4) 两式成立时, 图 1 中的杆是稳定的。又显然 (3.4) 式包含了 (3.3) 式, 因此它是该系统的唯一的一个稳定性条件。

对于率无关材料, $\gamma \rightarrow \infty$ 。此时稳定条件为

$$\xi_i^2 \mu^2 / (\pi^2 \beta^2) + \mu \xi_i^3 / (10\pi) \leq \alpha \quad (3.5)$$

不等式 (3.4) 等效为 $\mu \leq \mu_{cr}$, 其中

$$\mu_{cr} = \pi \beta \{ -\beta \xi_i / 10 + \sqrt{\beta^2 \xi_i^2 / 100 + 4[\alpha - \beta / (8\gamma)] / \xi_i^2} \} / 2 \quad (3.6)$$

为图 1 杆的无量纲临界屈曲载荷。对于率相关材料,

$$\mu_{cr} = \pi \beta \{ -\beta \xi_i / 10 + \sqrt{\beta^2 \xi_i^2 / 100 + 4\alpha / \xi_i^2} \} / 2 \quad (3.7)$$

四、算例与讨论

考虑一钢杆, 取 $\alpha = 0.018$, $D = 10^6 \text{s}^{-1}$, $c = 5100 \text{m/s}$, $A = 10 \times 2.5 \text{mm}^2$ 。算出 $\gamma = 0.14$ 。分别令无量纲杆长 ξ_i 和无量纲阻尼系数 β 一定, 比较率相关和率无关两种情形下杆的无量纲临界屈曲载荷 μ_{cr} , 如图 4 和图 5 所示。从图 4 中看到对于一定长度的杆, 当粘性阻尼系数 β 较小时, 两种情形下的临界载荷 μ_{cr} 相合甚好, 即这时应变率效应对杆的稳定性无太大影响; 同时看到此时 μ_{cr} 较小, 杆的稳定性较差。前人 [1-4] 在研究非保守力作用下阻尼对杆的弹性稳定性的影响时, 得到的一致结论是小阻尼会使杆变得更不稳定。从本文的结果来看, 这个结论在塑性稳定性分析中也是成立的。此外发现, 随着阻尼的增大, 应变率效应的影响越来越显著。对率无关材料, 杆的稳定性随阻尼的增大而增强, 其变化规律如图 4 中虚线所示, 它与 Leipholz 在分析杆的弹性稳定性时所得到的曲线十分相似 [5]; 然而对于率相关材料, 杆却表现出一种特殊的性质, 即大阻尼时其稳定性也会减弱。故存在一个阻尼 β_0 值, 使得杆的

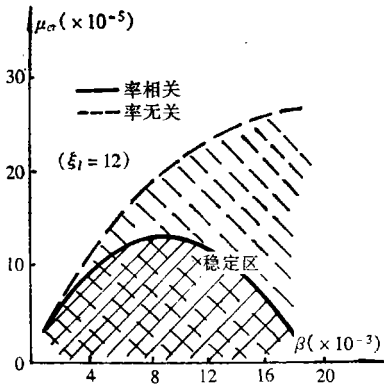


图 4

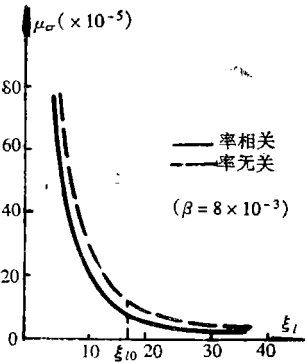


图 5

稳定性最好, 或临界屈曲载荷 μ_{cr} 取极大值。在图 4 中, $\beta_0 \approx 0.008$ 。显然, 这个 β_0 值在实际应用中有重要意义, 它的一般表达式不难通过(3.6)式求得。另由图 5 中看到, 当阻尼大小一定时, 临界屈曲载荷随杆长增加而减小, 且率相关和率无关两种情况下 $\mu_{cr} \sim \xi_l$ 曲线的形状是相似的, 此时可大致将其分为两部分, 即存在一个临界杆长 ξ_{l0} , 当 $\xi_l \leq \xi_{l0}$ 时, 临界载荷随杆长增加而急剧减小, 即杆的稳定性对其长度十分敏感, 且两种情况下临界载荷值差别较大, 即应变率效应对稳定性影响较大, 这一区间可称为稳定性对杆长和应变率效应的双重敏感区; 而当 $\xi_l > \xi_{l0}$ 时, 临界载荷的变化相当平缓, 且两种情况下临界载荷相差不大, 此时杆的稳定性对其长度和应变率效应均不敏感。在本文给出的算例中, $\xi_{l0} \approx 16$, 如图 5 所示, 其一般表达式也可以从(3.6)式近似求出。显然, ξ_{l0} 也是一个值得注意的量。总的说来, 从图 4 和图 5 看到, 应变率效应使非保守力作用下杆的塑性稳定区缩小了, 尤其是当阻尼较大及杆长较短时。

应该指出, 由 Liapunov 第二方法得到的稳定性条件一般来说是充分条件, 不一定必要。因此本文中得到的临界屈曲载荷是保守的估计。此外, 本文中采用的应力—应变关系是一个理想化的模型, 和实际材料尚有差距。但从本文的分析中可以对杆在非保守力作用下的塑性动态稳定性行为有一定性认识。鉴于结构在非保守力作用下发生塑性屈曲时所表现出的一些特殊性质, 对该问题进行深入的研究将是必要的。

五、结 论

本文通过分析非保守力作用下杆的塑性动态稳定性, 得到如下几点结论:

- (1) 杆的尺寸一定时, 小阻尼会削弱其稳定性。
- (2) 对率相关材料, 存在一最优阻尼值, 使杆的稳定性最好。此时阻尼过大也会削弱稳定性。
- (3) 小阻尼时, 应变率效应对杆的稳定性影响不大。随着阻尼的增大, 应变率效应使稳定区缩小的程度也越大。
- (4) 阻尼一定时, 存在一无量纲杆长值, 坐标轴上此值的左边为稳定性对杆的尺寸及应变率效应的双重敏感区; 其右边则为双重不敏感区。

(5) 应变率效应主要在大阻尼和粗短杆时起作用, 它使稳定区缩小。

附录 公式(2.9)的证明

考虑如下泛函的条件极值问题:

$$\begin{cases} G(w) = \inf_{A=1} \int_0^{\xi_1} w''^2 d\xi, & A = \int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi \\ w(0) = w(\xi_1) = 0, & w''(0) = w''(\xi_1) = 0 \end{cases}$$

作一泛函

$$\tilde{G}(w) = \int_0^{\xi_1} (w''^2 - \lambda w'^2) d\xi$$

应有其变分 $\delta \tilde{G} = 0$ 。由分部积分法算得

$$\delta \tilde{G} = 2(w'' \delta w' - w''' \delta w - \lambda w' \delta w) \Big|_0^{\xi_1} + 2 \int_0^{\xi_1} (w'''' + \lambda w'') \delta w d\xi$$

$$\therefore \begin{cases} w'''' + \lambda w'' = 0 \\ w(0) = w(\xi_1) = w''(0) = w''(\xi_1) = 0 \end{cases}$$

解上式得 $\lambda = \pi^2 / \xi_1^2$ 。故应有

$$\int_0^{\xi_1} w''^2 d\xi \geq \frac{\pi^2}{\xi_1^2} \int_0^{\xi_1} w'^2 d\xi$$

此即为(2.9)式。

参 考 文 献

- [1] V. V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, Oxford (1963).
- [2] H. Ziegler, *Principles of Structural Stability*, Blaisdell, Waltham (1968).
- [3] G. Herrmann, Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces, *Appl. Mech. Rev.*, 20 (1967), 103—108.
- [4] H. H. E. Leipholz, *Stability of Elastic Systems*, Leyden-Noordhoff, Amsterdam (1980).
- [5] H. H. E. Leipholz, Stability of elastic rods via Liapunov's second method, *Ing. Arch.*, 44 (1975), 21—26.
- [6] R. H. Plaut and E. F. Infante, The effect of external damping on the stability of Beck's column, *Int. J. Solids Structures*, 6 (1970a), 491—496.
- [7] S. Anantha, et al., Stability analysis of stochastically parametered nonconservative columns, *Int. J. Solids Structures*, 29 (1992), 2973—2988.
- [8] A. A. Movchan, Stability of processes on double metrics, *J. Appl. Math. Mech.*, 24 (1960), 1506—1524.
- [9] F. R. Shanley, Inelastic column theory, *J. Aero. Sci.*, 14 (1947).
- [10] L. E. Malvern, The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, *J. Appl. Mech.*, 18(2) (1951), 203—208.

Plastic Dynamic Stability of a Column under Nonconservative Forces

Jie Min

*(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and
Technology, Wuhan 430074, P. R. China)*

Abstract

In this paper Liapunov's 2nd method is used to analyze the plastic dynamic stability of a column under nonconservative forces. The column is in a viscous medium, and under the action of uniformly distributed tangential follower forces. The strain-rate effect on the stress-strain relation of materials is included in the analysis. A condition of stability is derived, and the critical buckling load is obtained. The strain-rate effect on the stability of the column is discussed.

Key words nonconservative forces, column, plastic, stability