应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 关于Graffiti的一个猜想(583)*

王流星[1]

（刘人怀推荐，1996年1月18日收到）

**摘　要**

本文给出了 Graffiti 的猜想(583)[1]的一个反例，说明猜想不真．并且得到了$I(T)+\alpha'(T)$的较好的上下界．$T$表示树；$\alpha'(T)$表示树$T$的边独立数；$I(T)$表示树$T$的反比度．

**关键词**　树　边独立数　反比度

## 一、引言与反例

设$p=|V(G)|$，$G$的度序列为$d_1$，$d_2$，…，$d_p$，则$G$的反比度$I(G)=\sum(d_1, d_2, \cdots, d_p>0)/d_i$．

1989年，Graffiti提出了一个关于树的猜想 (583)[1]：

$$\text{size}-(\text{matching}+1)\leqslant\text{inverse degree}$$

其中size表示$T$的边数，matching表示边独立数$\alpha'(T)$．

这个猜想不真，我们构造如下反例：

设　　$T_0=K_{1,4}$

设

$$V(T_k)=V(T_{k-1})\cup\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$$

$$E(T_k)=E(T_{k-1})\cup\{u_0v_0, u_0u_1, u_0u_2, u_0u_3\}$$

其中$v_0\in V(T_{k-1})$，$d_{T_{k-1}}(v_0)=1$，则$p_k=|V(T_k)|=4k+5$，$\alpha'(T_k)=k+1$．

容易得到

$$I(T_k)+\alpha'(T_k)=(15p_k+9)/16$$

如果$p_k>9$，很容易看出$I(T_k)+\alpha'(T_k)<p_k$，说明猜想(583) 不真．

本文所有专门术语和符号均来自文[2]．

## 二、主 要 结 果

虽然Graffiti的猜想(583)不真，但是它提出了一个关于$\alpha'(T)+I(T)$的上下界问题．

---

* 甘肃省、铁道部自然科学基金资助项目

1 黑龙江省水利高等专科学校基础部，哈尔滨 150086

设$F$是满足如下条件的树的集合:

(i) $K_{1,4}\in F$;

(ii) 对任意$T\in F$, $T\cup K_{1,3}+uv\in F$, 这里$d_T(u)=1$, $d_{K_{1,3}}(v)=3$, 且$V(T)\cap V(K_{1,3})=0$.

设$F'=\{T'_k: k=0, 1, 2, \cdots\}$, 这里$T_0=K_{1,1}$,

$$V(T'_k)=V(T'_{k-1})\cup\{u_1, u_2\}$$
$$E(T'_k)=E(T'_{k-1})\cup\{v'u_1, u_1u_2\}, \qquad v'\in V(T'_{k-1}), u_1, u_2\bar{\in} V(T'_{k-1})$$
$$d_{T'_{k-1}}(v')=k+1=|V(T'_k)|/2$$

容易计算

$$\alpha'(T'_k)+I(T'_k)=\frac{5}{4}|V(T'_k)|-\frac{1}{2}+\frac{2}{|V(T'_k)|}$$

**定理 1** 设$T$为$p(p\geqslant 2)$阶树, 则

$$\frac{15p+9}{16}\leqslant\alpha'(T)+I(T)\leqslant\frac{5p}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}$$

且仅当$T\in F'$时上界可达, $T\in F$时下界可达.

**证明** 采用归纳法证明.

当$2\leqslant p\leqslant 5$时, 定理显然成立.

假设阶数不大于$p$时定理成立, 现证明阶数为$p+1$时定理成立.

当$T$为$p+1$阶树时, 分两种情况来证明.

若$T=K_{1,p}$, 则

$$\frac{15(p+1)+9}{16}\leqslant\alpha'(T)+I(T)=p+1+\frac{1}{p}\leqslant\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}$$

显然成立.

若$T\neq K_{1,p}$, 则存在$u\in V(T)$, $N(u)=\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, $m\geqslant 1$, $d(u_i)=1$, $1\leqslant i\leqslant m$, $d(u_0)\geqslant 2$, 很容易选择$u$满足:

$$T-uu_0=T_u\cup T_{u_0},\quad |V(T_u)|\leqslant|V(T_{u_0})|$$

那么 $$T_u=K_{1,m},\quad \alpha'(T)=\alpha'(T_{u_0})+1$$

先证定理1的左端不等式.

$$\alpha'(T)+I(T)=I(T_{u_0})+\alpha'(T_{u_0})+1+m+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{d(u_0)-1}+\frac{1}{d(u_0)}$$

$$\geqslant\frac{15(p-m)+9}{16}+m+1+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}$$

$$\geqslant\frac{15(p+1)+9}{16}+\frac{m+1}{16}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}$$

$$\geqslant\frac{15(p+1)+9}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$$

$$=[15(p+1)+9]/16$$

且$\alpha'(T)+I(T)\geqslant[15(p+1)+9]/16$当且仅当$T_u\in F$, $d(u_0)=2$, $m=3$时成立.

因此, $\alpha'(T)+I(T)=[15(p+1)+9]/16$当且仅当$T\in F$时成立.

故定理1左端不等式成立.

再证定理1的右端不等式.

$$\alpha'(T)+I(T)\leqslant\frac{5(p-m)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p-m}+m+1+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}$$

$$=\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p-m}-\frac{2}{p+1}-\frac{m+1}{4}+\frac{1}{m+1}$$

$$-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}$$

$$\leqslant\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}$$

若$d(u_0)\leqslant(p+1)/2$，则

$$\alpha'(T)+I(T)\leqslant\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}$$

且$\alpha'(T)+I(T)=5(p+1)/4-1/2+2/(p+1)$当且仅当$T\in F'$时成立.

若$d(u_0)>(p+1)/2$，则至少存在两个顶点 $v_1$，$v_2\in N(u_0)$，$d(v_1)=d(v_2)=1$，且 $\alpha'(T-v_1)=\alpha'(T)$.

从而

$$\alpha'(T)+I(T)=\alpha'(T-v_1)+I(T-v_1)-1/d(u_0)(d(u_0)-1)+1$$

$$\leqslant\frac{5p}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}+1$$

$$=\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p}-\frac{2}{p+1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{d(u_0)(d(u_0)-1)}$$

$$\leqslant\frac{5(p+1)}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p+1}$$

因此$\alpha'(T)+I(T)\leqslant5(p+1)/4-1/2+2/(p+1)$当且仅当$T\in F'$时等式成立. 定理1证毕.

根据$\alpha'(T)$和边覆盖数$\beta'(T)$的关系$\alpha'(T)+\beta'(T)=p$，我们可以得到如下推论.

**推论1** 设$T$为$p(p\geqslant2)$阶树，则

$$\frac{-(p-9)}{16}\leqslant I(T)-\beta'(T)\leqslant\frac{p}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}$$

根据文[2]，对于二部图$G$，$\alpha'(G)=\beta'(G)$，$\beta'(G)$为$G$的边覆盖数，我们能够得到

**推论2** 若$T$为$p(p\geqslant2)$阶树，则

$$\frac{15p+9}{16}\leqslant\beta'(T)+I(T)\leqslant\frac{5p}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}$$

## 参 考 文 献

[1] F. R. K. Chung, The average distance and the independence number, *J. of Graph Theory*, 12 (1988), 229—235.

[2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The MacMillan Press Ltd. (1976).

# On One of Graffiti's Conjecture(583)

Wang Liuxing

(*Heilongjiang Hydraulic Engineering College, Harbin 150086, P. R. China*)

**Abstract**

In the paper, a counterexample of the Graffiti's conjecture (583) is given out, which proves the conjecture is flase. And the best bounds of $I(T)+\alpha'(T)$ are got, where $T$ denotes a tree, $I(T)$ denotes the inverse degree of $T$ and $\alpha'(T)$ is the matching of $T$.

**Key words** tree, edge-independence number, inverse degree