

# 电磁场中变厚度载流圆板的非线性问题

常福清<sup>1</sup> 徐耀玲<sup>1</sup> 白象忠<sup>1</sup>

(李家春推荐, 1995年6月9日收到, 1996年2月5日收到修改稿)

## 摘 要

本文建立了在非正常电磁场和机械场作用下变厚度载流弹性圆板在非线性变形状态下的磁弹性二维关系方程和运动方程, 给出了弹性圆板在轴对称条件下的数值解。

**关键词** 磁弹性 弹性圆板 非线性

## 一、引 言

近几十年来, 物理力学界十分注意弹性体在机械场和电磁场耦合作用下的应力与变形问题, 导致了磁弹性理论的产生和发展。

在研究一些处于强电磁场环境中工作的结构或部件的应力与变形问题时引入电磁场作用因素, 更加合理地考虑影响结构或零部件强度、刚度和稳定性的各种外来载荷, 对结构及零部件的设计和分析计算有着重要的理论价值和现实意义。近些年来, 许多学者在这方面进行了积极的探索。例如, 利用磁弹性理论研究受有纵向和横向磁场作用的板壳在低粘度气体和超音速气流中的稳定性问题<sup>[1]</sup>, 为飞行器的结构设计提供了依据; 对Tokamak聚变装置中角向场线圈的磁弹性屈曲研究解决了聚变装置中元件的变形问题<sup>[2]</sup>; 通过对弹性构件施加磁场并导入电流以研究裂纹前缘的应力状态并寻找止裂机理<sup>[3]</sup>等等, 都是磁弹性应用于工程实践的极好例证。随着磁弹性理论研究工作的深入和理论上的完善, 它在许多工业领域中发挥了积极作用, 例如核能工业、航天航空工业、电力电子工业、电磁材料及电磁加工工业等等。因此可以说, 磁弹性理论将会成为今后固体力学的主要发展方向之一, 它对于促进工业技术革命和实现科学技术现代化都会起到重要作用。

从磁弹性理论的产生到现在已经有了几十年的历史, 但取得卓有成效的成果还是70年代以来的事。1972年, Prata<sup>[4]</sup>给出了系统化的磁弹性线性方程, 并用离散化方法分析了平面磁弹性波传播的一些具体问题。之后, Ven 等人<sup>[5]</sup>解决了铁磁薄板在横向磁场中的失稳问题。Амбарцумян等人<sup>[6]</sup>得到了薄板、薄壳的磁弹性基本方程, 并求解了处于定常磁场中的导电板壳的振动及稳定性问题。Мольченко<sup>[7]</sup>则在他的著作中较为系统地给出了柔性载流板壳的电动力学方程和运动方程, 并给出了针对轴对称问题的数值化方法。

本文针对在非正常电磁场和机械场耦合作用下变厚度载流圆板的非线性变形问题进行了

1 东北重型机械学院力学教研室, 黑龙江齐齐哈尔 161042

分析研究, 给出了变厚度圆板在耦合场作用下的磁弹性非线性关系方程、运动方程和洛仑兹力表达式, 建立了这些方程在轴对称条件下的数值解系统, 并以变厚度环形板为例, 计算了该板处于电磁场中时在洛仑兹力、侧向电流及机械载荷联合作用下的应力与变形, 为这类元件的计算分析提供了理论方法, 也为进一步开展这方面的工作打下了基础.

## 二、圆板的磁弹性基本方程

### 2.1 圆板的磁弹性关系方程

设有各向同性导电弹性介质  $A_R$ , 其在  $Oxyz$  坐标系中构成的几何参数为: 体积  $V$ , 封闭表面  $s$ , 封闭迴线  $l$  及  $s$  的外单位法线  $\mathbf{n}$ . 在缓慢运动和变形条件下, 认为变形前后体积单元大小没有变化, 且在数值上忽略位移电流和体电荷密度  $R_e$  的影响, 则在任一瞬时  $t$ , 有 Maxwell 电动力学微分方程<sup>[7]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{cT} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

相应的欧姆定律和洛仑兹力为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} &= \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}] \\ \rho \mathbf{f}^* &= [\mathbf{J}_{cT} \times \mathbf{B} + \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  分别为电场和磁场的感应矢量和强度矢量;  $\mathbf{J}$  为介质内的体电流密度;  $\mathbf{J}_{cT}$  为侧向电流密度矢量,  $\sigma$  为介质的电导率常数;  $\mathbf{u}$  为介质内任一点的速度矢量;  $\mathbf{f}^*$  为介质的洛仑兹力矢量;  $\rho$  为介质密度.

由式(2.1)、(2.2)得:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{J} + \mathbf{J}_{cT} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (2.3b)$$

在时变电磁场中, 取  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{J}$  的改变量  $\delta \mathbf{H}$  和  $\delta \mathbf{J}$  分别乘在上式两端并相加, 再利用矢量等式

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$$

可得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{H} + \left( \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \operatorname{rot} \delta \mathbf{H} + (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{cT}) \cdot \delta \mathbf{J} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \delta \mathbf{J} \\ & + \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{\sigma} (\mathbf{J} \times \delta \mathbf{H}) - (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \delta \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \delta \mathbf{J} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

将式(2.4)对物体所占体积  $V$  积分, 并利用奥—高定理, 边界条件  $(\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H})|_s = 0$ ,  $(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{J})|_s = 0$  及矢量运算公式, 得到

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{H} + (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{cT}) \cdot \delta \mathbf{J} + \left( \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \operatorname{rot} \delta \mathbf{H} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \delta \mathbf{J} \right\} dV \\ & = \oiint_s \mathbf{F} \delta \mathbf{J} ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中  $\mathbf{F}$  为给定矢量函数.

在圆板上建立正交曲线坐标系  $(r, \theta, z)$ . 将式(2.5)积分号内的项向正交曲线坐标轴投

影, 经适当变换, 在 $\delta\mathbf{H}$ ,  $\delta\mathbf{J}$ 及其分量均为独立变分的条件下, 得到圆板的磁弹性关系方程:

$$-\frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[ \partial \left( \frac{r}{\sigma} J_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_1^+ + B_1^-) + \frac{\partial u}{\partial t} B_3 \right) / \partial r - \partial \left( \frac{1}{\sigma} J_1 - \frac{\partial v}{\partial t} B_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_2^+ + B_2^-) \right) / \partial \theta \right] \quad (2.6)$$

式中  $J_1 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial H_3}{\partial \theta} - \frac{r(H_2^+ - H_2^-)}{h} \right)$ ,  $J_2 = \left( -\frac{\partial H_3}{\partial r} + \frac{(H_1^+ - H_1^-)}{h} \right)$

$B_i$  ( $i=1, 2, 3$ )为外磁场感应分量;  $H_i$ 为外磁场强度分量;  $B_i^{\pm}, H_i^{\pm}$ 分别为相应量在板上、下表面的量值;  $u, v, w$ 为沿坐标轴方向的位移分量;  $h=h(r)$ 为板的厚度. 式(2.6)亦可用电场强度分量表示:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial B_3}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rE_2)}{\partial r} - \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \right] \\ \sigma \left[ E_1 + \frac{\partial v}{\partial t} B_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_2^+ + B_2^-) \right] &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial H_3}{\partial \theta} + \frac{r(H_2^+ - H_2^-)}{h} \right) \\ \sigma \left[ E_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_1^+ + B_1^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_3 \right] &= -\frac{\partial H_3}{\partial r} + \frac{H_1^+ - H_1^-}{rh} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式中 $E_i$  ( $i=1, 2, 3$ )为电场强度分量.

### 2.2 圆板的运动方程

在时变电磁场中, 设载流圆板首先满足薄板弯曲理论的有关假设, 同时又满足磁弹性假设, 即有下列关系成立:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_1(r, \theta, t), & E_2 &= E_2(r, \theta, t) \\ E_3 &= \frac{\partial v}{\partial t} B_1 - \frac{\partial u}{\partial t} B_2 \\ J_1 &= J_1(r, \theta, t), & J_2 &= J_2(r, \theta, t), & J_3 &= 0 \\ H_1 &= \frac{1}{2} (H_1^+ + H_1^-) + \frac{z}{h} (H_1^+ - H_1^-) \\ H_2 &= \frac{1}{2} (H_2^+ + H_2^-) + \frac{z}{h} (H_2^+ - H_2^-) \\ H_3 &= H_3(r, \theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在时变电磁场中的圆板还服从非线性状态下薄板理论的几何、物理和力学方程. 注意到电磁场中导电介质的运动方程:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho(\mathbf{f} + \mathbf{f}^*) + \text{div} \mathbf{P} \quad (2.9)$$

式中 $\mathbf{f}$ 为体积力矢量;  $\mathbf{P}$ 为表面力矢量. 以及强度边界条件:

$$[(\sigma^{in} + T^{in}) \mathbf{n}_R \cdot \mathbf{R}_n] |_{s^{\pm}} = \mathbf{P}_{\text{nac}}^{\pm} + \mathbf{P}_{\text{mag}}^{\pm} \quad (2.10)$$

式中 $\sigma^{in}, T^{in}$ 分别为表面上的正应力、剪应力矢量;  $\mathbf{R}_n$ 为外表面上指定点的法向初始矢径;  $s^{\pm}$ 指板的上下表面;  $\mathbf{P}_{\text{nac}}^{\pm}$ 为给定的机械力表面矢量;  $\mathbf{P}_{\text{mag}}^{\pm}$ 为由电磁场所确定的表面力矢量.

利用虚位移原理, 使式(2.9)、(2.10)与下列积分式等价:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iint_{(\Sigma)} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{in} \delta \varepsilon_{in} dz \right\} r dr d\theta - \rho \iint_{(\Sigma)} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left( f^* - \frac{\partial^2 u^z}{\partial t^2} \right) \delta u^z dz \right\} r dr d\theta \\
& - \int_{(L)} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z - \tau_z) \delta u^z \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz \right\} ds_t \\
& - \iint_{(\Sigma)} \left\{ \left( \sigma_{\pm z}^{\pm h/2} + \tau_{\pm z}^{\pm h/2} \right) \delta u^{h/2} \right\} r dr d\theta = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

式中 $\Sigma$ 为板的中性面区域； $L$ 为中性面的封闭边界线。在 $\Sigma$ 域内的位移变分 $\delta u$ 及环线 $L$ 内的位移矢量变分 $\delta u^z$ 及它们的分量均为独立变量的条件下，考虑表面机械力作用，得到在时变磁场中载流圆板的运动方程：

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial(rN_1)}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \theta} - N_2 + r(P_1 + f_1 + \rho f_1^*) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 S)}{\partial r} + r(P_2 + f_2 + \rho f_2^*) = r\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial(rQ_1)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + r(P_3 + f_3 + \rho f_3^*) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial(rM_1)}{\partial r} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} - M_2 - r(N_1\theta_1 + S\theta_2) - rQ_1 = r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial(M_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 M_{12})}{\partial r} - r(N_2\theta_2 + S\theta_1) - r\theta_2 = r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \right\} \tag{2.12}$$

式中 $N_1, N_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}$ 分别为载流圆板的内力矩和力矩； $\theta_1, \theta_2$ 为转角。由式(2.2)，当 $J_{cT} = J_c = 0$ 时，洛伦兹力的投影形式为：

$$\left. \begin{aligned}
\rho f_1^* &= hJ_{cT} B_3 + \sigma h E_2 B_3 - \frac{\partial u}{\partial t} h B_3^2 \sigma + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \sigma h (B_1^+ - B_1^-) B_3 \\
\rho f_2^* &= J_{cT} h B_3 - \sigma h E_1 B_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_2^+ + B_2^-) \sigma h B_3 - \frac{\partial v}{\partial t} \sigma h B_3^2 \\
\rho f_3^* &= \frac{1}{2} h [J_{cT} (B_2^+ + B_2^-) - J_{cT} (B_1^+ + B_1^-)] + \sigma h \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} (B_2^+ + B_2^-) \right. \\
& \quad \left. + \frac{h}{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} (B_2^+ - B_2^-) \right] B_3 - \sigma h \frac{\partial w}{\partial t} \left[ \frac{1}{4} (B_2^+ + B_2^-)^2 + \frac{1}{12} (B_2^+ - B_2^-)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} (B_1^+ + B_1^-)^2 + \frac{1}{12} (B_1^+ - B_1^-)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \sigma h B_3 (B_1^+ + B_1^-) \\
& \quad \left. + \frac{1}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \sigma h^2 B_3 (B_1^+ - B_1^-) + \frac{1}{2} \sigma h E_1 (B_2^+ + B_2^-) - \frac{1}{2} \sigma h E_2 (B_1^+ + B_1^-) \right]
\end{aligned} \right\} \tag{2.13}$$

### 2.3 初始条件与边界条件

确定弹性圆板在电磁场中的磁弹性关系方程和运动方程，需给出初始条件和边界条件。

以导体与外部未极化的不导电介质接触时为初始条件，即当 $t=0$ 时， $\mathbf{u}=0, \dot{\mathbf{u}}=0, \ddot{\mathbf{u}}=0, \mathbf{D}=0, \mathbf{B}=0, \mathbf{D}^{(c)}=0, \mathbf{B}^{(c)}=0$ ，其中 $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ 为速度和加速度矢量，角标 $(c)$ 是指外部介质的量值。

边界条件为:

$$H_{c_p} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} H_3^z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{r_1} - Q_{r_1} - F_{r_1} = 0, \quad q_{\theta_1} - Q_{\theta_1} - F_{\theta_1} = 0, \quad q_{z_1} - Q_{z_1} - F_{z_1} = 0 \\ M_{r_1} = \psi_{r_1}, \quad M_{r_1\theta_1} = 0, \quad \psi_{r_1\theta_1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

式中  $H_{c_p}$  为边界处的平均磁场强度;  $H_3^z$  为磁场强度分量;  $R$  为边界上的曲率半径;  $q_{r_1}, q_{\theta_1}, q_{z_1}$  分别为相应方向内力的边界值;  $Q_{r_1}, Q_{\theta_1}, Q_{z_1}$  分别为相应方向作用的机械力;  $F_{r_1}, F_{\theta_1}, F_{z_1}$  分别为相应方向作用的电磁力;  $M_{r_1}, M_{r_1\theta_1}$  分别为边界上的机械弯矩和扭矩;  $\psi_{r_1}, \psi_{r_1\theta_1}$  分别为边界上的磁场作用弯矩和扭矩;  $r_1, \theta_1, z_1$  为边界环线上的正交曲线坐标.

### 三、非定常电磁场中变厚度圆板的轴对称问题

#### 3.1 方程的简化

设作用在板表面的磁场强度和机械力都是已知的. 在轴对称情况下, 有  $P_2=0, f_2=0, \rho f_2^*=0, v=0, S=0, E_1=0, B_2^+=B_2^-=0, H_2^+=H_2^-=0, \theta_2=0, M_{12}=0, Q_2=0$ . 其余的量都只是  $r$  和  $t$  的函数, 由式 (2.7) 和 (2.12) 得:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_2)}{\partial r} \\ \sigma E_2 + \sigma \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_1^+ + B_1^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_1 \right] = -\frac{\partial H_3}{\partial r} + \frac{H_1^+ - H_1^-}{rh} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (rN_1)}{\partial r} + N_2 + r(P_1 + f_1 + \rho f_1^*) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rQ_1)}{\partial r} + r(P_3 + f_3 + \rho f_3^*) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial (rM_1)}{\partial r} - r(N_1\theta_1) - rQ_1 = r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

而洛伦兹力可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \rho f_1^* = hJ_{2cT}B_3 + \sigma hE_2B_1 - \frac{\partial u}{\partial t} \sigma hB_3 + \frac{1}{2} \sigma h(B_1^+ + B_1^-)B_3 \frac{\partial w}{\partial t} \\ \rho f_3^* = -\frac{h}{2} J_{2cT}(B_1^+ + B_1^-) - \frac{\partial w}{\partial t} \sigma h \left[ \frac{1}{4} (B_1^+ + B_1^-)^2 + \frac{1}{12} (B_1^+ - B_1^-)^2 \right] \\ + \frac{1}{12} \frac{\partial u}{\partial t} \sigma hB_3(B_1^+ + B_1^-) + \frac{1}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \sigma h^2 (B_1^+ - B_1^-) - \frac{1}{2} \sigma hE_2(B_1^+ + B_1^-) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

#### 3.2 解的形式与计算方法

在轴对称问题中, 选取基本未知量为  $u, w, \theta_1, N_1, Q_1, M_1, B_3, E_2$ , 设定所研究问题满足几何非线性条件下薄板弯曲时的几何、物理及内力关系方程, 由 (3.1) 式及 (3.2) 式可得解的形式为:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\mu^2}{Eh} N_1 - \frac{\mu}{r} u - \frac{1}{2} \theta_1^2 \\
 \frac{\partial w}{\partial r} &= -\theta_1 \\
 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} &= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} M_1 - \frac{\mu}{r} \theta_1 \\
 \frac{\partial N_1}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[ (\mu-1) N_1 + \frac{Eh}{r} u \right] - (P_1 + f_1 + \rho f_1^*) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial r} &= -\frac{1}{r} Q_1 - (P_3 + f_3 + \rho f_3^*) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial M_1}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left[ (\mu-1) M_1 + \frac{Eh^3}{12} \frac{\theta_1}{r} \right] + N_1 \theta_1 + Q_1 + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial B_3}{\partial r} &= -\sigma \mu_0 \left[ E_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} (B_1^+ + B_1^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_3 \right] - \frac{B_1^+ - B_1^-}{rh} \\
 \frac{\partial E_2}{\partial r} &= -\frac{\partial B_3}{\partial t} - \frac{1}{r} E_2
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式中  $E$  为弹性模量； $\mu$  为泊松系数； $\mu_0$  为磁导率。

在非定常电磁场和机械力作用下，板内的应力和变形是针对指定瞬时求解，因此，需将板的运动过程分为若干小时间段，按时间顺序求解。为按时间分离变量，采用有限等差式：

$$\left. \begin{aligned}
 u^{t+\Delta t} &= \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{(\Delta t)^2 \beta} - \left[ \frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + u^t (0.5 - \beta) \right] \frac{1}{\beta} \\
 \dot{u}^{t+\Delta t} &= \dot{u}^t + 0.5 \Delta t (u^t + u^{t+\Delta t})
 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中  $\Delta t$  为时间增量； $\beta$  为系统参数，取  $\beta = 0.25$ 。

将式(3.4)写成矢量形式：

$$\frac{d\mathbf{N}}{dr} = \mathbf{F}(r\mathbf{N}) \quad (3.6)$$

式中  $\mathbf{N} = \{u, w, \theta_1, N_1, Q_1, M_1, B_3, E_2\}^T$ ， $\mathbf{F}$  为八维矢量。一般情况下的边界条件为：

$$D_1 \mathbf{N}|_{r=r_0} = \mathbf{d}_1, \quad D_2 \mathbf{N}|_{r=r_1} = \mathbf{d}_2 \quad (3.7)$$

式中  $D_1, D_2$  为给定秩为  $K \times 8$  或  $(8-K) \times 8$  ( $K < 8$ ) 的直角矩阵， $K$  为方程组(3.6)中方程式的数量； $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  为给定的矢量。

为求解式(3.4)的非线性问题，通常采用迭代法，使非线性问题转化为一系列的线性问题。所采用的迭代方程为：

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{N}^{(k+1)}}{dr} &= \mathbf{F}(r, \mathbf{N}^{(k)}) + \Gamma(r, \mathbf{N}^{(k)}) (\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}) \\
 D_1 \mathbf{N}_1^{(k+1)}(r_0) &= \mathbf{d}_1, \quad D_2 \mathbf{N}^{(k+1)}(r_1) = \mathbf{d}_2
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式中  $\Gamma(r, \mathbf{N}^{(k)})$  为雅可比矩阵， $k=1, 2, 3, \dots$ 。

为求得稳定的计算过程，采用质量坐标  $m = \rho r$ ，则由式(3.4)有如下迭代方程：

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du^{(k+1)}}{dm} &= \frac{1-\mu^2}{\rho E h} N_1^{(k+1)} - \frac{\mu}{m} u^{(k+1)} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\theta_1^{(k)})^2 - \theta_1^{(k)} \theta_1^{(k+1)} \right] \\
 \frac{dw^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{1}{\rho} \theta_1^{(k+1)} \\
 \frac{d\theta_1^{(k+1)}}{dm} &= \frac{12(1-\mu^2)}{\rho E h^3} M_1^{(k+1)} - \frac{\mu}{m} \theta_1^{(k+1)} \\
 \frac{dN_1^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{1-\mu}{m} N_1^{(k+1)} + \frac{\rho E h}{m^2} u^{(k+1)} + h(\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k+1)} - \frac{1}{\rho} \{ h J_{2cT} B_3^{(k+1)} \\
 &\quad + \sigma h B_{10} [ (w^{t+\Delta t})^{(k)} (B_3^{(k+1)} - B_3^{(k)}) + (w^{t+\Delta t})^{(k+1)} B_3^{(k)} ] \\
 &\quad - \sigma h [ (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k)} (2B_3^{(k)} B_3^{(k+1)} - 2(B_3^{(k)})^2 + (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k+1)} (B_3^{(k)})^2) \\
 &\quad + \sigma h [ E_2^{(k)} (B_3^{(k+1)} - B_3^{(k)}) + E_2^{(k+1)} B_3^{(k)} ] \} \\
 \frac{dQ_1^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{1}{m} Q_1^{(k+1)} + h(\dot{w}^{t+\Delta t})^{(k+1)} - \frac{1}{\rho} \{ [ -h J_{2cT} B_{10} \\
 &\quad - \sigma h (\dot{w}^{t+\Delta t})^{(k+1)} B_{10}^2 ] + \sigma h B_{10} [ (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k)} + (B_3^{(k+1)} - B_3^{(k)}) \\
 &\quad + (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k+1)} B_3^{(k)} ] - \sigma h B_{10} E_2^{(k+1)} + P_3 \} \\
 \frac{dM_1^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{1-\mu}{m} M_1^{(k+1)} + \frac{1}{\rho} Q_1^{(k+1)} + \frac{\rho E h^3}{12m^2} \theta_1^{(k+1)} + \frac{1}{\rho} [ N_1^{(k)} (\theta_1^{(k+1)} \\
 &\quad - \theta_1^{(k)}) + N_1^{(k+1)} \theta_1^{(k)} ] + \frac{h^3}{12} (\ddot{\theta}^{t+\Delta t})^{(k+1)} \\
 \frac{dB_3^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{\sigma \mu_c}{\rho} [ E_2^{(k+1)} + B_{10} (w^{t+\Delta t})^{(k+1)} - (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k)} (B_3^{(k+1)} \\
 &\quad - B_3^{(k)}) - (\dot{u}^{t+\Delta t})^{(k+1)} B_3^{(k)} ] - \frac{B_1^+ - B_1^-}{\rho h r} \\
 \frac{dE_2^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{1}{\rho} (\dot{B}_3^{t+\Delta t})^{(k+1)} - \frac{E_2^{(k+1)}}{m}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

式(3.9)可编程在计算机上求解, 然后根据求解出的未知量进一步求出应力值。

### 3.3 算例

图1所示变厚度铝合金环形板, 处于  $\mathbf{B} = \{B_{10}, 0, 0\}$  的恒定磁场中, 并承受纵向分布力  $P_3$  的作用。向该板引入的侧向电流为  $\mathbf{J}_{cT} = \{0, J_{2cT}, 0\}$ 。板的内、外边界均为铰支。给定  $B_3 = B_0 \sin \omega t$  为板磁弹性方程组的内外边界条件。取板厚为  $h = h_0(\alpha + \beta r)$ , 有关已知数据为:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2.5, \quad \beta = -2, \quad h_0 = 2 \times 10^{-4} \text{m}, \quad r_0 = 0.5 \text{m} \\
 r_1 &= 1.0 \text{m}, \quad E = 7.1 \times 10^{10} \text{N/m}^2, \quad \mu = 0.34 \\
 \sigma &= 3.63 \times 10^7 \text{s/m}, \quad \mu_c = 1.256 \times 10^{-6} \text{H/m} \\
 \omega &= 3.1416 \times 10^2 \text{ 1/s}, \quad \rho = 2760 \text{kg/m}^2, \quad P_3 = -25 \text{N/m}^2 \\
 J_2 &= 5 \times 10^4 \sin \omega t \text{ A/m}^2, \quad B_{10} = 0.5 \text{T}, \quad (B_0)_{r=r_0} = -0.1 \text{T} \\
 (B_0)_{r=r_1} &= 0, \quad f_1 = f_2 = f_3 = 0
 \end{aligned}$$

计算的初始条件为:

$$t=0 \text{ 时, 有 } \mathbf{N}(m, t) = 0, \quad \dot{u}(m, t) = 0, \quad w(m, t) = 0$$

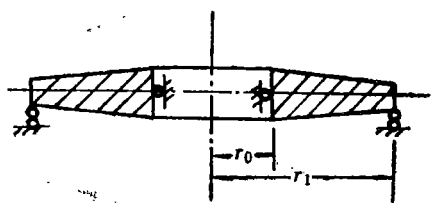


图1 变厚度环形板

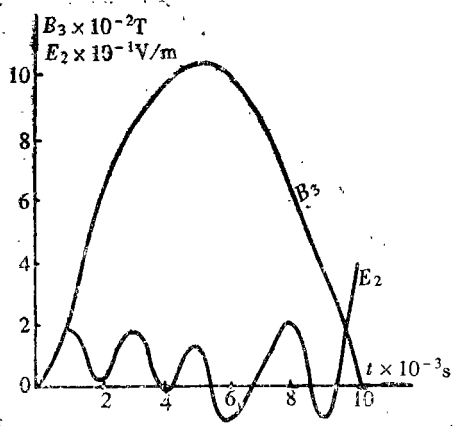


图2  $r=r_0$ 处  $B_3, E_2-t$  曲线

$\dot{\theta}(m, t) = 0$ , 计算时间  $t = 1 \times 10^{-2} s$ ,  $\Delta t = 1 \times 10^{-3} s$

计算的边界条件为:

$r=r_0, u=0, Q_1=0, M_1=0, B_3 = -0.1 \sin \omega t$

$r=r_1, u=0, w=0, M_1=0, B_3=0$

显见, 本例满足轴对称问题的条件, 可按轴对称问题求解。

对式(3.9)编程, 带入有关已知数据在计算机上运算, 得到在给定初始条件和边界条件下在电磁场和机械载荷耦合作用下变厚度载流环形板内的应力、位移及其它需求解的未知量, 图2、3、4给出了依据计算结果绘出的有关曲线: 图2给出了  $r=r_0$  (内边界) 处电场强度  $E_2$  和磁感应强度  $B_3$  随时间变化的情况; 图3给出了在电磁场和机械力作用下  $r=r_0$  处的位移  $w$  随时间的变化情况; 图4则给出了在  $t=1 \times 10^{-2} s$  时板的上下表面的径向应力  $\sigma_1^\pm$  和环向应力  $\sigma_2^\pm$  的分布情况, 图中实线为电磁场和机械力共同作用的情况, 而虚线为机械力单独作用的情况。

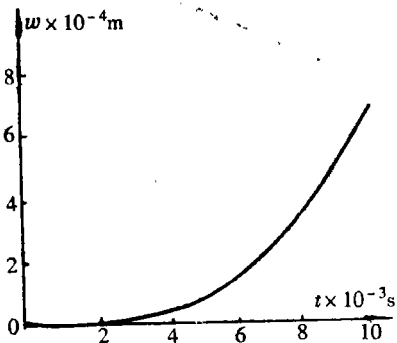


图3  $r=r_0$ 处  $w-t$  曲线

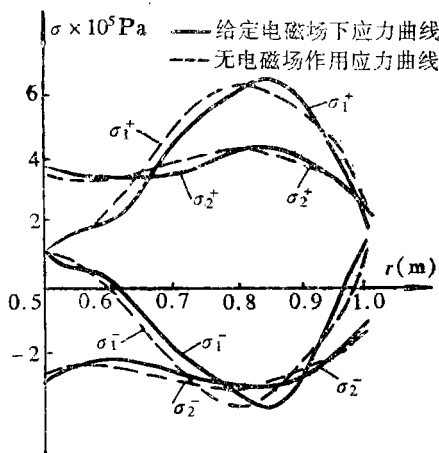


图4  $t=1 \times 10^{-2} s$ 处  $\sigma-r$  曲线



## 参 考 文 献

- [ 1 ] П. А. Мкртчян, Флаттер проводящей пластинки в потоке слабопроводящего газа при действии магнитного поля, АН Арм ССР, *Механика*, 28(4) (1975), 12—26; *РЖ. Мх.*, 5В (1976), 408.
- [ 2 ] 谢慧才、方葛丰、王德满, 平面圆形线圈的磁弹性屈曲, *力学学报*, (6) (1991), 706—711,
- [ 3 ] Б. А. Кудрявцев, В. Э. Партоян и Б. Д. Рубинский, Магнитотермоупругое поле в теле с полубесконечным разрезом, *ПММ*, 44(5) (1980), 916—922.
- [ 4 ] P. Pratar, Plane waves in thermoelasticity and magneto-thermoelasticity, *Int. J. Eng. Sci.*, 10(5) (1972), 467—477.
- [ 5 ] A. A. F. Ven and de Ven, Magnetoelastic buckling of thin plates in a uniform transverse magnetic field, *J. Elast.*, 8(3) (1978), 297—312.
- [ 6 ] С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян и М. В. Белубекян, *Магнитоупругость Тонких Оболочек и Пластин*, Изд «Наука», Мос. (1977).
- [ 7 ] Л. В. Мольченко и Ю. М. Рудов, *Магнитоупругость Нелинейных Токонесущих Оболочек и Газодинамика Струйных Течений*, Выпашкола, Киев (1989).

## Nonlinear Problems of Current-Carrying Round Plates with Varying Thickness in the Electromagnetic Field

Chang Fuqing    Xu Yaoling    Bai Xiangzhong

(The Northeast Institute of Heavy Machinery,  
Qiqihar 161042, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the equations of motion and two-dimensional magnetoelastic equations of current carrying round elastic plates with varying thickness in nonlinear deformation under the unsteady electromagnetic field and mechanical field are established, and the numeral solutions of round elastic plates in axisymmetrical deformation are given.

**Key words** magnetoelastic, round elastic plate, nonlinear