

受轴力作用的平面杆的圣维南问题

黄 民 丰¹

(钱伟长推荐, 1994年10月23日收到)

摘 要

本文利用文[1]中讨论的主轴应力坐标上的平衡微分方程, 通过假设平面杆在轴力作用下的主轴应力曲线, 获得了该问题的圣维南问题的解, 指出剪应力的衰减速度是 α^3/y^3 , 轴力趋于常数的速度是 α^2/y^2 .

关键词 弹性力学 平面问题 圣维南问题 主轴应力

一、前 言

众所周知, 圣维南原理是被广泛运用的原理之一. 但是, 作为弹性力学的基本原理之一, 虽然通过分析和试验证实, 却并没有得到理论上的充分证明. 因为即使最简单的有关圣维南问题的弹性力学问题, 要获得其基本解或解析解也是非常困难的. 本文试图用主轴应力曲线坐标, 讨论平面杆在轴力作用下的圣维南问题.

二、基本方程回顾

文[1]中, 我们已经证明, 对于一正交主轴应力曲线

$$u=u(x, y), v=v(x, y)$$

和主轴应力 σ_1 和 σ_2 , 可以找到相应的 σ'_1 和 σ'_2 , 使

$$\sigma'_1=r_2\sigma_1, \sigma'_2=r_1\sigma_2$$

r_1 和 r_2 是曲线坐标的特征长度.

$$r_1=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

$$r_2=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

则 σ'_1 和 σ'_2 满足平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} + r_2 K_2 \sigma'_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_2}{\partial v} + r_1 K_1 \sigma'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

¹ 北京市房地产科学技术研究所, 北京 100021

K_1, K_2 分别是曲线 u, v 的曲率。上式还可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sigma'_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sigma'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中 φ 是转角，即是曲线的切线与 x 轴或 y 轴的夹角。

三、正交曲线族的假设

如图 1 所示的平面杆，远端满足边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_y &= \text{const} \\ \sigma_x &= 0 \quad (\text{当 } y \rightarrow \infty) \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right.$$

在杆的其它边界上，外力为0。

实际上，因 A 点上作用一集中力使其成为奇异点以外，所有边界上均是主轴应力曲线。我们可假设两种边界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \quad (\text{在边界①上}) \\ \sigma_2 &= \text{const} \quad (\text{在边界②上}) \end{aligned} \right\}$$

设正交曲线族

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \frac{a^2 + y^2}{x^2 + y^2} &= u^2 \\ (y^2 + a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2 &= v^4 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$y \rightarrow \infty$ 等价 $v \rightarrow \infty$ ， $y=0$ 和 $x=a$ 等价 $u^2=1$ ，相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \quad (\text{在 } u^2=1 \text{ 上}) \\ \sigma_2 &= \text{const} \quad (\text{当 } v \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)'$$

该曲线族当 $a \rightarrow \infty$ 时，转换为

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{v^4}{a^4} &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\}$$

此为半无限平面上作用一集中力时的主轴应力曲线。

由方程(3.1)可见，要求出 x, y 关于 u, v 的解析表达式较困难，需要解一元四次方程。因此，为计算 r_1, r_2, K_1 和 K_2 ，我们利用微分转换式：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

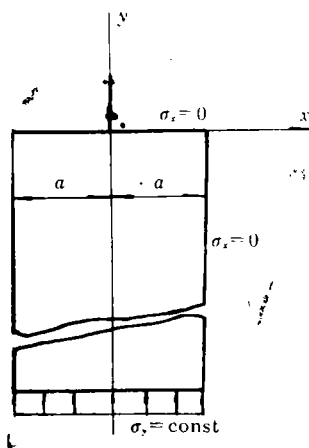


图1 集中力下的平面杆

$$\begin{aligned}
 D &= u_x v_y - u_y v_x \\
 r_1 &= \sqrt{x_x^2 + y_x^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} / D \\
 r_2 &= \sqrt{x_y^2 + y_y^2} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} / D
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

可解出

$$\left. \begin{aligned}
 r_1^2 &= \frac{a^2(x^2 + y^2)^3(y^2 + a^2)}{y^2[y^2(y^2 + a^2)^2 + x^2(x^2 - a^2)^2]} \\
 r_2^2 &= \frac{v^6}{y^2[y^2(y^2 + a^2)^2 + x^2(x^2 - a^2)^2]}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

则 $r_1 K_1$ 和 $r_2 K_2$ 可表示为

$$\left\{ \begin{aligned}
 r_1 K_1 &= \frac{(3x^2 - a^2)y^2(y^2 + a^2)^2 - x^2(x^2 - a^2)^2(3y^2 + a^2)}{y[y^2(y^2 + a^2)^2 + x^2(x^2 - a^2)^2]^2} a \sqrt{(x^2 + y^2)^3(y^2 + a^2)} \\
 r_2 K_2 &= \frac{3xy(y^2 + a^2)(x^2 + y^2)(x^2 - a^2)v^3}{[y^2(y^2 + a^2)^2 + x^2(x^2 - a^2)^2]^2}
 \end{aligned} \right.$$

当 $a^2/y^2 \ll 1$ 和 $x^2/y^2 \ll 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 r_1 K_1 &= \frac{3u^2 - 1}{v^3} a^3 \left(1 - \frac{3a^2}{2v^2} + \frac{3a^2 u^2}{2v^2} \right) \\
 r_2 K_2 &= \frac{3u(u^2 - 1)}{v^4} a^3 \left(1 - \frac{7a^2}{2v^2} + \frac{a^2 u^2}{v^2} \right)
 \end{aligned}$$

代入平衡微分方程式(2.1),

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma'_1}{\partial u} + \frac{3ua^3(u^2 - 1)}{v^4} \left(1 - \frac{7a^2}{2v^2} + \frac{a^2 u^2}{v^2} \right) \sigma'_2 &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma'_2}{\partial v} + \frac{(3u^2 - 1)a^3}{v^3} \left(1 - \frac{3a^2}{2v^2} + \frac{3a^2 u^2}{2v^2} \right) \sigma'_1 &= 0
 \end{aligned} \right.$$

利用级数解

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sigma'_1 &= c_1 - \frac{3a^3(u^2 - 1)^2}{4v^4} \left(1 - O\left(\frac{1}{v^2}\right) \right) c_2 + O\left(\frac{1}{v^6}\right) \\
 \sigma'_2 &= c_2 - \frac{3u^2 - 1}{v^2} a^3 c_1 + O\left(\frac{1}{v^4}\right)
 \end{aligned} \right.$$

由式(3.3), 当 $y \rightarrow \infty$ 时, $r_1 \rightarrow a$, 则边界条件(3.1)' 转换为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma'_1 &= 0 \quad (\text{当 } u^2 = 1) \\
 \sigma'_2 &= \text{const} \quad (\text{当 } v \rightarrow \infty)
 \end{aligned} \right\}$$

则

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 &= 0 \\
 \sigma'_2 &= c_2 \\
 \sigma'_1 &= \frac{3(u^2 - 1)^2 a^3}{4v^4} c_2
 \end{aligned} \right\}$$

则可导出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma'_1}{r_2} = \sigma'_1 \\ &= \frac{3a^3(u^2-1)^2}{4v^4} c_2 \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma'_2}{r_1} = \frac{c_2}{a} \left(1 - \frac{3x^2}{2y^2} + \frac{a^2}{2y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

四、圣维南问题的讨论

对于图 1 所示的平面杆问题，我们关心的是 σ_x , τ_{xy} 衰减为 0 的情况，以及 σ_y 趋于常数的速率。因此，需将主轴应力转换为直角坐标中的应力 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 。

由式(3.1)，可导出两族曲线的斜率

$$y'_1 = \frac{x(x^2 - a^2)}{y(y^2 + a^2)}$$

$$y'_2 = -\frac{y(y^2 + a^2)}{x(x^2 - a^2)}$$

显然，当 $\frac{a}{y} \ll 1$ 和 $\frac{x}{y} \ll 1$ 时， $y'_1 \rightarrow 0$ ，则曲线 $u=c$ 与 x 轴的夹角趋于 0。同理，曲线 $v=c$ 与 y 轴的夹角趋于 0。设 $u=c$ 与 x 轴的夹角为 θ_1 ，此时有

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &\approx 1 \\ \sin\theta_1 &\approx \operatorname{tg}\theta_1 = y'_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

由斜截面应力公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \cos^2\theta_1 \sigma_1 + \sin^2\theta_1 \cdot \sigma_2 \\ \sigma_y &= \sin^2\theta_1 \sigma_1 + \cos^2\theta_1 \sigma_2 \\ \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos\theta_1 \sin\theta_1 \end{aligned} \right\}$$

将解(3.4)与式(4.1)代入上式，并忽略高阶小量，则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3(x^2 - a^2)^2}{4y^4} \cdot \frac{c_2}{a} \\ \sigma_y &= \frac{c_2}{a} \left(1 - \frac{3x^2}{2y^2} + \frac{a^2}{2y^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{x(x^2 - a^2)}{y^3} \cdot \frac{c_2}{a} \left(1 - \frac{3x^2}{2y^2} + \frac{a^2}{2y^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

由此式可以看到， σ_x 的衰减速度与 $\frac{a^4}{y^4}$ 或 $\frac{x^4}{y^4}$ 成正比； τ_{xy} 的衰减速度是 $\frac{a^3}{y^3}$ 或 $\frac{x^3}{y^3}$ ； σ_y 趋于常数的速度是 $\frac{a^2}{y^2}$ 。

五、结 论

以上我们用主轴应力曲线求解了关于平面杆的圣维南问题的解析解。在求解过程中，并没有直接使用 x, y 关于参数 u, v 的关系式，而是利用微分关系式计算平衡方程中的各系数。实际上，寻求域内的完全的解析解也许是非常困难的，甚至是不可能的。但是，由于最终的解答仅与特征长度 r_1 和 r_2 有关，使得寻找圣维南问题要简单的多。

从我们获得的解中，证明了 σ_x 以 $\frac{a^4}{y^4}$ 衰减， τ_{xy} 以 $\frac{a^3}{y^3}$ 速度衰减， σ_y 以 $\frac{a^2}{y^2}$ 速度衰减。

参 考 文 献

- [1] 黄民丰，关于弹性力学平面问题中的主轴应力坐标，应用数学和力学，18(2) (1997), 147—152.
- [2] 徐芝纶，《弹性力学》，第二版（上），高等教育出版社（1982）.
- [3] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社（1980）.

The Saint-Venant Problem of Plane Bar under an Axial Force

Huang Minfeng

(Beijing Technical & Scientific Institute of Real
Estate, Beijing 100021, P. R. China)

Abstract

In the paper, the solution to Saint-Venant problem through assumption of principal stress curves by means of the equilibrium equations which were deduced in paper [1] is obtained. The results show that the speed of shear approaching to zero is a^3/y^3 and axial stress approaching to constant is a^2/y^2 .

Key words elasticity, plane problem, Saint-Venant theory, principal stress