

# 板梁组合结构可靠性分析的随机边界元法

张妃二<sup>1</sup> 袁 鸿<sup>1</sup>

(刘人怀推荐, 1996年3月28日收到)

## 摘 要

本文用随机边界元法分析了随机荷载作用下具有随机边界条件的正交各向异性板、梁组合结构的可靠性。文中首先给出正交各向异性板、梁组合结构的边界积分方程, 进而基于随机边界元法建立了随机结构可靠性分析方法和得到用于计算正交各向异性板、梁组合结构可靠性指标的公式。算例表明了本文方法的有效性。

**关键词** 随机边界元法 随机荷载 板、梁组合结构 可靠性指标

## 一、引 言

工程结构常常受到随时间变化的随机荷载的作用, 例如地震对工程结构的作用、海浪对海洋结构的动压力作用、路面的不平度对运输中的车辆的作用等。这种作用会形成随机性的振动, 这种振动是影响其安全性和使用寿命的重要因素之一。因此, 工程结构设计中正确地确定随机环境下结构不失效的概率和可靠性指标是十分重要的。

研究随机参数结构统计特性的最基本方法是数值模拟方法<sup>[1]</sup>。该方法是一种基于样本分析的精确方法, 但计算量大, 所以常作为方法的比较而不能作为一种实用的工程方法。对于含随机材料参数或几何参数受随机荷载作用且具有随机边界条件的不确定结构, 随机有限元法已有较大发展<sup>[2~3]</sup>。

边界元法仅需对结构的边界进行离散, 可以准确地模拟物体的边界, 且所需计算工作量较小。因此, 近年来随机边界元法得到了发展。基于摄动技术, 文献[4]中将随机边界元法应用于形状不确定性结构动特性分析, 文献[5]则导出了形状不确定性结构静响应分析的随机边界元法。

近年来, 分析结构可靠性多采用随机有限元法<sup>[6~8]</sup>。本文首先导出正交各向异性板、梁组合结构的边界积分方程, 基于随机边界元法建立了随机荷载作用下具有随机边界条件的正交各向异性板、梁组合结构的可靠性分析方法。进而得到用于计算板、梁组合结构可靠性指标的公式。算例表明本文方法的有效性。

1 广东工业大学土木系, 广州 510090.

## 二、正交各向异性板、梁组合结构的边界积分方程

图 1 所示为一正交各向异性板、梁组合结构，以板为基础，在板的横向平行地分布着  $s$  根梁，梁固定在板上。由文献[9]可知，带有结构阻尼的正交各向异性板强迫振动的控制方程为

$$(1+i\eta)\left(D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \bar{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + \sum_{k=1}^s q_k \quad (2.1)$$

对第  $k$  根梁，其强迫振动的微分方程为

$$(1+i\eta_k)EI_k\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{m}_k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q'_k \quad (2.2)$$

在方程(2.1)及(2.2)中， $D_1, D_2$ 和 $D_3$ 均为板的刚度， $f(x, y, t)$ 是作用在结构上的激振力， $w(x, y, t)$ 是板、梁的横向动力响应， $\bar{m}$ 是板的质量密度， $\bar{m}_k$ 是第  $k$  根梁的质量密度， $q_k, q'_k$ 是板与第  $k$  根梁之间的相互作用力， $E$ 是梁的材料弹性模量， $I_k$ 是第  $k$  根梁的截面惯性矩。

由于梁和板固结处有相同的位移，并且  $q_k = -q'_k$ ，引入 Dirac- $\delta$  函数后可得板、梁组合结构的强迫振动控制方程为

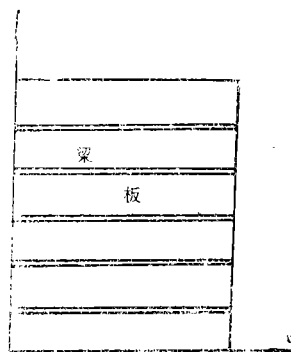


图 1 板梁组合结构

$$(1+i\eta_k)\left(D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \sum_{k=1}^s (1+i\eta_k)EI_k\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta(y-y_k) + \left(\bar{m} + \sum_{k=1}^s \bar{m}_k \delta(y-y_k)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.3)$$

假设激振力  $f(x, y, t)$  是时间的简谐函数，即当

$$f(x, y, t) = F(x, y) \exp[i\omega t]$$

则结构的横向振动位移可写成

$$w(x, y, t) = W(x, y) \exp[i\omega t]$$

其中  $\omega$  是激振的圆频率， $i = \sqrt{-1}$ 。

于是结构振型  $W$  的控制方程为

$$(1+i\eta_k)\left(D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) + \sum_{k=1}^s (1+i\eta_k)EI_k\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \delta(y-y_k) - \left(\bar{m} + \sum_{k=1}^s \bar{m}_k \delta(y-y_k)\right)\omega^2 W = F \quad (2.4)$$

其中  $s$  是梁的根数， $\eta$  是结构中板的阻尼系数， $\eta_k$  是结构中每根梁的阻尼系数。

在线性比例阻尼时，

$$\eta = 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.5)$$

其中  $\eta$  是  $\omega$  与  $\omega_n$  的函数, 当激振圆频率  $\omega$  接近不同的模态固有圆频率  $\omega_n$  时,  $\eta$  将有不同值. 在具体计算时, 当  $\omega$  位于每一阶模态的半功率频率带宽内时, 按式 (2.5) 计算出  $\eta(\omega, \omega_n)$ , 当  $\omega$  在其他频率范围内时, 将结构作无阻尼处理.

以  $W^*$  作为权函数乘方程 (2.4) 的左右两边, 然后在板的定义域  $\Omega$  内进行积分, 经分部积分并应用格林 (Green) 公式可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W^* \left\{ (1+i\eta) \left( D_1 \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W^*}{\partial y^4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^s (1+i\eta_k) EI_k \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^4} \delta(y-y_k) - \left( \bar{m} + \sum_{k=1}^s \bar{m}_k \delta(y-y_k) \right) \omega^2 W^* \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} F W^* d\Omega + (1+i\eta) \int_{\Gamma} \Delta(W^*) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{式中 } \Delta(W^*) = W^* R_n - M_n \frac{\partial W^*}{\partial n} + \frac{\partial W^*}{\partial n} M_n^* - W^* R_n^*$$

其中  $M_n(\ )$  是相应于弯矩的微分算子,  $R_n(\ )$  是相应于等效剪力的微分算子.

当权函数  $W^*$  是问题的基本解时, 即满足

$$\begin{aligned} & (1+i\eta) \left( D_1 \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W^*}{\partial y^4} \right) + \sum_{k=1}^s (1+i\eta_k) EI_k \frac{\partial^4 W^*}{\partial x^4} \delta(y-y_k) \\ & - \left( \bar{m} + \sum_{k=1}^s \bar{m}_k \delta(y-y_k) \right) \omega^2 W^* = \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \end{aligned} \quad (2.7)$$

则式 (2.6) 成为

$$C_j W_j = \int_{\Omega} F W^* d\Omega + (1+i\eta) \int_{\Gamma} \Delta(W^*) d\Gamma \quad (2.8)$$

其中

$$C_j = \begin{cases} 1 & (\forall P(x_j, y_j) \in \Omega) \\ \frac{\theta_j}{2\pi} & (\forall P(x_j, y_j) \in \Gamma) \\ 0 & (\forall P(x_j, y_j) \in \bar{\Omega} \cup \Gamma) \end{cases}$$

而  $\theta_j$  为边界点  $P$  的两切线夹角.

式 (2.8) 即为正交各向异性板、梁组合结构的边界积分方程.

### 三、随机边界元法

对边界积分方程 (2.8), 利用边界元将边界离散并由构造边界元代数方程的一般步骤得到一组线性代数方程, 用矩阵形式表示为<sup>[10]</sup>:

$$[H]U = [G]P + \{V\} \quad (3.1)$$

式中  $[H]$ ,  $[G]$  均为系数矩阵,  $U$ ,  $P$  分别为边界节点位移和面力组成的向量,  $\{V\}$  为体

积力引起的等效荷载向量。

对于含随机参数的问题,基于Taylor级数展开,将随机参数的影响统归为一个等效随机体积力,则式(3.1)变成<sup>[11]</sup>

$$[H]\Delta U=[G]\Delta P+[R_1]\Delta\eta+[R_2]\Delta V \quad (3.2)$$

式中  $[R_1]$ 和 $[R_2]$ 均为系数矩阵,  $\Delta U$ ,  $\Delta P$ 分别为节点位移 $U$ 、面力 $P$ 的随机偏量列向量,  $\Delta\eta$ 和 $\Delta V$ 为内点 $O$ 及边界节点上阻尼系数的随机偏量、体积力的随机偏量组成的列向量。

引入边界条件,式(3.2)整理为

$$[A]\Delta X=[R]\Delta\eta$$

式中  $\Delta X$ 为边界节点未知量随机偏量组成的列向量,从而可得边界节点位移和面力分量的均值和协方差分别为

$$\bar{X}=[A]^{-1}F \quad (3.3)$$

$$C_{ov}(\Delta X)=[A]^{-1}[R]C_{ov}(\Delta E)[R]^T[A]^{-T} \quad (3.4)$$

对于结构边界随机时,同样由文献[11]可得

$$[H]\Delta U=[G]\Delta P+[Q]\Delta Z \quad (3.5)$$

式中  $[Q]$ 为系数矩阵,  $\Delta Z$ 为边界节点坐标随机偏量的列向量。

引入边界条件,式(3.5)整理为

$$[A]\Delta X=[Q]\Delta Z \quad (3.6)$$

进而可得边界节点位移和面力分量的均值和协方差分别为

$$\bar{X}=[A]^{-1}K \quad (3.7)$$

$$C_{ov}(\Delta X)=[A]^{-1}[Q]C_{ov}(\Delta Z)[Q]^T[A]^{-T} \quad (3.8)$$

考虑到阻尼、边界和荷载均为随机且三者相互独立,可应用叠加原理求得三种情况并存时边界点位移或面力的偏差和协方差。

#### 四、随机结构的可靠性指标

由可靠性理论知,受到随机激励的工程结构的可靠性不仅与激振力有关,而且与结构的振动特性有关。即固有频率 $\omega$ 增大时,可靠性指标 $\beta$ 增大,失效概率 $P_f$ 减小;当阻尼系数 $\eta$ 增大时,可靠性指标增大,失效概率减小;当激振的功率谱增大时,可靠性指标 $\beta$ 下降,失效概率 $P_f$ 增大。可见,受到随机激励的振动系统的可靠性与系统的振动特性有着密切关系。

设结构可靠性分析中已知一组基本随机变量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,则描述结构的功能函数为 $g(X)=g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,相应的极限状态方程为 $g(X)=0$ 。基本随机变量 $i(i=1, 2, \dots, n)$ 可以是荷载、几何尺寸、材料特性参数等。强度向量 $R=R(X)=(R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ 和荷载向量 $S=S(X)=(S_1, S_2, \dots, S_n)^T$ 可以是振型、应力、位移等。于是结构功能函数 $g(x)$ 也可改写成 $g(R, S)$ 。 $g(R, S)<0$ 表示超过极限状态的情况,为失效状态。 $g(R, S)>0$ 则表示结构处于安全状态。

本文研究随机荷载作用下具有随机边界条件的正交各向异性板、梁组合结构的可靠性。把随机参数影响统归的等效随机体积力模拟化为一随机场(正态) $V(x, y)$ ,则得到基本随机变量组 $X$ 是 $O$ 点及边界点处等效随机体积力的随机偏量所组成的向量,它们是一组有相关性的变量,须变换为一组相互独立的变量处理<sup>[12]</sup>。为此,先求出 $X$ 相关系数矩阵 $[L_x]$ 的特征值和特征向量,得到矩阵 $[A]$ 和 $[\lambda]$ ,使

$$[L_z] = [A][\lambda][A]^T \quad (4.1)$$

令

$$Y = [\sqrt{\lambda}]^{-1}[A]([B]X + \{V\}) \quad (4.2)$$

其中,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{W_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{W_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{W_n} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\{V\} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}_1}{W_1} \\ -\frac{\bar{x}_2}{W_2} \\ \vdots \\ -\frac{\bar{x}_n}{W_n} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

也即

$$X = [B]^{-1}([A][\sqrt{\lambda}]Y - \{V\}) \quad (4.5)$$

这样相关的 $X$ 就转化为一组相互独立的标准正态变量 $Y$ 。

由随机边界条件可得

$$g(X) \approx g(X^0) + \nabla g(X^0)(X - X^0) = G(Y) \quad (4.6)$$

其中迭代初值为

$$X^0 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \quad (4.7)$$

因而

$$\nabla g(X^0) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \Big|_{X=X^0} \quad (4.8)$$

结构可靠性指标计算使用迭代法, 每次迭代基本变量的设计验算点值 $X_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 都变化. 严格说, 这时用边界元法求解未知变量的矩阵 $[A]$ 和随机荷载(等效随机体积力)矩阵 $\{V\}$ 也都不同, 每次迭代都要重新形成矩阵 $[A]$ 和 $\{V\}$ , 解方程, 求偏导数, 然后求灵敏向量 $\alpha$ , 计算新的验算点。

综上所述, 基于随机边界元法计算结构可靠性指标 $\beta$ 的步骤可归结如下:

1. 由随机边界条件的迭代初值 $X^0$ 计算 $\nabla g(X^0)$ ;
2. 求 $[L_z]$ 的特征值和特征向量, 得到 $[A]$ 和 $[\lambda]$ ;
3. 建立矩阵 $[B]$ 和 $\{V\}$ , 确定迭代初值 $X^0 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ ;
4. 计算迭代功能函数值 $\nabla G(Y)$

$$\nabla G(Y) = \nabla g(X) \frac{\partial X}{\partial Y} \approx [\sqrt{\lambda}]^T [A]^T [B]^{-T} \nabla g(X^0) \quad (4.9)$$

5. 计算灵敏系数向量 $\{\alpha\}$

$$\{\alpha\} = -\frac{\nabla G(Y)}{|\nabla G(Y)|} \quad (4.10)$$

6. 计算新的验算点值 $\{Y\}^{(i+1)}$ 及 $\{X\}^{(i+1)}$

$$\{Y\}^{(i+1)} = \frac{[(Y^{(i)})^T \{\alpha\} + G(Y^{(i)})]}{|\nabla G(Y^{(i)})|} \{\alpha\} \quad (4.11)$$

$$\{X\}^{(i+1)} = [B]^{-1}([A][\sqrt{\lambda}]Y^{(i+1)} - \{V\}) \quad (4.12)$$

7. 计算结构可靠性指标 $\beta$

$$\beta = \sqrt{\{Y^*\}^T \{Y^*\}} \quad (4.13)$$

式中  $\{Y^*\}$ 为设计验算点的坐标,  $\beta$ 的几何意义是坐标原点到失效边界的最短距离。由此可见, 只要求出了设计验算点的坐标 $\{Y^*\}$ , 即可求出可靠性指标 $\beta$ 。由于未知量的个数多于方程的个数, 需迭代求解。

8. 判别 $G(X)$ 是否满足精度要求, 否则重复步骤6~8;

9. 迭代收敛后, 可由 $\beta$ 值计算失效概率

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (4.14)$$

## 五、算 例

图 1 所示的四边简支正交各向异性板、梁组合结构。结构参数如下

板的几何尺寸 高度 $\times$ 宽度 $=458\text{cm}\times 155\text{cm}$

板的面质量密度  $m=1.519\times 10^2\text{kg/cm}$

板的刚度  $D_1=1.136\times 10^6\text{N}\cdot\text{cm}$

$D_2=1.118\times 10^6\text{N}\cdot\text{cm}$

$D_3=6.403\times 10^6\text{N}\cdot\text{cm}$

在板上, 水平地等间隔平行地配置 9 根相同的加强刚性用的刚性梁。

梁的抗弯刚度  $EI_k=1.214\times 10^{12}\text{N}\cdot\text{cm}$

梁的线质量密度  $m_k=8.800\text{kN/cm}$

在板、梁组合结构上作用有集度 $q=65\text{N/cm}^2$ 的脉动压力。

在计算中假设作用在板、梁组合结构上的随机荷载是连续分布的。将结构划分成纵横向 $7\times 3=21$ 个小区域。假设在每个小区域上作用着均布的脉动荷载, 并将此分布荷载用一个作用在该区域几何中心的等效集中荷载来代替。

设随机荷载是二维正态随机场, 即

$$V = \bar{V}[1 + \mu\lambda(x, y)] \quad (5.1)$$

其中  $\bar{V}$ 为均值,  $\lambda(x, y)$ 为归一化的正态随机场, 取 $\mu=3\%$ , 结构的阻尼系数按式(2.5)作近似估计, 随机场 $\lambda(x, y)$ 的相关模式分别假设为: (1)三角型; (2)指数型; (3)二阶AR型; (4)高斯型。为了便于比较, 取各相关模式的相关尺度相同。

设功能函数为

$$g(V) = 1.36\bar{W}_i - W_i \quad (5.2)$$

式中  $W_i$ 为 $i$ 个振型,  $\bar{W}_i$ 为 $V$ 取均值时 $W_i$ 的值。计算板、梁组合结构可靠性指标 $\beta$ , 结果列于表1, 其中 $n$ 为数值积分的高斯点数,  $N$ 为边界单元数。

表 1 受随机均布荷载作用的四边简支板、梁组合结构可靠性指标 $\beta$ 

相关模式	n=3			n=9		
	N=12	24	36	N=12	24	36
三角型	2.371	2.403	2.414	2.647	2.664	2.658
指数型	2.369	2.315	2.286	2.623	2.601	2.587
二阶AR型	2.370	2.321	2.291	2.624	2.604	2.598
高斯型	2.370	2.335	2.349	2.647	3.662	3.652

表 1 说明: 用本文方法计算结果关于单元的收敛性较好, 对每种单元划分也一般只需迭代两次即可达到收敛。保持了边界元法所需单元少而精度高的特点。板梁组合结构的可靠性指标 $\beta$ 的值与区域积分时所取高斯点数有关, 三角型区域积分取 3 个高斯点时, 较取 9 个高斯点夸大了单元间随机相关性, 故计算 $\beta$ 值的结果也相应较小。由此可见, 应取 9 个高斯点为宜。

## 参 考 文 献

- [1] C. Schueller and R. Stix, A critical appraisal of methods to determine failure probabilities, *Structural Safety*, (4) (1987), 293--309.
- [2] 朱位秋、任永坚, 随机场的局部平均与随机有限元, *航空学报*, 7(6) (1986), 604--609.
- [3] W. O. Zhu, Y. J. Ren and W. Q. Wu, Stochastic FEM based on local averages of random vector fields, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 118(2) (1992), 496--502.
- [4] 陈塑寰等, 形状不确定性结构动特性分析的随机边界元法, *固体力学学报*, 14(3) (1993), 265--269.
- [5] 刘寒冰等, 形状不确定性结构静响应分析的随机边界元法, *兵工学报*, (2) (1994), 65--69.
- [6] T. Hisade and S. Makagiri, Role of stochastic finite element in structural safety and reliability, *Proc. 4th ICOSSAR* (1985).
- [7] A. Der Kiureghian and B. J. Ke, The stochastic finite element method in structural reliability, *Probabilist Engrg. Mech.*, (2) (1988), 83--91.
- [8] 张义民、刘巧伶, 多随机参数结构可靠性分析的随机有限元法, *东北工学院学报*, (增刊), (1992), 97--99.
- [9] 黄凌、朱继海, 锅炉炉墙板梁结构随机响应的边界元法, *应用力学学报*, 10(4) (1993), 86--91.
- [10] C. A. Brebbia, et al., *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag (1984).
- [11] Ren Yongjiao, Jiang Aimin and Ding Haojing, Stochastic boundary element method in elasticity, *Acta Mechanica Sinica*, 9(4) (1993), 320--328.
- [12] 武清玺、吕泰仁、吴世伟, 变量相关时结构可靠指标的计算, *高校应用数学学报*, (1) (1987), 53--58.

## Stochastic Boundary Element Method for Reliability Analysis of Plate and Beams Composite Structures

Zhang Feier Yuan Hong

*(Department of Civil Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, P. R. China)*

### Abstract

In this paper, the reliability of orthotropic plate and beams composite structures, which is under the actions of the stochastic loading and stochastic boundary conditions, have been analyzed by stochastic boundary element method. First, the boundary integral equation of orthotropic plate and beams composite structures is given in this paper, and then, based on the stochastic boundary element method, the method for reliability analysis of stochastic structures is established and formulas for computation of reliability index of orthotropic plate and beams composite structures are obtained. The computed examples show the efficiency of the method used in this paper.

**Key words** stochastic boundary element method, stochastic loading, plate and beams composite structures, reliability index