应用数学和力学，第18卷 第5期（1997年5月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

矩阵奇异值分解问题重分析的直接摄动法*

吕 振 华[1]

（孙焕纯推荐，1995年7月28日收到，1996年11月10日收到修改稿）

摘　要

矩阵奇异值分解的摄动重分析技术具有广泛的应用前景，作者继在文[2]中提出了一种间接摄动分析方法之后，在本文中又进一步提出了直接摄动法，建立了一般实矩阵的非重奇异值及其左、右奇异向量的二阶摄动计算公式．这可满足大多数实际应用问题的一般需要．文中以算例说明了直接摄动法的有效性．

关键词　矩阵代数　奇异值分解　重分析　摄动法

一、引　　言

矩阵奇异值分解(SVD)是现代数值线性代数中最重要的基本计算分析工具之一．它具有优良的数值稳定性，因此在许多理论和应用领域，它是最可靠、最优美的矩阵数值分析方法[1]．虽然矩阵SVD理论的建立早在本世纪三、四十年代即已基本完成，但它在其它学科和工程技术中的应用则几乎是近十来年才开始的，其重要应用领域包括矩阵理论本身以及自动控制理论、力学和物理学等，还有更多的应用方面尚在继续探索中．

作者在文[2]中较早（或许首次）提出了矩阵SVD摄动重分析问题，并利用实矩阵A的SVD与矩阵AA^T和A^TA的谱分解（即特征值分解）之间的关系，建立了矩阵SVD重分析的一种间接摄动方法．这是实对称矩阵特征值问题重分析的摄动法[3,4]向一般实矩阵SVD重分析问题的推广．本文则将进一步提出矩阵SVD重分析的直接摄动法．矩阵SVD摄动重分析问题具有广泛的实际背景，文[2]和本文提出的摄动分析方法是进行矩阵SVD重分析的高效算法，可显著地节省计算量．另一方面，由摄动分析结果还可直接给出矩阵奇异值和奇异向量随矩阵元素（或系统参数）的改变而变化的信息——灵敏度，这是在理论研究和工程技术中都具有广泛用途的重要参量．文[5，6]较早对线性控制系统中的一种矩阵建立了奇异值关于系统设计参数的导数（梯度）算式，可视其为本文将要给出的摄动分析方法的雏形（因导数相当于一阶摄动量的微分表示），但它们未建立奇异向量的导数算式，且也未涉及高阶导数等情形．

* 国家自然科学基金资助项目．
1 清华大学，北京　100084．

二、摄动分析方法

设有$m\times n$实矩阵 $A_0\in R_{r_0}^{m\times n}$，并已得到其奇异值分解

$$A_0=U_0S_0V_0^T=U_{0r_0}S_{0r_0}V_{0r_0}^T \qquad (r_0=\mathrm{rank}(A_0)) \tag{2.1}$$

其中 $$S_0=\begin{bmatrix} S_{0r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad S_{0r_0}=\mathrm{diag}(s_{01},\ s_{02},\ \cdots,\ s_{0r_0})$$

$$U_0=[U_{0r_0},\ U_{0,\ m-r_0}]\in R^{m\times n},\quad U^T=U^{-1}$$

$$U_{0r_0}=[u_{01},\ u_{02},\ \cdots,\ u_{0r_0}],\quad U_{0,m-r_0}=[u_{0,r_0+1},\ \cdots,\ u_{0m}]$$

$$V_0=[V_{0r_0},\ V_{0,n-r_0}]\in R^{n\times n},\quad V^T=V^{-1}$$

$$V_{0r_0}=[v_{01},\ v_{02},\ \cdots,\ v_{0r_0}],\quad V_{0,n-r_0}=[v_{0,r_0+1},\ \cdots,\ v_{0n}]$$

$\{s_{0i}\}_{i=1}^{r_0}$为A_0的非零奇异值（正实数），$\{u_{0i}\}_{i=1}^{m}$和$\{v_{0i}\}_{i=1}^{n}$分别为A_0的左、右奇异向量，它们分别是欧几里德空间E^m和E^n的一组标准正交基．又设有与A_0同形的实矩阵A系由A_0经摄动修改而得，即

$$A=A_0+\varepsilon A_p \qquad (0<|\varepsilon|<1;\ \ A\in R_r^{m\times n},\ \ A_p\in R^{m\times n}) \tag{2.2}$$

其中 εA_p是摄动矩阵，$\varepsilon\in R$为一小参数.我们可采用矩阵摄动分析方法，直接由已知的$(S_0,\ U_0,\ V_0)$和εA_p渐近地估计A的奇异值$\{s_i\}_{i=1}^{r}$和左、右奇异向量$\{u_i\}_{i=1}^{m}$，$\{v_i\}_{i=1}^{n}$，从而可近似地得到A的奇异值分解

$$A=USV^T=U_rS_rV_r^T \qquad (r=\mathrm{rank}(A)) \tag{2.3}$$

其中各个符号的意义可由式(2.1)中相应符号去掉下标0后给出．

由式(2.1)和(2.3)可分别得到下列各式

$$\begin{cases} A_0V_{0r_0}=U_{0r_0}S_{0r_0} \\ A_0V_{0,n-r_0}=[0] \end{cases} \text{即} \begin{cases} A_0v_{0i}=s_{0i}u_{0i} & (1\leqslant i\leqslant r_0) \\ A_0v_{0i}=0 & (r_0+1\leqslant i\leqslant n) \end{cases} \tag{2.4a}$$

$$\begin{cases} A_0^TU_{0r_0}=V_{0r_0}S_{0r_0} \\ A_0^TU_{0,\ m-r_0}=[0] \end{cases} \text{即} \begin{cases} A_0^Tu_{0i}=s_{0i}v_{0i} & (1\leqslant i\leqslant r_0) \\ A_0^Tu_{0i}=0 & (r_0+1\leqslant i\leqslant m) \end{cases} \tag{2.4b}$$

$$\begin{cases} AV_r=U_rS_r \\ AV_{n-r}=[0] \end{cases} \text{即} \begin{cases} Av_i=s_iu_i & (1\leqslant i\leqslant r); \\ Av_i=0 & (r+1\leqslant i\leqslant n); \end{cases} \quad \begin{cases} A^TU_r=V_rS_r \\ A^TU_{m-r}=[0] \end{cases} \text{即} \begin{cases} A^Tu_i=s_iv_i & (1\leqslant i\leqslant r) \\ A^Tu_i=0 & (r+1\leqslant i\leqslant m) \end{cases} \tag{2.5a,b}$$

并且在诸奇异向量系中存在如下正交关系式

$$\begin{cases} u_{0j}^Tu_{0i}=\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant m); \\ v_{0j}^Tv_{0i}=\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant n); \\ u_{0j}^TA_0v_{0i}=s_{0i}\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant r_0); \end{cases} \quad \begin{cases} u_j^Tu_i=\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant m) \\ v_j^Tv_i=\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant n) \\ u_j^TAv_i=s_i\delta_{ij} & (1\leqslant i,\ j\leqslant r) \end{cases} \tag{2.6～2.7}$$

另外，规定$s_{0i}(1\leqslant i\leqslant r_0)$按降序排列，并设$m\geqslant n$，显然不失一般性．

现在考虑用摄动法求解矩阵A的前p个奇异对$(s_i,\ u_i,\ v_i)(1\leqslant i\leqslant p)$．为简明起见，本文仅考虑$p\leqslant r_0$且$A_0$无非零重奇异值的情形，即设

$$s_{01}>s_{02}>\cdots>s_{0r_0}>s_{0,r_0+1}=s_{0,r_0+2}=\cdots=s_{0n}=0$$

这已可满足大多数实际应用问题的一般需要．较为复杂的重奇异值情形的摄动分析结果将另文发表．首先，因一般实矩阵A的奇异值平方s_i^2和左、右奇异向量u_i，v_i分别是实对称矩阵AA^T和A^TA的特征值和特征向量，故可将它们展开成小参数ε的如下收敛幂级数[7]

$$s_i=s_{0i}+\varepsilon s_{1i}+\varepsilon^2 s_{2i}+\cdots,\quad u_i=u_{0i}+\varepsilon u_{1i}+\varepsilon^2 u_{2i}+\cdots,$$
$$v_i=v_{0i}+\varepsilon v_{1i}+\varepsilon^2 v_{2i}+\cdots \qquad (1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.8}$$

式中 ε, ε^2项依次称为第一、二阶摄动量. 将式(2.8)和(2.2)代入式(2.5a)和(2.5b)中第一方程（尽管r未知，但这两个方程实际适用于 $1\leqslant i\leqslant n$），展开之，按ε的各次幂归并同类项；考虑到两方程对$0<|\varepsilon|<1$范围内的任一ε值都应成立，则方程两端的ε的同次幂项应恒等，由此可得出一系列方程：

$$\varepsilon^1\text{阶：}\begin{cases}A_0v_{1i}+A_pv_{0i}=s_{0i}u_{1i}+s_{1i}u_{0i}\\ A_0^Tu_{1i}+A_p^Tu_{0i}=s_{0i}v_{1i}+s_{1i}v_{0i}\end{cases} \tag{2.9a}$$

$$\varepsilon^2\text{阶：}\begin{cases}A_0v_{2i}+A_pv_{1i}=s_{0i}u_{2i}+s_{1i}u_{1i}+s_{2i}u_{0i}\\ A_0^Tu_{2i}+A_p^Tu_{1i}=s_{0i}v_{2i}+s_{1i}v_{1i}+s_{2i}v_{0i}\end{cases} \tag{2.9b}$$

$$\cdots\cdots \qquad (1\leqslant i\leqslant p)$$

由方程(2.9a)和(2.9b)可依次求解第一、二阶摄动量(s_{ki}, u_{ki}, v_{ki})($k=1$, 2)，但尚需利用式(2.7)引入补充方程. 将式(2.8)代入式(2.7)中前两式，令$j=i$，可与上类似地列出各阶补充方程：

$$\varepsilon^1\text{阶：}\begin{cases}2u_{0i}^Tu_{1i}=0\\ 2v_{0i}^Tv_{1i}=0\end{cases}\qquad \varepsilon^2\text{阶：}\begin{cases}2u_{0i}^Tu_{2i}+u_{1i}^Tu_{1i}=0\\ 2v_{0i}^Tv_{2i}+v_{1i}^Tv_{1i}=0\end{cases}\qquad\cdots\cdots\qquad(1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.10}$$

再把u_{ki}和v_{ki}($k=1$, 2)分别在U_0和V_0张成的空间E^m和E^n中展开，即令

$$u_{ki}=\sum_{j=1}^m b_{kji}u_{0i}\ ,\quad v_{ki}=\sum_{j=1}^n c_{kji}v_{0j}\qquad(k=1,\ 2;\ 1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.11}$$

将其分别代入式(2.9)，(2.10)中诸方程，并对式(2.9a)，(2.9b)中第一、二个方程分别前乘u_{0l}^T($1\leqslant l\leqslant m$)和v_{0l}^T($1\leqslant l\leqslant n$)，再利用正交关系式(2.6)和式(2.4a)，(2.4b)的第二式进行化简，得到

$$\begin{cases}s_{0l}c_{1li}+u_{0l}^TA_pv_{0i}=s_{0i}b_{1li}+s_{1i}\delta_{li}\\ s_{0l}b_{1li}+v_{0l}^TA_p^Tu_{0i}=s_{0i}c_{1li}+s_{1i}\delta_{li}\end{cases} \tag{2.12a}$$

$$\begin{cases}s_{0l}c_{2li}+u_{0l}^TA_pv_{1i}=s_{0i}b_{2li}+s_{1i}b_{1li}+s_{2i}\delta_{li}\\ s_{0l}b_{2li}+v_{0l}^TA_p^Tu_{1i}=s_{0i}c_{2li}+s_{1i}c_{1li}+s_{2i}\delta_{li}\end{cases} \tag{2.12b}$$

$$(1\leqslant l\leqslant r_0,\ 1\leqslant i\leqslant p)$$

$$\begin{cases}u_{0l}^TA_pv_{0i}=s_{0i}b_{1li}\\ v_{0l}^TA_p^Tu_{0i}=s_{0i}c_{1li}\end{cases}\qquad\begin{cases}u_{0l}^TA_pv_{1i}=s_{0i}b_{2li}+s_{1i}b_{1li}\\ v_{0l}^TA_p^Tu_{1i}=s_{0i}c_{2li}+s_{1i}c_{1li}\end{cases}\qquad(l\geqslant r_0+1;\ 1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.13}$$

$$\begin{cases}b_{1ii}=0\\ c_{1ii}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}b_{2ii}=-\dfrac{1}{2}u_{1i}^Tu_{1i}\\ c_{2ii}=-\dfrac{1}{2}v_{1i}^Tv_{1i}\end{cases}\qquad(1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.14}$$

式(2.14)已达到其最终结果，由式(2.13)也易于得出

$$\begin{cases}b_{1li}=\dfrac{1}{s_{0i}}u_{0l}^TA_pv_{0i}\\ c_{1li}=\dfrac{1}{s_{0i}}v_{0l}^TA_p^Tu_{0i}\end{cases}\qquad\begin{cases}b_{2li}=\dfrac{1}{s_{0i}}(u_{0l}^TA_pv_{1i}-s_{1i}b_{1li})\\ c_{2li}=\dfrac{1}{s_{0i}}(v_{0l}^TA_p^Tu_{1i}-s_{1i}c_{1li})\end{cases}\qquad(l\geqslant r_0+1;\ 1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.15}$$

在方程组(2.12)中令$l=i$，并利用式(2.14)，可得

$$s_{1i}=u_{0i}^T A_p v_{0i} \qquad (1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.16}$$

$$s_{2i}=u_{0i}^T A_p v_{1i}+s_{0i}(u_{1i}^T u_{1i}-v_{1i}^T v_{1i})/2 \qquad (1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.17a}$$

或

$$s_{2i}=v_{0i}^T A_p^T u_{1i}-s_{0i}(u_{1i}^T u_{1i}-v_{1i}^T v_{1i})/2 \qquad (1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.17b}$$

或

$$s_{2i}=(u_{0i}^T A_p v_{1i}+v_{0i}^T A_p^T u_{1i})/2 \qquad (1\leqslant i\leqslant p) \tag{2.17c}$$

再对所有$l\neq i$，求解方程组(2.12)，得

$$\left\{\begin{aligned} b_{1li}&=\frac{s_{0i}u_{0l}^T A_p v_{0i}+s_{0l}v_{0l}^T A_p^T u_{0i}}{s_{0i}^2-s_{0l}^2}\\ c_{1li}&=\frac{s_{0l}u_{0l}^T A_p v_{0i}+s_{0i}v_{0l}^T A_p^T u_{0i}}{s_{0i}^2-s_{0l}^2}\end{aligned}\right. \tag{2.18a}$$

$$\left\{\begin{aligned} b_{2li}&=\frac{s_{0i}u_{0l}^T A_p v_{1i}+s_{0l}v_{0l}^T A_p^T u_{1i}-s_{1i}(s_{0i}b_{1li}+s_{0l}c_{1li})}{s_{0i}^2-s_{0l}^2}\\ c_{2li}&=\frac{s_{0l}u_{0l}^T A_p v_{1i}+s_{0i}v_{0l}^T A_p^T u_{1i}-s_{1i}(s_{0l}b_{1li}+s_{0i}c_{1li})}{s_{0i}^2-s_{0l}^2}\end{aligned}\right. \tag{2.18b}$$

$$(1\leqslant l\leqslant r_0,\ 1\leqslant i\leqslant p)$$

至此，我们完整地确定了级数(2.8)中第一、二阶摄动量，分别由式(2.16)，(2.17)，(2.11)，(2.18)，(2.14)和(2.15)给出．至于第三阶以上的摄动量，其算式的复杂性亦即所需的计算量将随阶数的增大而急剧增加．因此，为兼顾适当的精度和尽可能高的计算效率，一般以计算到第二阶摄动量为宜。

三、算 例

为简明起见，考虑一个二阶矩阵的例子，设

$$A_0=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & 9\end{bmatrix},\ A_p=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ A=A(\varepsilon)=A_0+\varepsilon A_p$$

已知A_0的奇异值分解为

$$A_0=A(0)=U_0S_0V_0^T=\begin{bmatrix}-0.5847 & -0.8112\\ -0.8112 & 0.5847\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11.1623 & \\ & 4.8377\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5847 & -0.8112\\ -0.8112 & 0.5847\end{bmatrix}^T$$

则可应用本文提出的二阶摄动计算方法得出$A(\varepsilon)$的奇异值分解

$$A(\varepsilon)=USV^T=[u_1\ u_2]\begin{bmatrix}s_1 & \\ & s_2\end{bmatrix}[v_1\ v_2]^T$$

结果为

$$s_1\approx s_{01}+\varepsilon s_{11}+\varepsilon^2 s_{21}=11.1623+3.4741\varepsilon+0.1446\varepsilon^2$$

$$s_2\approx s_{02}+\varepsilon s_{12}+\varepsilon^2 s_{22}=4.8377+2.5254\varepsilon+0.1367\varepsilon^2$$

$$u_1\approx u_{01}+\varepsilon u_{11}+\varepsilon^2 u_{21}=\begin{Bmatrix}-0.5847\\ -0.8112\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}0.0557\\ -0.0402\end{Bmatrix}+\varepsilon^2\begin{Bmatrix}-0.0241\\ 0.0203\end{Bmatrix}$$

$$u_2\approx u_{02}+\varepsilon u_{12}+\varepsilon^2 u_{22}=\begin{Bmatrix}-0.8112\\ 0.5847\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}-0.0402\\ -0.0557\end{Bmatrix}+\varepsilon^2\begin{Bmatrix}0.0203\\ 0.0241\end{Bmatrix}$$

$$v_1 \approx v_{01}+\varepsilon v_{11}+\varepsilon^2 v_{21}=\begin{Bmatrix}-0.5847\\-0.8112\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}-0.0963\\0.0694\end{Bmatrix}+\varepsilon^2\begin{Bmatrix}0.0356\\-0.0171\end{Bmatrix}$$

$$v_2 \approx v_{02}+\varepsilon v_{12}+\varepsilon^2 v_{22}=\begin{Bmatrix}-0.8112\\0.5847\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}0.0694\\0.0963\end{Bmatrix}+\varepsilon^2\begin{Bmatrix}-0.0171\\-0.0356\end{Bmatrix}$$

例如当$\varepsilon=0.5$和1.0时，可分别得出$A(0.5)$和$A(1.0)$的近似奇异值分解

$$A(0.5)=\begin{bmatrix}8.5 & 2.5\\4 & 10.5\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-0.5629 & -0.8262\\-0.8262 & 0.5629\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12.9355 & \\ & 6.1347\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.6240 & -0.7808\\-0.7808 & 0.6240\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}8.5010 & 2.5226\\3.9726 & 10.4994\end{bmatrix}$$

$$A(1.0)=\begin{bmatrix}10 & 2\\5 & 12\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-0.5531 & -0.8311\\-0.8311 & 0.5531\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14.7810 & \\ & 7.4998\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.6454 & -0.7589\\-0.7589 & 0.6454\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}10.0067 & 2.1815\\4.7804 & 11.9999\end{bmatrix}$$

而$A(0.5)$和$A(1.0)$的奇异值分解的精确结果为

$$A(0.5)=\begin{bmatrix}8.5 & 2.5\\4 & 10.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5620 & 0.8272\\-0.8272 & -0.5620\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12.9299 & \\ & 6.1292\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.6253 & 0.7804\\-0.7804 & -0.6253\end{bmatrix}^T$$

$$A(1.0)=\begin{bmatrix}10 & 2\\5 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5468 & -0.8373\\-0.8373 & 0.5468\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14.7419 & \\ & 7.4618\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.6549 & -0.7557\\-0.7557 & 0.6549\end{bmatrix}^T$$

可见，本文建立的矩阵奇异值分解问题重分析的二阶摄动算法具有良好的精度特性．对本算例而言，当$\varepsilon=0.5$时，奇异值的估计误差仅为$\varepsilon_{s1}=0.04\%$，$\varepsilon_{s2}=0.09\%$；当$\varepsilon=1.0$时，$\varepsilon_{s1}=0.27\%$，$\varepsilon_{s2}=0.51\%$．奇异向量的估计误差略大些，其分量的最大误差达1.45%（当$\varepsilon=1.0$时），但对工程实际问题仍是足够精确的．另外，在s_i，u_i和$v_i(i=1,\ 2)$的上述摄动估计算式中，ε^2项远小于ε项，表明摄动级数收敛得较快，ε^3项以后的截断误差较小；而且奇异值比奇异向量收敛得快，因此奇异值具有更高的估计精度．在矩阵奇异值分解技术的许多应用方面，往往更重视甚至只关心奇异值，摄动重分析方法可较好地适应这种要求．

四、结　束　语

由于矩阵SVD重分析问题及其摄动分析方法只是近期才提出的，尚有一些重要问题有待进一步研究，如重奇异值情形的直接摄动计算方法的建立及本文和文[2]方法的比较研究等．另一方面，矩阵SVD摄动重分析以及相关的奇异值灵敏度分析问题具有较广泛的实际背景，因此它们具有许多潜在的重要应用领域和良好的应用前景，例如它们在结构振动非线性特征值问题求解和机械结构系统振动主动控制系统设计分析等方面的应用均具有重要的理论意义和实际价值．

参 参 文 献

[1] V. C. Klema and A. J. Laub, The singular value decomposition: its computation and some applications, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-25(2)(1980), 164—176.

[2] 吕振华、冯振东, 矩阵奇异值分解问题重分析的摄动法, 应用数学和力学, 12(7) (1991), 661—670.

[3] 胡海昌, 《多自由度结构固有振动理论》, 科学出版社, 北京 (1987).

[4] 吕振华, 线性和二次广义特征值问题的矩阵摄动法新探及汽车动力传动系扭振分析方法和控制措施论析, 吉林工业大学博士学位论文, (1990).

[5] J. R. Newsom and V. Mukhopadhyay, The use of singular value gradients and optimuzation techniques to design robust controllers for multiloop systems, *AIAA Paper*, 83—2191(1983).

[6] V. Mukhopadhyay and J. R. Newsom, Application of matrix singular value properties for evaluating gain and phase margins of multiloop systems, *AIAA Paper*, 82—1547(1982).

[7] A. S. Deif, *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*, Abacus Press (1982).

Direct Perturbation Method for Reanalysis of Matrix Singular Value Decomposition

Lü Zhenhua

(*Qinghua University, Beijing* 100084, *P. R. China*)

Abstract

The perturbational reanalysis technique of matrix singular value decomposition is applicable to many theoretical and practical problems in mathematics, mechanics, control theory, engineering, etc.. An indirect perturbation method has previously been proposed by the auther in this journal, and now the direct perturbation method has also been presented in this paper. The second-order perturbation results of non-repeated singular values and the corresponding left and right singular vectors are obtained. The results can meet the general needs of most problems of various practical applications. A numerical example is presented to demonstrate the effectiveness of the direct perturbation method.

Key words matrix algebra, singular value decomposition, reanalysis, perturbation method