应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

共轭算子法和非线性动力系统的高阶规范形*

张 伟[1] 陈予恕[1]

(1996年3月6日收到)

摘 要

规范形理论是研究非线性动力系统退化分岔的强有力的方法. 在本文里我们利用共轭算子法计算了具有幂零线性部分和不具有Z_2-对称性的非线性动力系统的2阶、3阶和4阶规范形，讨论了几种余维3退化分岔情况下的普适开折问题及其一些全局特性.

关键词 非线性动力系统 共轭算子法 3阶和4阶规范形 余维3退化分岔 普适开折

一、引 言

为了研究非线性动力系统在高余维数(≥3)退化情况下的动态分岔问题，我们需要计算非线性动力系统的高阶规范形. 最近二十年里许多科学家对于规范形理论的发展做出了非常重要的贡献，例如Arnold[1]，Bogdanov[2,3]，Bruno[4]，Chow和Hale[5]，Chow和Wang[6]，Cushman和Sanders[7,8]，Cushman等人[9]，Elphick和Ioose等人[10]，Guckenheimer和Holmes[11]，Rand和Armbruster[12]，Takens[13,14]. 同时一些研究者利用规范形理论和普适开折理论研究了非线性振子的余维2退化分岔和全局分岔，例如Holmes和Rand[15]，Holmes[16]，Bajaj[17,18]，Shaw等人[19]，Namachchivaya[20]，张伟和霍拳忠[21~23]，陈予恕和徐鉴[24]. 关于余维3和余维4退化分岔的研究也已经获得了很大的进展. Dumortier等人[25]研究了余维3尖点型奇点的退化分岔. 在[26]里Dumortier等人研究了余维3退化分岔和鞍点型奇点、焦点型奇点和椭圆型奇点的开折. Dumortier等人[27]利用Macsyma和Mathematica程序计算了二次系统的高阶规范形，并且研究了平面向量场的余维3和余维4退化分岔.

由Elphick和Ioose等人[10]提出的共轭算子法是计算规范形的三种主要方法之一，另外两种方法是矩阵表示法[11,28]以及Cushman和Sanders[7]提出的Lie代数中的sl$(2,\mathbb{R})$表示论法. 在计算高阶规范形时，共轭算子法与矩阵表示法相比，其优点是不需要重复计算高阶矩阵和代数方程组，因而计算工作量可以相对减少一些. 在文献[29]中，我们利用矩阵表示法计算了具有Z_2-对称性的非线性动力系统的五阶规范形.

在本文里，我们研究不具有Z_2-对称性的非线性动力系统

* 国家自然科学基金资助项目.

1 天津大学力学系，天津 300072.

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\sum_{j=1}^{2}a_{1j}^{(0)}\mu_j+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}^{(1)}\mu_jx_i+\sum_{i+j=2}^{4}a_{ij}x_1^ix_2^j\\ \dot{x}_2&=\sum_{i=1}^{2}b_{1j}^{(0)}\mu_j+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_{ij}^{(1)}\mu_jx_i+\sum_{i+j=2}^{4}b_{ij}x_1^ix_2^j\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{i+j=2}a_{ij}x_1^ix_2^j=a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2$，其余的类同，并且所有系数均为实数.

当$\mu_j=0\,(j=1,2)$时，系统(1.1)的零解有两个零特征值，即系统 (1.1) 的线性部分是幂零的，我们有

$$A=D_xX(x)|_{x=0}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

下面我们利用共轭算子法计算系统(1.1)的4阶规范形，并研究几种余维 3 退化分岔情况下的普适开折问题及其一些全局特性.

二、含有参数系统的规范形

这一节我们讨论含有参数的二维动力系统

$$\dot{x}=X(x,u)\overset{\text{def}}{=\!=}B(\mu)+(A+A(\mu))x+f^2(x)+f^3(x)+f^4(x)+O(|x|^5)\tag{2.1}$$

的规范形，这里$x\in\mathbb{R}^2$，$\mu\in\mathbb{R}^2$，$f^k(x)\in H_2^k$ $(k=2,3,4)$，H_2^k 表示所有在$\mathbb{R}^2$上的k次齐次多项式组成的线性空间，

$$B(\mu)=\begin{bmatrix}a_{11}^{(0)}\mu_1 & a_{12}^{(0)}\mu_2\\ b_{11}^{(0)}\mu_1 & b_{12}^{(0)}\mu_2\end{bmatrix},\quad A(\mu)=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}\mu_1+a_{12}^{(1)}\mu_2 & a_{21}^{(1)}\mu_1+a_{22}^{(1)}\mu_2\\ b_{11}^{(1)}\mu_1+b_{12}^{(1)}\mu_2 & b_{21}^{(1)}\mu_1+b_{22}^{(1)}\mu_2\end{bmatrix}$$

A是Jordan标准形. 下面我们给出这一节的主要结论.

定理1 对于$0\in\mathbb{R}^2$的某个邻域里的所有μ，系统(2.1)的规范形为

$$\dot{y}=B(\mu)+(A+A(\mu))y+g^2(y)+g^3(y)+g^4(y)+R(y,\mu)\tag{2.2}$$

这里 $g^k(y)\in C^k(k=2,3,4)$，$R(y,\mu)=O(|\mu||y|+|\mu||y|^2+|\mu||y|^3+|\mu||y|^4+|y|^5)$.

证明 设近于恒同的非线性变换为

$$x=y+\xi^2(y)\qquad(\xi^2(y)\in H_2^2)\tag{2.3}$$

则有

$$\dot{x}=(I+D\xi^2(y))\dot{y}\tag{2.4}$$

$$(I+D\xi^2(y))^{-1}=I-D\xi^2(y)+(D\xi^2(y))^2-(D\xi^2(y))^3+\cdots\tag{2.5}$$

把(2.4)式和(2.5)式代入系统(2.1)，得

$$\begin{aligned}\dot{y}&=(I+D\xi^2(y))^{-1}\dot{x}=[I-D\xi^2(y)+(D\xi^2(y))^2-(D\xi^2(y))^3+\cdots]\\ &\quad\times[B(\mu)+(A+A(\mu))(y+\xi^2(y))+f^2(y+\xi^2(y))+f^3(y+\xi^2(y))+f^4(y+\xi^2(y))]\\ &=\{B(\mu)+(A+A(\mu))y+f^2(y)-[D\xi^2(y)Ay-A\xi^2(y)]\}\\ &\quad+\{f^3(y)+Df^2(y)\xi^2(y)-D\xi^2(y)[f^2(y)-(D\xi^2(y)Ay-A\xi^2(y))]\}\\ &\quad+f^4(y)+D^2f^2(y)(\xi^2(y))^2/2+Df^3(y)\xi^2(y)-D\xi^2(y)\{f^3(y)+Df^2(y)\xi^2(y)\\ &\quad-D\xi^2(y)[f^2(y)-(D\xi^2(y)Ay-A\xi^2(y))]\}+R(y,\mu)\end{aligned}\tag{2.6}$$

这里 $f^2(y+\xi^2(y))=f^2(y)+Df^2(y)\xi^2(y)+\frac{1}{2}D^2f^2(y)(\xi^2(y))^2$

$f^3(y+\xi^2(y))=f^3(y)+Df^3(y)\xi^2(y)+\cdots$

$f^4(y+\xi^2(y))=f^4(y)+\cdots$

$R(y,\mu)=O(|\mu||y|+|\mu||y|^2+|\mu||y|^3+|\mu||y|^4+|y|^5)$

定义一个线性算子$ad_A^2: H_2^2\to H_2^2$

$$ad_A^2\xi^2(y)=D\xi^2(y)Ay-A\xi^2(y)\qquad(\xi^2(y)\in H_2^2)\tag{2.7}$$

令 R^2 是 ad_A^2 的值域，C^2 是R^2在H_2^2中的任一垂直补空间，$H_2^2=R^2\oplus C^2$，设$f^2(y)=h^2(y)+g^2(y)$，这里$g^2(y)\in C^2$，$h^2(y)\in R^2$。如果我们选择$\xi^2(y)$使得$ad_A^2\xi^2(y)=h^2(y)$，则 (2.6) 式成为（仍用x代替y）

$$\dot{x}=B(\mu)+(A+A(\mu))x+g^2(x)+\bar{f}^3(x)+\bar{f}^4(x)+R(x,\ \mu)\tag{2.8}$$

这里 $$\bar{f}^3(x)=f^3(x)+Df^2(x)\xi^2(x)-D\xi^2(x)g^2(x)\tag{2.9}$$

$$\bar{f}^4(x)=f^4(x)+\frac{1}{2}D^2f^2(x)(\xi^2(x))^2+Df^3(x)\xi^2(x)-D\xi^2(x)\bar{f}^3(x)\tag{2.10}$$

作近于恒同的非线性变换为

$$x=y+\xi^3(y)\qquad(\xi^3(y)\in H_2^3)\tag{2.11}$$

则有 $$\dot{x}=(I+D\xi^3(y))\dot{y},\ (I+D\xi^3(y))^{-1}=I-D\xi^3(y)+\cdots\tag{2.12}$$

代入(2.8)式，得

$$\begin{aligned}\dot{y}&=(I+D\xi^3(y))^{-1}\dot{x}=[I-D\xi^3(y)+\cdots]\times[B(\mu)+(A+A(\mu))(y+\xi^3(y))\\&\quad+g^2(y+\xi^3(y))+\bar{f}^3(y+\xi^3(y))+\bar{f}^4(y+\xi^3(y))+R(y,\ \mu)]\\&=B(\mu)+(A+A(\mu))y+g^2(y)+\bar{f}^3(y)-[D\xi^3(y)Ay-A\xi^3(y)]\\&\quad+\bar{f}^4(y)+Dg^2(y)\xi^3(y)-D\xi^3(y)g^2(y)+R(y,\ \mu)\end{aligned}\tag{2.13}$$

定义一个线性算子$ad_A^3: H_2^3\to H_2^3$

$$ad_A^3\xi^3(y)=D\xi^3(y)Ay-A\xi^3(y)\qquad(\xi^3(y)\in H_2^3)\tag{2.14}$$

并令$H_2^3=R^3\oplus C^3$，$\bar{f}^3(y)=h^3(y)+g^3(y)$，这里$g^3(y)\in C^3$，$h^3(y)\in R^3$。如果我们选择$\xi^3(y)$使得$ad_A^3\xi^3(y)=h^3(y)$，则(2.13)式成为（仍用$x$代替$y$）

$$\dot{x}=B(\mu)+(A+A(\mu))x+g^2(x)+g^3(x)+\bar{\bar{f}}^4(x)+R(x,\ \mu)\tag{2.15}$$

这里 $$\bar{\bar{f}}^4(x)=\bar{f}^4(x)+Dg^2(x)\xi^3(x)-D\xi^3(x)g^2(x)\tag{2.16}$$

再作近于恒同的非线性变换

$$x=y+\xi^4(y)\qquad(\xi^4(y)\in H_2^4)\tag{2.17}$$

重复上面的步骤，我们得到4阶规范形为

$$\dot{y}=B(\mu)+(A+A(\mu))y+g^2(y)+g^3(y)+g^4(y)+R(y,\ \mu)\tag{2.18}$$

这里 $g^4(y)=\bar{\bar{f}}^4(y)-ad_A^4\xi^4(y)$，$ad_A^4\xi^4(y)=D\xi^4(y)Ay-A\xi^4(y)$.

根据定理1我们可以得到以下结论：为了计算含有参数系统的规范形，只需要计算$\mu=0$时系统的规范形.

三、利用共轭算子法计算规范形

根据上面的研究，我们知道计算规范形的关键是求$C^k(k=2,\ 3,\ 4)$及其C^k的一组基。为了求$\mathrm{Im}\,ad_A^k$在H_2^k中的一个垂直补空间，我们引入一个定理.

定理2 设V为一有限维内积空间，L为V上的线性算子，L^*为L的共轭算子，则有

1) $\mathrm{Ker}L^*=(\mathrm{Im}L)^L$, 2) $V=\mathrm{Im}L\oplus\mathrm{Ker}L^*$

这里 $\mathrm{Ker}L^*$为L^*的零空间。

这个定理的证明可参见文献[30]。

下面我们研究共轭算子法。不失一般性，下面的研究均在n维空间$x\in\mathbb{R}^n$里进行，并且假设k为任意正整数。根据定理2我们可以知道如果能在H_n^k中定义内积并能求出线性算子ad_A^k的共轭算子$(ad_A^k)^*$，那么$\mathrm{Ker}(ad_A^k)^*$就是$\mathrm{Im}ad_A^k$在H_n^k中的垂直补空间。我们先给出H_n^k中内积的定义。

设对于任意$p(x)$，$q(x)\in H_n^k$，并且有

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k}p_{\alpha i}x^\alpha e_i \tag{3.1}$$

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k}q_{\alpha i}x^\alpha e_i \tag{3.2}$$

则我们定义

$$\langle p(x),\ q(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k}p_{\alpha i}q_{\alpha i}\alpha! \tag{3.3}$$

这里 $\alpha!=\alpha_1!\ \alpha_2!\ \cdots\alpha_n!$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

定理3 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$是$H_n^k$中的内积。

证明 根据内积的定义直接验证，我们知道$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$是$H_n^k$中的内积。

由定理3，我们可以得到以下几个结论：

(Ⅰ)
$$\langle x^\alpha,\ x^\beta\rangle=\begin{cases}\alpha!=\alpha_1!\ \alpha_2!\ \cdots\alpha_n! & (\alpha=\beta)\\ 0 & (\alpha\neq\beta)\end{cases} \tag{3.4}$$

(Ⅱ) 设$v(x)$，$w(x)\in H_n^k$，$v(x)=(v_1(x),\ \cdots,\ v_n(x))$，
$w(x)=(w_1(x),\ \cdots,\ w_n(x))$，则有

$$\langle v(x),\ w(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle v_i(x),\ w_i(x)\rangle \tag{3.5}$$

(Ⅲ)
$$\langle x^\alpha e_i,\ x^\beta e_j\rangle=\begin{cases}\alpha! & (i=j,\ \alpha=\beta)\\ 0 & (i\neq j\text{或}\alpha\neq\beta)\end{cases} \tag{3.6}$$

有了定理3之后，我们可以得到共轭算子法的主要定理。

定理4 $da_{A^*}^k=(ad_A^k)^*$，这里$A^*=\bar{A}^T$是A的共轭转置矩阵，并且

$$ad_{A^*}^k\xi^k(x)=D\xi^k(x)A^*x-A^*\xi^k(x) \tag{3.7}$$

这个定理的证明可参见Eephick等人[10]的文章。根据定理2和定理 4，我们可以得到以下推论：

推论1 $\mathrm{Ker}ad_{A^*}^k$是$\mathrm{Im}ad_A^k$在H_n^k中的垂直补空间，即有$H_n^k=\mathrm{Im}ad_A^k\oplus\mathrm{Ker}ad_{A^*}^k$。

根据前面的分析，我们知道$\mathrm{Ker}ad_{A^*}^k$是线性偏微分方程组

$$ad_{A^*}^k\xi^k(x)=0\qquad(\xi^k(x)\in H_n^k) \tag{3.8}$$

即
$$D\xi^k(x)A^*x-A^*\xi^k(x)=0 \tag{3.9}$$

的所有n元k次齐次向量多项式解组成的子空间．对于不同的k，求规范形时所需求解的线性偏微分方程组都是相同的．下面我们给出求r阶规范形的一般形式的方法．

设H_n为全体n元n维多项式组成的线性空间，定义线性算子$ad_A: H_n\to H_n$为

$$ad_A\xi(x)=D\xi(x)Ax-A\xi(x)\qquad(\xi(x)\in H_n)\tag{3.10}$$

则有$ad_A^k=ad_A|H_n^k$．因此方程(3.8)和(3.9)为

$$ad_{A^*}\xi(x)=0\qquad(\xi(x)\in H_n)\tag{3.11}$$

$$D\xi(x)A^*x-A^*\xi(x)=0\tag{3.12}$$

为了计算r阶规范形的一般形式，我们只需求出方程(3.12)的全部r次向量多项式解．我们计算系统(1.1)的4阶规范形的一般形式．根据定理1及其所得到的结论，我们知道为了计算系统(1.1)的规范形，只需计算系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\sum_{i+j=2}^{4}a_{ij}x_1^ix_2^j\\ \dot{x}_2&=\sum_{i+j=2}^{4}b_{ij}x_1^ix_2^j\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

的规范形．

令$\xi(x_1,\ x_2)=\{\xi_1(x_1,\ x_2),\ \xi_2(x_1,\ x_2)\}^T$，$\xi_1(x_1,\ x_2)$，$\xi_2(x_1,\ x_2)\in H_2$，$x=(x_1,x_2)^T$，由于$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则有$A^*=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，代入方程(3.12)得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi_1(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}&\dfrac{\partial\xi_1(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}\\[2mm]\dfrac{\partial\xi_2(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}&\dfrac{\partial\xi_2(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1(x_1,\ x_2)\\\xi_2(x_1,\ x_2)\end{bmatrix}=0\tag{3.14}$$

由此我们得到下列线性偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&x_1\frac{\partial\xi_1(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}=0\\ &x_1\frac{\partial\xi_2(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}-\xi_1(x_1,\ x_2)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.15}$$

方程组(3.15)的4次多项式解为

$$\left.\begin{aligned}\xi_1(x_1,\ x_2)&=\sum_{k=1}^{4}a_kx_1^k\\ \xi_2(x_1,\ x_2)&=\sum_{k=0}^{4}b_kx_1^k+\sum_{k=1}^{4}a_kx_1^{k-1}x_2\end{aligned}\right\}\tag{3.16}$$

这里a_k和b_k均为实数．$\mathrm{Ker}ad_{A^*}$是由下列向量张成的子空间，即

$$\mathrm{Ker}ad_{A^*}=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\x_1^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\x_1^3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\x_1^4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1^2\\x_1x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1^3\\x_1^2x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1^4\\x_1^3x^2\end{bmatrix}\right\}\tag{3.17}$$

因此系统(1.1)的4阶规范形的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\sum_{k=2}^{4}a_kx_1^k\\ \dot{x}_2&=\sum_{k=2}^{4}b_kx_1^k+\sum_{k=2}^{4}a_kx_1^{k-1}x_2\end{aligned}\right\}\tag{3.18}$$

四、规范形系统的计算

对于实际的非线性动力系统来说，我们必须找出规范形的系数a_k和$b_k(k=2,3,4)$与原系统的系数a_{ij}和b_{ij}之间的关系。目前我们可用两种方法来求规范形的系数，一种方法是待定系数法，另一种是内积法。在文献[29]中，我们用待定系数法计算出了五阶规范形的系数。在本文里我们用内积法求规范形的系数。下面我们给出内积法求规范形的系数的一般算法。

定理5 设$H_n^k=\mathrm{Im}ad_A^k\oplus C^k$，$f^k(x)\in H_n^k$，$g^k(x)$是$f^k(x)$在$C^k$中的投影，又设$v_1$，…，$v_s$为$\mathrm{Ker}ad_A^k*$的一组基，$w_1$，…，$w_s$为$C^k$的一组基，如果

$$\langle v_i,\ w_j\rangle=\delta_{ij}\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)\tag{4.1}$$

那么$f^k(x)$在C^k中的投影可由下式计算

$$g^k(x)=\sum_{i=1}^{s}\langle f^k(x),\ v_i\rangle w_i\tag{4.2}$$

证明 $g^k(x)\in C^k$是显然的，要证$g^k(x)$为$f^k(x)$在C^k中的投影，只需证明$f^k(x)-g^k(x)\in\mathrm{Im}ad_A^k$，事实上，对每个$i=1,2,\cdots,s$，有

$$\begin{aligned}\langle f^k(x)-g^k(x),\ v_i\rangle&=\langle f^k(x),\ v_i\rangle-\langle g^k(x),\ v_i\rangle\\&=\langle f^k(x),\ v_i\rangle-\langle f^k(x),\ v_i\rangle\langle w_i,\ v_i\rangle\\&=\langle f^k(x),\ v_i\rangle-\langle f^k(x),\ v_i\rangle=0\end{aligned}$$

由Fredholm定理知$f^k(x)-g^k(x)\in\mathrm{Im}ad_A^k$.

下面我们依次计算系统(1.1)的4阶规范形(3.18)的2次项系数、3次项系数和4次项的系数。

1. 2次项系数的计算

根据第三节的计算我们知道$\{x_1^2e_2,\ x_1^2e_1+x_1x_2e_2\}$是$\mathrm{Ker}ad_A^2*$的一组基，记为$v_1=x_1^2e_2$，$v_2=x_1^2e_1+x_1x_2e_2$，这里$e_1=\{1,\ 0\}^T$，$e_2=\{0,\ 1\}^T$。取$w_1=\frac{1}{2}x_1^2e_2$，$w_2=x_1x_2e_2$为$C^2$的一组基，则有$\langle v_i,\ w_i\rangle=\delta_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$。由于

$$f^2(x)=\begin{bmatrix}a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2\\ b_{20}x_1^2+b_{11}x_1x_2+b_{02}x_2^2\end{bmatrix}$$

根据公式(4.2)得

$$g^2(x)=\sum_{i=1}^{2}\langle f^2(x),\ v_i\rangle w_i=b_{20}x_1^2e_2+(2a_{20}+b_{11})x_1x_2e_2\tag{4.3}$$

因此我们求出了2次项的系数与原系统的系数之间的关系式。令

$$\xi^2(x)=\begin{bmatrix}\xi_1^2(x)\\ \xi_2^2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{20}x_1^2+c_{11}x_1x_2+c_{02}x_2^2\\ d_{20}x_1^2+d_{11}x_1x_2+d_{02}x_2^2\end{bmatrix}$$

由(2.7)式，得

$$ad_A^2\xi^2(x)=D\xi^2(x)Ax-A\xi^2(x)=\begin{bmatrix}-d_{20}x_1^2+(2c_{20}-d_{11})x_1x_2+(c_{11}-d_{02})x_2^2\\ 2d_{20}x_1x_2+d_{11}x_2^2\end{bmatrix}\tag{4.4}$$

方程$ad_A^2\xi^2(x)=f^2(x)-g^2(x)$，并令等式两边同类项的系数相等，得

$$\xi^2(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(a_{11}+b_{02})x_1^2+(a_{02}+d_{02})x_1x_2+c_{02}x_2^2\\ -a_{20}x_1^2+b_{02}x_1x_2+d_{02}x_2^2\end{bmatrix}\tag{4.5}$$

这里　C_{03}和d_{02}为任意实数。

系统(1.1)的2阶规范形为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=b_{20}x_1^2+(2a_{20}+b_{11})x_1x_2\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

2．　3次项系数的计算

我们首先求$\tilde{f}^3(x)$，由于

$$f^3(x)=\begin{bmatrix}a_{30}x_1^3+a_{21}x_1^2x_2+a_{12}x_1x_2^2+a_{03}x_2^3\\ b_{30}x_1^3+b_{21}x_1^2x_2+b_{12}x_1x_2^2+b_{03}x_2^3\end{bmatrix}$$

根据公式(2.9)，我们有

$$\tilde{f}^3(x)=f^3(x)+Df^2(x)\xi^2(x)-D\xi^2(x)g^2(x)=f^3(x)+f_1^3(x)-f_2^3(x)\tag{4.7}$$

这里　$f_1^3(x)=Df^2(x)\xi^2(x)$，$f_2^3(x)=D\xi^2(x)g^2(x)$．在计算出$f_1^3(x)$和$f_2^3(x)$后，我们得到

$$\tilde{f}^3(x)=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{30}x_1^3+\tilde{a}_{21}x_1^2x_2+\tilde{a}_{12}x_1x_2^2+\tilde{a}_{03}x_2^3\\ \tilde{b}_{30}x_1^2+\tilde{b}_{21}x_1^2x_2+\tilde{b}_{12}x_1x_2^2+\tilde{b}_{03}x_2^3\end{bmatrix}\tag{4.8}$$

这里$\tilde{a}_{30}=a_{30}+a_{20}b_{02}-b_{20}(a_{02}+d_{02})$

$\tilde{a}_{21}=a_{21}+\frac{1}{2}a_{11}(a_{11}+3b_{02})-2a_{20}a_{02}-b_{11}(a_{02}+d_{02})-2b_{20}c_{02}$

$\tilde{a}_{12}=a_{12}+a_{11}(a_{02}+2d_{02})+2a_{02}b_{02}-2c_{02}(a_{20}+b_{11})$

$\tilde{a}_{03}=a_{03}+a_{11}c_{02}+2a_{02}d_{02}$，　$\tilde{b}_{30}=b_{30}+a_{11}b_{20}-a_{20}b_{11}$

$\tilde{b}_{21}=b_{21}+2a_{02}b_{20}+\frac{1}{2}b_{11}(a_{11}+b_{02})-4_{20}b_{02}$

$\tilde{b}_{12}=b_{12}+a_{02}b_{11}-4a_{20}d_{02}+2b_{20}c_{02}+2b_{02}^2$，　$\tilde{b}_{03}=b_{03}+b_{11}c_{02}+2b_{02}d_{02}$

根据第三节的计算们我知道$\{x_1^3e_2,\ x_1^3e_1+x_1^2x_2e_2\}$是$\mathrm{Ker}ad_A^3*$的一组基，记为$v_1=x_1^3e_2$，$v_2=x_1^3e_1+x_1^2x_2e_2$，取$w_1=\frac{1}{6}x_1^3e_2$，$w_2=\frac{1}{2}x_1^2x_2e_2$为$C^3$的一组基，则有$\langle v_i,\ w_j\rangle=\delta_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$．根据公式(4.2)，得

$$g^3(x)=\sum_{i=1}^{2}\langle\tilde{f}^3(x),\ v_i\rangle w_i=\begin{bmatrix}0\\ \tilde{b}_{30}x_1^3+(3\tilde{a}_{30}+\tilde{b}_{21})x_1^2x_2\end{bmatrix}\tag{4.9}$$

因此系统(1.1)的3阶规范形为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=b_{20}x_1^2+\tilde{b}_{30}x_1^3+(2a_{20}+b_{11})x_1x_2+(3\tilde{a}_{30}+\tilde{b}_{21})x_1^2x_2\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

下面我们再求$\xi^3(x)$，令

$$\xi^3(x)=\begin{pmatrix}\xi_1^3(x)\\ \xi_2^3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{30}x_1^3+c_{21}x_1^2x_2+c_{12}x_1x_2^2+c_{03}x_2^3\\ d_{30}x_1^3+d_{21}x_1^2x_2+d_{12}x_1x_2^2+d_{03}x_2^3\end{pmatrix}$$

根据(2.14)式，得

$$ad_A^3\xi^3(x)=\begin{pmatrix}-d_{30}x_1^3+(3c_{30}-d_{21})x_1^2x_2+(2c_{21}-d_{12})x_1x_2^2+(c_{12}-d_{03})x_2^3\\ 3d_{30}x_1^2x_2+2d_{21}x_1x_2^2+d_{12}x_2^3\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

代入方程$ad_A^3\xi^3(x)=\tilde{f}^3(x)-g^3(x)$，并令等式两边同类项的系数相等，得

$$\xi^3(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(\tilde{a}_{21}+\frac{1}{2}\tilde{b}_{12}\right)x_1^3+\frac{1}{2}(\tilde{a}_{12}+\tilde{b}_{03})x_1^2x_2+(\tilde{a}_{03}+d_{04})x_1x_2^2+c_{03}x_2^3\\ -\tilde{a}_{30}x_1^3+\frac{1}{2}\tilde{b}_{12}x_1^2x_2+\tilde{b}_{03}x_1x_2^2+d_{03}x_2^3\end{pmatrix} \tag{4.12}$$

这里c_{03}和d_{03}是任意实数.

3. 4次项系数的计算

我们首先求$\tilde{f}^4(x)$，由于

$$f^4(x)=\begin{pmatrix}a_{40}x_1^4+a_{31}x_1^3x_2+a_{22}x_1^2x_2^2+a_{13}x_1x_2^3+a_{04}x_2^4\\ b_{40}x_1^4+b_{31}x_1^3x_2+b_{22}x_1^2x_2^2+b_{13}x_1x_2^3+b_{04}x_2^4\end{pmatrix}$$

$$D^2f^2(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2f^2}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2f^2}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2f_1^2}{\partial x_2^2}\\ \dfrac{\partial^2f_2^2}{\partial x_1^3} & \dfrac{\partial^2f_2^2}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2f_2^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix},\quad (\xi^2(x))^2=\begin{pmatrix}(\xi_1^2(x))^2\\ 2\xi_1^1(x)\xi_2^2(x)\\ (\xi_2^2(x))^2\end{pmatrix} \tag{4.13}$$

则有

$$f_1^4(x)=\frac{1}{2}D^2f^2(x)(\xi^2(x))^2=\begin{pmatrix}a_{140}x_1^4+\cdots\\ b_{140}x_1^4+b_{131}x_1^3x_2+\cdots\end{pmatrix} \tag{4.14}$$

这里 $a_{140}=\frac{1}{4}a_{20}(b_{02}^2-a_{11}^2)+a_{22}^2a_{02}$

$$b_{140}=\frac{1}{4}b_{20}(a_{11}+b_{02})^2-\frac{1}{2}a_{20}b_{11}(a_{11}+b_{02})+a_{20}^2b_{02}$$

$$b_{131}=(a_{02}+d_{02})(a_{11}b_{20}+b_{20}b_{02}-\frac{1}{2}a_{20}b_{11})+\frac{1}{4}b_{11}b_{02}(a_{11}+b_{02})-2a_{20}b_{02}^2$$

$$f_2^4(x)=Df^3(x)\xi^2(x)=\begin{pmatrix}a_{240}x_1^4+\cdots\\ b_{240}x_1^4+b_{231}x_1^3x_2+\cdots\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

这里 $a_{240}=\frac{3}{2}a_{30}(a_{11}+b_{02})-a_{20}a_{21}$，$b_{240}=\frac{3}{2}b_{30}(a_{11}+b_{02})-a_{20}b_{21}$

$$b_{231}=3b_{30}(a_{02}+d_{02})+b_{21}(a_{11}+2b_{02})-2a_{10}b_{12}$$

$$f_3^4(x)=D\xi^2(x)\tilde{f}^3(x)=\begin{pmatrix}a_{340}x_1^4+\cdots\\ b_{340}x_1^4+b_{331}x_1^3x_2+\cdots\end{pmatrix} \tag{4.16}$$

这里 $a_{340}=\tilde{a}_{30}(a_{11}+b_{02})+\tilde{b}_{30}(a_{12}+d_{02})$，$b_{340}=-2a_{20}\tilde{a}_{30}+b_{02}\tilde{b}_{30}$

$b_{331}=-2a_{20}\tilde{a}_{21}+b_{02}\tilde{a}_{30}+b_{02}\tilde{b}_{21}+2d_{02}\tilde{b}_{30}$

因此根据公式(2.10)，我们可以得到

$$\tilde{f}^4(x)=f^4(x)+f_1^4(x)+f_2^4(x)-f_2^4(x)=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{40}x_1^4+\cdots\\ \tilde{b}_{40}x_1^4+\tilde{b}_{31}x_1^3x_2+\cdots\end{bmatrix} \tag{4.17}$$

这里 $\tilde{a}_{40}=a_{40}+a_{140}+a_{240}-a_{340}$，$\tilde{b}_{40}=b_{40}+b_{140}+b_{240}-b_{340}$

$\tilde{b}_{31}=b_{31}+b_{131}+b_{231}-b_{331}$

下面我们再求$\tilde{f}^4(x)$，由于

$$\tilde{f}_1^4(x)=Dg^2(x)\xi^3(x)=\begin{bmatrix}0\\ \tilde{b}_{140}x_1^4+\tilde{b}_{131}x_1^3x_2+\cdots\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

这里 $\tilde{b}_{140}=\frac{2}{3}b_{20}\left(\tilde{a}_{21}+\frac{1}{2}\tilde{b}_{12}\right)-\tilde{a}_{30}(2\tilde{a}_{20}+b_{11})$

$\tilde{b}_{131}=\frac{1}{3}(2a_{20}\tilde{a}_{21}+b_{11}\tilde{a}_{21}+4a_{20}\tilde{b}_{12}+2b_{11}\tilde{b}_{12})$

$$\tilde{f}_2^4(x)=D\xi^3(x)g^2(x)=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{240}x_1^4+\cdots\\ \tilde{b}_{240}x_1^4+\tilde{b}_{231}x_1^3x_2+\cdots\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

这里 $\tilde{a}_{240}=\frac{1}{2}b_{20}(\tilde{a}_{12}+\tilde{b}_{03})$，$\tilde{b}_{240}=\frac{1}{2}b_{20}\tilde{b}_{12}$，$\tilde{b}_{231}=2b_{20}\tilde{b}_{03}+\frac{1}{2}\tilde{b}_{12}(2a_{20}+b_{11})$

根据公式(2.16)，我们可以得到

$$\bar{f}^4(x)=\tilde{f}^4(x)+\tilde{f}_1^4(x)-\tilde{f}_2^4(x)=\begin{bmatrix}\bar{a}_{40}x_1^4+\\ \bar{b}_{40}x_1^4+\bar{b}_{31}x_1^3x_2+\cdots\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

这里$\bar{a}_{40}=\tilde{a}_{40}-\tilde{a}_{240}$，$\bar{b}_{40}=\tilde{b}_{40}+\tilde{b}_{140}-\tilde{b}_{240}$，$\bar{b}_{31}=\tilde{b}_{31}+\tilde{b}_{131}-\tilde{b}_{231}$。

由第三节的计算我们知道$\{x_1^4e_2,\ x_1^4e_1+x_1^3x_2e_2\}$是$\mathrm{Ker}\,ad_A^4{}^*$的一组基，记为$v_1=x_1e_2$，$v_2=x_1^4e_1+x_1^3x_2e_2$，取$w_1=\frac{1}{24}x_1^4e_2$，$w_2=\frac{1}{6}x_1^3x_2e_2$为$C^4$的一组基，则有$\langle v_i,\ w_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2)$。再根据公式(4.2)，得

$$g^4(x)=\sum_{i=1}^{2}\langle\bar{f}^4(x),\ v_i\rangle w_i=\begin{bmatrix}0\\ \bar{b}_{40}x_1^4+(4\bar{a}_{40}+\bar{b}_{31})x_1^3x_2\end{bmatrix} \tag{4.21}$$

因此系统(1.1)的含有参数的4阶规范形为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\sum_{j=1}^{2}a_{1j}^{(0)}\mu_j+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}^{(1)}\mu_jx_i\\ \dot{x}_2&=\sum_{j=1}^{2}b_{1j}^{(0)}\mu_j+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_{ij}^{(1)}\mu_jx_i+a_2x_1^2+a_3x_1^3+a_4x_1^4+b_2x_1x_2+b_3x_1^2x_2+b_4x_1^3x_2\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

这里 $a_2=b_{20}$，$b_2=2a_{20}+b_{11}$，$a_3=\tilde{b}_{30}$，$b_3=3\tilde{a}_{30}+\tilde{b}_{21}$，$a_4=\bar{b}_{40}$，$b_4=4\bar{a}_{40}+\bar{b}_{31}$

五、普适开折和一些简单的全局特性

本节我们讨论系统(1.1)在几种余维3退化分叉情况下的普适开折，由于开折参数选取的

不同，可以有以下几种情况．

1．第一类普适开折

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2\\&\dot{x}_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+x_2+\varepsilon_3x_1x_2+ax_1^2+a_3x_1^3+a_4x_1^4+b_3x_1^2x_2+b_4x_1^3x_2\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

这里 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\mu_1,\ \mu_2)$，$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\mu_1,\ \mu_2)$，$\varepsilon_3=b_2$．普适开折(5.1)可以产生尖点型奇点的余维退化分叉．Dumertier等人[25]对$a_3=a_4=b_3=0$的情况进行了详细研究．

2．第二类普适开折

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2\\&\dot{x}_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2x_1+\varepsilon_3x_2+a_3x_1^3+a_4x_1^4+b_2x_1x_2+b_3x_1^2+b_4x_1^3x_2\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

这里 ε_1，ε_2和ε_3是μ_1和μ_2的函数．Dumertier等人[26]对$a_4=b_4=0$的情况进行了研究并且给出了一些猜测结果，有三种情况的余维3退化分叉，这三种情况分别是：(i)退化鞍点情况，$a_3>0$；(ii)退化焦点情况，$a_3<0$，$b_2^2+4a_3<0$；(iii)椭圆情况，$a_3<0$，$b_2^2+4a_3>0$．

六、讨论和结论

从理论上讲，给定一个实际的非线性动力系统，我们可以计算出任意高阶的规范形．由本文的研究可以看出，虽然利用共轭算子法计算高阶规范形时不需要重复计算高阶矩阵，但计算规范形系数的过程仍过于繁杂，因此计算实际系统的高阶规范形并非一件易事．目前虽然可使用MACSYMA符号语言来推导规范形系数的表达式[27]，但是很有必要从理论上给出一些更为简便的算法．在不具有Z_2-对称性的普适开折中，如何方便地求出开折参数与原系统参数之间的关系还是一个有待于研究的问题．

致谢 作者感谢王铎教授的帮助和香港王宽诚教育基金会的资助．

参 考 文 献

[1] V. I. Arnold, *Geometrical Method in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[2] R. I. Bogdanov, Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector field, *Sel. Math. Sov.*, 1 (1981), 373—387.

[3] R. I. Bogdanov, Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues, *Sel. Math. Sov.*, 1 (1981), 389—421.

[4] A. D. Bruno, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[5] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1982).

[6] S. N. Chow and D. Wang, Normal form of bifurcating periodic orbits, Multi-parameter bifurcation theory, M. Golubitsky and J. Guckenheimer (eds), *Contemporary Math.*, 56 (1986), 9—18.

[7] R. Cushman and J. Sanders, Nilpotent normal forms and representation

theory of sl (2, *R*), Multi-parameter bifurcation theory, M. Golubitsky and J. Guckenheimer (eds), *Contemporary Math.*, 56 (1986), 31—51.

[8] R. Cushman and J. Sanders, Splitting algorithm for nilpotent normal forms, *Dynamics and Stability of Systems*, 2 (1988), 235—246.

[9] R. Cushman, A. Deprit and R. Mosak, Normal forms and representation theory, *J. Math. Phys.*, 24 (1983), 2103—2116.

[10] C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coullet and G. Iooss, A simple global characterization for normal forms of singular vector fields, *Phys. D.*, 29 (1987), 95—117.

[11] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[12] R. Rand and D. Armbruster, *Perturbation Method, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[13] F. Takens, Normal forms for certain singularities of vector fields, *Ann. Inst. Fourier*, 23 (1973), 163—195.

[14] F. Takens, Singularities of vector fields, *Publ. Math. IHES*, 43 (1974), 47—100.

[15] P. Holmes and D. A. Rand, Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator $\ddot{x}+(\alpha+\gamma x^2)\dot{x}+\beta x+\delta x^3=0$, *Int. J. Non-linear Mech.*, 15 (1980), 449—458.

[16] P. Holmes, Center manifolds, normal forms and bifurcations of vector fields with application to coupling between periodic and steady motions, *Phys. D.*, 2 (1981), 449—481.

[17] A. K. Bajaj, Bifurcations in a parametrically encited nonlinear oscillator, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 22 (1987), 47—59.

[18] A. K. Bajaj, Nonlinear dynamics of tubes carrying a pulsatile flow, *Dynamics and Stability of Systems*, 2 (1987), 19—41.

[19] J. Shaw and S. W. Shaw, The effects of unbalance on oil whirl, *Nonlinear Dynamics*, 1 (1990), 293—311.

[20] N. Sri, Namachchivaya, Co-dimension two bifurcations in the presence of noise, *ASNE J. Appl. Mech.*, 58 (1991), 259—265.

[21] W. Zhang and Q. Z. Huo, Degenerate bifurcations of codimension two in non-linear oscillator under combined parametric and forcing excitation, *Acta Mechanica Sinica*, 24 (1992), 717—727.

[22] W. Zhang and Q. Z. Huo, Degenerate bifurcations of codimension two in non-linear oscillator for 1/2 subharmonic resonance——primary parametric resonance, *Theory, Method and Application of Nonlinear Mechanics*, C. J. Cheng and Z. H. Guo (eds), *Modern Mathematics and Mechanics (MMM)* Ⅳ, (1991). 431—437.

[23] W. Zhang and Q. Z. Huo, Bifurcations of the cusp singularity in a nonlinear oscillator under combined parametric and forcing excitation, *J. Vibration Engineering*, 6 (1992), 355—366.

[24] Y. S. Chen and J. Xu, Periodic response and bifurcation theory of nonlinear Hill system, *J. Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 1 (1993), 1—14.

[25] F. Dumortier, R. Roussarie and J. Sotomayor, Generic 3-parameter families

of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear parts, the cusp case, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7 (1987), 375—413.

[26] F. Dumortier, R. Roussarie and J. Sotomayor, Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfolding of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts (1990). (Preprint)

[27] F. Dumortier and P. Fiddelaers, Quadratic models for generic local 3 parameter bifurcations on the plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **326** (1991), 101—126.

[28] D. Mang, An introduction to the normal form theory of ordinary differential equations, *Advances in Mathematics*, **19** (1990), 38—71.

[29] W. Zhang, Computation of the higher order normal form and codimension three degenerate bifurcation in a nonlinear dynamical system with Z_2——symmetry, *Acta Mechnica Sinica*, **25** (1993), 548—559.

[30] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons, Interscience (1980).

Adjoint Operator Method and Normal Forms of Higher Order for Nonlinear Dynamical System

Zhang Wei Chen Yushu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, *P. R. China)*

Abstract

Normal form theory is a very effective method in the study of degenerate bifurations of nonlinear dynamical systems. In this paper, by using adjoint operator method, normal forms of order 3 and 4 for nonlinear dynamical system with nilpotent linear part and Z_2-asymmetry are computed. According to normal forms obtained, universal unfoldings for some degenerate bifurcation cases of codimension 3 and simple global characterizations are discussed.

Kew words nonlinear dynamical system, adjoint operator method, normal forms of order 3 and 4, degenerate bifurcation of codimension 3, universal unfolding