

发展方程族Lax表示的广义结构*

乔志军¹

(戴天民推荐, 1995年11月17日收到, 1996年10月5日收到修改稿)

摘 要

本文给出非线性发展方程族的一个生成格式(该格式包含了保谱族与非保谱族作为其两个特殊情况), 并提供该格式下发展方程族Lax表示的广义结构. 最后, 作为应用, 我们讨论了Levi族发展方程.

关键词 生成格式 广义结构 Levi族

一、引 言

在孤子理论中, 寻求非线性发展方程的Lax表示, 并探讨Lax算子代数结构等性质是非常有趣的课题. 马文秀在文[1, 2]中曾研究过等谱、非等谱发展方程族的Lax表示结构. 为讨论方便, 现将[1, 2]的有关结果统一如下:

设位势向量函数 $u = (u_1, \dots, u_m)^T$. 则与 $N \times N$ 谱问题

$$L(u)y = \lambda y, \quad \lambda_t = a\lambda^m \quad (m \geq 0, a = \text{const}) \quad (1.1)$$

相联系的非线性发展方程族(等谱情形, $a=0$; 非等谱情形 $a \neq 0$)

$$u_t = J\mathcal{L}^m G_0 \quad (m \geq 0) \quad (1.2)$$

具有Lax表示

$$L_t = [W_m, L] + aL^m, \quad W_m = \sum_{j=0}^m V_{j-1} L^{m-j} \quad (m \geq 0) \quad (1.3)$$

的条件是:

(i) (1.2)中的 G_0 及(1.3)中的 V_{-1} 由算子方程

$$[V_{-1}, L] = L_*(JG_0) - aI \quad (I \text{ 为恒同算子}) \quad (1.4)$$

决定;

(ii) (1.3)中的 $V_j = V(G_j) = V(\mathcal{L}^j G_0)$ ($j=0, 1, 2, \dots, m-1$)由算分方程

$$[V(G), L] = L_*(KG) - L_*(JG)L \quad (\forall G = (G_1, \dots, G_m)^T) \quad (1.5)$$

的算子解 $V = V(G)$ 代以 $G = \mathcal{L}^j G_0$ 给出, 这里 $K = J\mathcal{L}$, $L_*(\xi) \triangleq \frac{d}{d\xi} \Big|_{\xi=0} L(u + \varepsilon\xi)$.

* 国家自然科学基金资助项目.

¹ 辽宁大学, 沈阳 110036; 复旦大学数学研究所, 上海 200433

根据这一过程,一些非等谱($a \neq 0$)发展方程族、等谱($a=0$)发展方程族及其相应的 Lax 表示被导出^[2,3]。

对于谱问题(1.1),要想产生方程族(1.2),则关键须解出使(1.4)成立的 G_0 及 V_{-1} ;要想让方程族(1.2)具有Lax表示(1.3),则关键须解出(1.5)的算子解 $V=V(G)$ 。关于后者,我们已有一些讨论^[4],限于篇幅,本文不拟涉及;关于前者,我们发现对某些谱问题(比如 Levi 谱问题, Kaup-Newell 谱问题等)而言,(1.4)不易求解或即使能解出,其表达式也较复杂,这将不利于非线性发展方程族(1.2)的生成,针对这一问题,本文将提出方程族(1.2)新的生成格式,推广并简化(1.4)的运算,继而给出在新的生成格式下非线性发展方程族 Lax 表示的广义结构。

二、非线性方程族的生成及Lax表示的广义结构

现考察一般的 $N \times N$ 谱问题:

$$Ly=L(u)y=\lambda y \tag{2.1}$$

其中 $L=L(u)$ 是 $N \times N$ 谱算子, $u=(u_1, \dots, u_N)^T$ 是位势向量函数, λ 为谱参数, $y=(y_1, \dots, y_N)^T$ 。

依谱梯度法^[5],我们总可以找到所谓 Lenard 算子对 $K=K(u, \partial, \partial^{-1})$, $J=J(u, \partial, \partial^{-1})$, $(\partial=\partial/\partial x, \partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1)$, 使得

$$K\nabla_u \lambda = \lambda^c \cdot J\nabla_u \lambda \tag{2.2}$$

这里 $\nabla_u \lambda \triangleq \frac{\delta \lambda}{\delta u}$ 是(2.1)的谱梯度,可按一定的方法^[6,7]去求得; c 为某固定的常数,一般来说,由(2.1)的具体形式而定。算子 $\mathcal{L} \triangleq J^{-1}K$ 就是通常的递推算子或强对称算子。通常, K, J 反称且二者至少有一是 Hamilton 算子。

现在来阐述(2.1)的发展方程族之生成过程。仍记 $L_*(\xi) \triangleq \frac{d}{d\xi} \Big|_{\xi=0} L(u+\varepsilon\xi)$ 。对于任意给定的 $N \times N$ 矩阵算子 $M=(m_{ij})_{N \times N}$,我们建立如下由(2.1)的Lenard算子 J 以及算子 L_* 生成的关于未知函数向量 $G_{-1} \triangleq (G_{-1}^{(1)}, \dots, G_{-1}^{(N)})^T$ 的算子方程

$$L_*(JG_{-1})=M \tag{2.3}$$

记(2.3)的解集合为 \mathcal{S} (一般非空),设 $\mathcal{S} \neq \emptyset$,任取 $G_{-1} \in \mathcal{S}$,构造 Lenard 递推叙列 $\{G_j\}$ 如下:

$$G_j = J^{-1}KG_{j-1} = \mathcal{L}^{j+1}G_{-1} \quad (j=0, 1, 2, \dots) \tag{2.4}$$

由向量场 $X_m(u) \triangleq JG_m = J\mathcal{L}^{m+1}G_{-1}$ 产生的非线性方程

$$u_{,m} = X_m(u) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \tag{2.5}$$

称为(2.1)的非线性发展方程族。至此,靠新格式(2.3), (2.1)的发展方程族(2.5)得以生成,而且新格式(2.3)比(1.4)简化些。下文可知(2.3)包含了(1.4)

定理 设 $M=(m_{ij})_{N \times N}$ 是一个任意给定的 $N \times N$ 矩阵算子,对给定的谱问题(2.1),作如下假设:

- (i) $L=L(u)$ 沿 ξ 方向的 Gateaux 导数算子 $L_*(\xi)$ 是单射;
- (ii) (2.3)的解集合 $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
- (iii) 对任意 $G=(G^{(1)}, \dots, G^{(N)})^T$,由Lenard算子对 K, J 生成的算子方程

$$[V(G), L] = L_*(KG) - L_*(JG)L \tag{2.6}$$

有算子解 $V = V(G)$ 。那么(2.1)的非线性发展方程族(2.5)具有下述Lax表示

$$\left. \begin{aligned} L_{t_m} &= [W_m, L] + ML^{m+1} \\ W_m &= \sum_{j=0}^m V(G_{j-1})L^{m-j} \end{aligned} \right\} (m \geq 0) \tag{2.7}$$

其中 G_{j-1} 由Lenard递推叙列(2.4)决定。

证明 $[W_m, L] = \sum_{j=0}^m [V(G_{j-1}), L]L^{m-j} \stackrel{(ii)}{=} \sum_{j=0}^m (L_*(KG_{j-1}) - L_*(JG_{j-1})L)L^{m-j} \stackrel{(2.4)}{=} \sum_{j=0}^m (L_*(JG_j)L^{m-j} - L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1})$

$$= L_*(JG_m) - L_*(JG_{-1})L^{m+1} \stackrel{(2.3)}{=} L_*(JG_m) - ML^{m+1} = L_*(X_m) - ML^{m+1}.$$

因而 $[W_m, L] + ML^{m+1} = L_*(X_m)$ (2.8)

又 $L_*(u_{t_m}) = L_{t_m}$, 故

$$L_*(u_{t_m} - X_m(u)) = L_{t_m} - ([W_m, L] + ML^{m+1})$$

但 L_* 为单射, 故而(2.7)与(2.5)等价。

由(2.8)及(i), 我们易得到

推论 位势向量函数 u 满足定态系统

$$C_0 X_N(u) + C_1 X_{N-1}(u) + \dots + C_N X_0(u) = 0 \quad (C_0, \dots, C_N = \text{const}) \tag{2.9}$$

的充要条件是

$$\left[\sum_{k=0}^N C_{N-k} W_k, L \right] = -M \left(\sum_{k=0}^N C_{N-k} L^{k+1} \right) \tag{2.10}$$

注1 若取 $M=0$, 则(2.3)变为 $L_*(JG_{-1})=0$, 此即 $JG_{-1}=0$ 。此时产生的发展方程族(2.5)即是(2.1)的保谱族($\lambda_t=0$)。其Lax表示(2.7)恰好是文[8]的结构。

注2 若取 $M = \alpha I$ (I 为 $N \times N$ 单位矩阵算子, $\alpha = \text{const}$)。则由定理, 此时产生的发展方程族(2.5)的Lax表示结构为: $L_{t_m} = [W_m, L] + \alpha L^{m+1}$, $W_m = \sum_{j=0}^m V(G_{j-1})L^{m-j}$ 。这刚好是谱问题(2.1)在非等谱条件 $\lambda_t = \alpha \lambda^{m+1}$ 下产生的非保谱发展方程族的Lax表示结构^[9]。但此时(2.3)的形式: $L_*(JG_{-1}) = \alpha I$ 比(1.4)简单, 较易计算。

注3 在Lax表示(2.7)中, 令 $m=0$, 则(2.7)变为: $L_{t_0} = [W_0, L] + ML$, 这便是Manakov^[10]提出的L-A-B表示, 方程 $u_{t_0} = X_0(u)$ 具有这种表示。马文秀^[11]讨论了这种L-A-B表示的代数结构。本文利用 M 的任意性及(2.7)式可构造相应发展方程 $u_{t_0} = X_0(u)$ 的Manakov算子对^[11], 从而回答了文[11]末的第一个问题。从这个意义上讲, Lax表示(2.7)是可积系L-A-B表示的推广, 自然我们想到Lax表示(2.7)所生成的算子代数结构, 这将在另一文中详细讨论。

注4 对于给定的谱问题(2.1), 定理中条件(i)、(ii)容易验证, 因此要想得到方程族(2.5)的Lax表示, 关键在于寻求算子方程(2.6)的算子解 $V = V(G)$ 。而这一问题在以前的文章中^[12~14]均有一定的解答。

注5 由推论中的(2.8)式, 我们还可以产生定态系统的算子Lie代数结构^[15]。

由注1及注2, 故我们不妨称(2.7)是发展方程族(2.5)的Lax表示的广义结构。下边我们以Levi谱问题^[16]说明方程族(2.5)的生成及其相应的Lax表示之广义结构, 其方法可应用到

其它形如(2.1)的谱问题上.

三、具体实例

Levi谱问题^[16]

$$Ly = \frac{\lambda}{2}y, \quad L = L(u, v) = \begin{pmatrix} -\partial + \frac{u-v}{2} & u \\ -v & \partial + \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}, \quad \partial = \partial/\partial x \quad (3.1)$$

的Lenard算子对 K, J 为^[17]

$$K = \begin{pmatrix} -u\partial - \partial u & -\partial^2 - v\partial + \partial u \\ \partial^2 - \partial v + u\partial & v\partial + \partial v \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

显然 $L_*(\xi) = \begin{pmatrix} (\xi_1 - \xi_2)/2 & \xi_1 \\ -\xi_2 & (\xi_1 - \xi_2)/2 \end{pmatrix}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, 且 L_* 是单态.

由文[13]知, 对于Levi谱问题(3.1)相应的算子方程(2.6)有算子解

$$V = V(G) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(G^{(1)} + G^{(2)})_x + (G^{(2)} - G^{(1)})\partial & -G_x^{(1)} \\ G_x^{(1)} & \frac{1}{2}(G^{(1)} + G^{(2)})_x + (G^{(2)} - G^{(1)})\partial \end{pmatrix}, \quad (\forall G = (G^{(1)}, G^{(2)})^T) \quad (3.3)$$

在(2.3)中, 若取 $M=0$, 则(2.3)变为 $JG_{-1}=0$, 即 $G_{-1} \in \text{Ker}J$. 此时由(2.5)产生的发展方程族即是(3.1)的保谱族(见[17], 节2), 其Lax表示(2.7)与文[13]结果一致.

在(2.3)中, 若取 $M=aI$ ($a \neq 0, a = \text{const}, I$ 为 2×2 单位算子), 则(2.3)无解(相当于(1.4)不易求解). 但若取

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \text{const} \quad (3.4)$$

则(2.3)变为

$$\begin{pmatrix} (G_{-1,x}^{(2)} - G_{-1,x}^{(1)})/2 & G_{-1,x}^{(2)} \\ -G_{-1,x}^{(1)} & (G_{-1,x}^{(2)} - G_{-1,x}^{(1)})/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{-1} = \begin{pmatrix} G_{-1}^{(1)} \\ G_{-1}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

解得 $G_{-1} = \begin{pmatrix} ax + d_1 \\ ax + d_2 \end{pmatrix}$, 其中 d_1, d_2 是任意选取的常数.

故此时产生的发展方程族(2.5)为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_m} = J \mathcal{L}^{m+1} \begin{pmatrix} ax + d_1 \\ ax + d_2 \end{pmatrix} = J (J^{-1}K)^{m+1} \begin{pmatrix} ax + d_1 \\ ax + d_2 \end{pmatrix} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

其中 K, J 由 Levi 谱问题(3.1)的Lenard算子对(3.2)式给出. 按定理, (3.6)具有下述Lax表示的广义结构:

$$L_{t_m} = [W_m, L] + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot 2^m L^{m+1}$$

$$W_m = \sum_{j=0}^m \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{1}{2}(G_{j-1}^{(1)} + G_{j-2}^{(2)})_x + (G_{j-1}^{(2)} - G_{j-1}^{(1)})\partial & -G_{j-1,x}^{(2)} \\ G_{j-1,x}^{(1)} & \frac{1}{2}(G_{j-1}^{(1)} + G_{j-1}^{(2)})_x + (G_{j-1}^{(2)} - G_{j-1}^{(1)})\partial \end{array} \right\} (2L)^{m-j} \quad (3.7)$$

这里, $G_{j-1} = (G_{j-1}^{(1)}, G_{j-1}^{(2)})^T$ 由Levi谱问题(3.1)的Lenard递推叙列 $\{G_j\}; G_{j-1} = J^{-1}KG_{j-2} = (J^{-1}K)^j \begin{pmatrix} ax + d_1 \\ ax + d_2 \end{pmatrix}, j=0, 1, 2, \dots$, 决定. (3.6)与(3.7)是两个全新的结果. 下边考虑 $M = (m_{ij})_{2 \times 2}$ 的一般情况.

设 $A = A(x, t), B = B(x, t)$ 是两个任意的光滑函数 (当然它们也可以是位势 u, v 的函数). 对Levi谱问题(3.1), 当且仅当取 $M = \begin{pmatrix} \frac{A+B}{2} & B \\ A & \frac{A+B}{2} \end{pmatrix}$ 时, (2.3)有解: $G_{-1} = (-\partial^{-1}A$

$+d_1, \partial^{-1}B + d_2)^T$, 其中 ∂^{-1} 表示 $\partial = \partial/\partial x$ 的逆算子. $\forall d_1, d_2 = \text{const}$. 故此时产生的方程族

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_m} = J \mathcal{L}^{m+1} \begin{pmatrix} -\partial^{-1}A + d_1 \\ \partial^{-1}B + d_2 \end{pmatrix} = J (J^{-1}K)^{m+1} \begin{pmatrix} -\partial^{-1}A + d_1 \\ \partial^{-1}B + d_2 \end{pmatrix} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

具有Lax表示的广义结构:

$$L_{t_m} = [W_m, L] + \begin{pmatrix} \frac{A+B}{A} & B \\ A & \frac{A+B}{2} \end{pmatrix} \cdot 2^m L^{m+1} \quad (3.9)$$

其中 W_m 的形式如(3.7)中第二式所示, 只不过 W_m 中的 $G_{j-1} = (G_{j-1}^{(1)}, G_{j-1}^{(2)})^T$ 由 $G_{j-1} = (J^{-1}K)^j \begin{pmatrix} -\partial^{-1}A + d_1 \\ \partial^{-1}B + d_2 \end{pmatrix} (j=0, 1, 2, \dots)$ 给出.

至此, Levi谱问题产生的每一族发展方程及其相应的Lax表示的广义结构均包含在(3.8)与(3.9)两式之中. 对不同的 A, B , 由(3.8)产生的方程族也不一样, 那么发展方程族之间有怎样的关系呢? 尚需进一步讨论.

致谢 作者衷心感谢导师谷超豪院士与胡和生院士的热情指导及支持.

参 考 文 献

[1] Ma Wenxiu, Lax representations and Lax operator algebras of isospectral and nonisospectral hierarchies of evolution equations, *J. Math. Phys.*, **33** (1992), 2464—2480.
 [2] Ma Wenxiu, An approach for constructing nonisospectral hierarchies of evolution equations, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **25** (1992), 719—723.
 [3] Ma Wenxiu, The algebraic structure of zero curvature representations and ap-

- plication to coupled KdV systems, *J. Phys. A., Math. Gen.*, **26** (1993), 2573—2585.
- [4] 乔志军, 孤子族的生成及换位表示的一般结构, *应用数学学报*, **18** (1995), 287—301.
- [5] A. S. Fokas and R. L. Andersen, On the use of isospectral eigenvalue problem for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.*, **23** (1982), 1066—1082.
- [6] Tu Guizhang, An extension of a theorem on gradients of conserved densities of integrable systems, *Northeastern Math. J.*, **6** (1990), 26—34.
- [7] Cao Cewen, Nonlinearization of the Lax equation groups for the AKNS hierarchy, *Sci. China A.*, **33** (1990), 528—536.
- [8] 曹策问, 保谱方程的换位表示, *科学通报*, **34** (1989), 723—725.
- [9] 郭福奎, Lax表示的变形与Hamilton方程族的Lax表示, *数学学报*, **37** (1994), 515—525.
- [10] S. V. Manakov, L-A-B representation of integrable systems, *Usp. Mat. Nauk*, **31** (1976), 245—250.
- [11] 马文秀, 可积系L-A-B表示相关的代数结构, *科学通报*, **37** (1992), 8—12.
- [12] 乔志军, D-AKNS族的换位表示, *应用数学*, **4**(4) (1991), 64—70.
- [13] 乔志军, Levi族的Lax表示, *科学通报*, **35** (1990), 1353—1354.
- [14] 马文秀, 杨族可积发展方程的换位表示, *科学通报*, **35** (1990), 1843—1847.
- [15] Qiao Zhijun, Lie algebraic structure of operator related to the stationary systems, *Phys. Lett. A.*, **206** (1995), 347—358.
- [16] D. Levi, G. Neugebauer and R. Meinel, A new nonlinear Schrodinger equation, its hierarchy and N-soliton solutions, *Phys. Lett. A.*, **102** (1984), 1—8.
- [17] Qiao Zhijun, A Bargmann system and involutive representations of solutions of the Levi hierarchy, *J. Phys. A., Math. Gen.*, **26** (1993), 4407—4417.

Generalized Structure of Lax Representations for Nonlinear Evolution Equation

Qiao Zhijun

(Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang
110063, and Institute of Mathematics, Fudan University,
Shanghai 200433 P. R. China)

Abstract

A new production form for a hierarchy of nonlinear evolution equations (NLEEs) is given in this paper. The form contains productions of isospectral and non-isospectral hierarchy. Under this form a generalized structure of Lax representations for the hierarchy of NLEEs is thus presented. As a concrete example, the Levi-hierarchy of evolution equations are discussed at the end of this paper.

Key words production form, generalized structure, Levi hierarchy