

非饱和土壤水一维水平运动方程的 拟解析解及其验证*

李 航¹ 刘志强¹

(陈正汉推荐, 1996年10月5日收到)

摘 要

本文讨论了土壤水一维不饱水平流方程的解析解问题。文中首先根据土壤水扩散率 D 与土壤含水量 θ 之间的经验关系,对原土壤水一维不饱流方程作变量代换,将方程变为易于求解的形式,然后采用变量分离的方法并结合 Boltzmann 变换法进行求解,从而得出了解析表达式。同时这个解析解在土壤水一维水平不饱流实验中得到了验证,从而证明了其解析表达式的正确性。

关键词 土壤水 不饱流动 解析解

土壤水的不饱流方程的求解一直是一个十分麻烦的事情,其中的主要原因是导水率 $K(\Psi)$ 或土壤水扩散率 $D(\theta)$ 是土水势或土壤水数量的函数。而目前普遍采用的求解方法是数值求解法^[2], Philip 迭代运算法^[2]等。但这些方法的普遍缺陷是求解过程非常繁琐,而且求解的结果只能给出数值的大小,而无法用准确的解析表达式来表达土壤水的运动规律,所以使用起来也很不方便。除此之外,有些方法由于简化太多,因此求解的结果与实际偏差很大,甚至不符。所以本文对土壤水的一维不饱流方程的解析解问题进行了讨论,得出了解析表达式,并在土壤水的不饱流实验中得到了验证。

一、不饱流中土壤水扩散率与土壤水数量之间的关系

众多实验表明^[1,2,3],不饱流中土壤水扩散率 $D(\theta)$ 与土壤水数量 θ 间的关系在较宽的含水量范围内为图1所示的曲线:

显然,这样的曲线适合于用指数函数来表达,因此 $D(\theta)$ 与 θ 间关系的经验表达式常采用如下指数函数^[2,3]:

$$D(\theta) = D_0 \exp[\beta(\theta - \theta')] \quad (1.1)$$

式中 $D(\theta)$ 为土壤水扩散率, θ' 是一特征参数, θ 是土壤体积含水量, β 为一常数, D_0 是 $\theta = \theta'$ 时的 $D(\theta)$ 之值。

* 国家“八五”攻关课题 85—09—01—06—02—02 的研究论文。

1 西南农业大学资源环境学院, 重庆 630716.

二、土壤水一维不饱流方程的变换

土壤水一维不饱水平流方程的扩散型表示为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (2.1)$$

式中 x 为空间坐标, t 是时间, 其余符号含义同前.

下面对(2.1)式作变换.

根据(1.1)式可有:

$$D(\theta) = A \exp[\beta \theta] \quad (2.2)$$

式中 $A = D_0 \exp[-\beta \theta']$

若令:

$$\mu(\theta) = D(\theta)$$

则:

$$\mu(\theta) = A \exp[\beta \theta] \quad (2.3)$$

将此式对时间 t 微分得:

$$\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial t} = A \beta \exp[\beta \theta] \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

即:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\exp[-\beta \theta]}{A \beta} \frac{\partial \mu(\theta)}{\partial t} \quad (2.4)$$

同样将(2.3)式对 x 微分后得:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\exp[-\beta \theta]}{A \beta} \frac{\partial \mu(\theta)}{\partial x} \quad (2.5)$$

将(2.2)、(2.4)和(2.5)式代入(2.1)式得:

$$\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial t} = A \exp[\beta \theta] \frac{\partial^2 \mu(\theta)}{\partial x^2}$$

将(2.5)式代入上式得:

$$\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial t} = \mu(\theta) \frac{\partial^2 \mu(\theta)}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

这就是土壤水一维不饱水平流方程的交换式, 式中 $\mu(\theta) = A \exp[\beta \theta]$.

三、土壤水一维不饱水平流方程的解

在求解基本方程之前, 先作如下假定: (1) 边界 $x=0$ 处的土壤含水量维持一常数 $\theta = \theta_0$;

(2) 土壤中的初始含水量 $\theta = \theta^0$.

于是根据方程(2.6)式, 可得如下定解条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} & (3.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu|_{x=0, t>0} = \mu_0, & \mu_0 = A \exp[\beta \theta_0] & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu|_{t=0, x>0} = \mu^0, & \mu^0 = A \exp[\beta \theta^0] & (3.3) \end{cases}$$

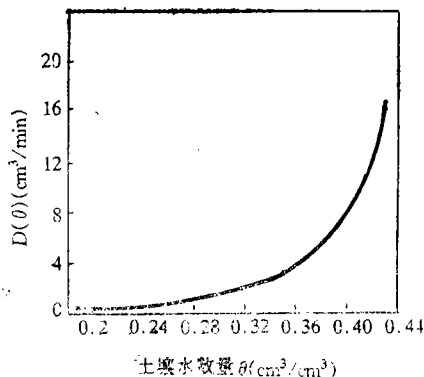


图1 土壤含水量与扩散率间的关系曲线

如果假定 $\mu=\mu(x,t)$ 是可以变量分离的, 即

$$\mu=\mu(x)\cdot\mu(t) \quad (3.4)$$

则(3.1)式可转变成:

$$\frac{1}{\mu^2(t)} \frac{\partial\mu(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x^2}$$

此式左边只与时间有关, 右边只与 x 有关, 两边相等, 表明它们应分别等于一常数 k , 即:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu^2(t)} \frac{\partial\mu(t)}{\partial t} = k \\ \frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x^2} = k \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu^2(t)} \frac{\partial\mu(t)}{\partial t} = k \\ \frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x^2} = k \end{array} \right. \quad (3.6)$$

求解(3.5)式得:

$$\mu(t) = 1/(P - kt) \quad (3.7)$$

式中 P 为一积分常数.

求解(3.6)式得:

$$\mu(x) = \frac{1}{2}kx^2 + Qx + R \quad (3.8)$$

式中 Q, R 为积分常数.

将(3.7)、(3.8)式代入(3.4)式得:

$$\mu = \left(\frac{1}{2}kx^2 + Qx + R \right) / (P - kt) \quad (3.9)$$

应用(3.2)式的定解条件, 可得:

$$\mu_0 = R / (P - kt)$$

由此式可看出, 为得到与边界条件(3.2)式相符的解, R 需表示成时间 t 的函数, 但当 R 作为时间 t 的函数时, $\mu(x,t)$ 就不再是可变量分离的了, 但是方程(3.1)式很难采用积分变换法求解而易于应用变量分离的方法. 所以, 为了得到与边界条件相符的解, 这里先假设 R 可以看成时间 t 的函数. 从后面的讨论可以看出, 作为一个特例, 这样做的结果仍能得到满足所有定解条件的解.

于是将上式代入(3.9)式得:

$$\mu - \mu_0 = \left(\frac{1}{2}kx^2 + Qx \right) / (P - kt) \quad (3.10)$$

应用(3.3)式表示的定解条件, 可得:

$$\mu^0 - \mu_0 = \left(\frac{1}{2}kx^2 + Qx \right) / P$$

由此可看出, P 只能取0或 ∞ , 但当 $P=\infty$ 时, μ^0 必等于 μ_0 , 即 $\theta^0 = \theta_0$, 这时将为稳态流情况, 与所论情况不符, 所以只能取 $P=0$, 于是(3.10)式可表示成:

$$\mu - \mu_0 = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - \frac{Q}{k} \frac{x}{t} \quad (3.11)$$

若将上式表示成 x 的一元二次方程得:

$$x^2 + \frac{2Q}{k}x + 2(\mu - \mu_0)t = 0$$

解出 x , 得:

$$x = -\frac{Q}{k} + \sqrt{\left(\frac{Q}{k}\right)^2 + 2(\mu_0 - \mu)t} \quad (3.12)$$

注意, 这里开平方后只能取正号。

另外, 应用条件(3.2)、(3.3)式对方程(3.1)作Boltzmann变换可得^[2]:

$$x = \lambda(\mu) \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

其中 $\lambda(\mu)$ 是关于 μ 的未知函数。

由于(3.12)式和(3.13)式都看作是定解条件(3.1)、(3.2)和(3.3)式的解, 所以(3.12)和(3.13)式的 x 与 t 的关系应相同, 显然这就必要求(3.12)式中:

$$Q=0 \quad \text{或} \quad Q/k = a\sqrt{t}$$

式中 a 为一常数。

若取 $\frac{Q}{k} = a\sqrt{t}$, 代入(3.12)式后整理得:

$$x = [-a + \sqrt{a^2 + 2(\mu_0 - \mu)}] \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

若将此式恢复成 $\mu = \mu(x, t)$ 形式的表达式得:

$$\mu = \mu_0 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - a \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (3.15)$$

由此看来, $\mu = \mu(x, t)$ 确实无法作变量分离, 那么由前述方法得到的(3.15)式是否满足偏微分方程(3.1)或(2.1)式呢? 下面对此进行检验。

将(3.15)式表示成 $\theta = \theta(x, t)$ 的形式得:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\beta} \ln \left(\exp[\beta\theta_0] - \frac{1}{2A} \frac{x^2}{t} - \frac{a}{A} \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \quad (3.16)$$

同时, 将原微分方程(3.1)也转变成 $\theta = \theta(x, t)$ 的形式得:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \exp[\beta\theta] \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

于是将(3.16)式代入(3.17)式左边得:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\frac{1}{2} \frac{x^2}{t} + \frac{a}{2} \frac{x}{\sqrt{t}}}{\beta t \left(A \exp[\beta\theta_0] - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - a \frac{x}{\sqrt{t}} \right)} \quad (3.18)$$

将(3.16)式代入(3.17)式右边后整理得:

$$A \exp[\beta\theta] \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] = - \frac{A \exp[\beta\theta_0] - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - a \frac{x}{\sqrt{t}}}{\beta t \left(A \exp[\beta\theta_0] - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - a \frac{x}{\sqrt{t}} \right)} \quad (3.19)$$

将(3.18)式减去(3.19)式得:

$$\Delta = \frac{\partial \theta}{\partial t} - A \exp[\beta\theta] \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{A \exp[\beta\theta_0] - \frac{a}{2} \frac{x}{\sqrt{t}}}{\beta t \left(A \exp[\beta\theta_0] - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} - a \frac{x}{\sqrt{t}} \right)} \quad (3.20)$$

由于在土壤水运动中, βt 之值很大, 所以 Δ 之值是很小的, 因此可以认为 Δ 之值等于零。下面举一实例来证实这一点。

据杨菀章测定 $D(\theta)$ 的实验资料^[1] 可得(3.16)式各参数的值是:

$$A = 0.0005775, \quad \beta = 24.42, \quad d = 6.120$$

于是可得 $\theta-x$ 曲线各处 ($x=0 \sim 55\text{cm}$) 的 Δ 值。见表1。

表 1

 $\theta-x$ 曲线各处的 Δ 之值

$x(\text{cm})$	0	5	10	15	20	25	30
Δ	8.1×10^{-8}	8.8×10^{-8}	9.3×10^{-8}	1.0×10^{-7}	1.1×10^{-7}	1.2×10^{-7}	1.3×10^{-7}
$x(\text{cm})$	35	40	45	50	52.5	54	55
Δ	1.5×10^{-7}	1.9×10^{-7}	2.7×10^{-7}	4.9×10^{-7}	9.2×10^{-7}	2.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}

由于在时刻 t 时, x 的定义范围是: $0 \leq x < b$, 其中 b 是润湿前锋的位置。从上表可看出, 在润湿前锋处, Δ 有增大的趋势。尽管如此, 随润湿前锋的位置 b 的增大, Δ 之值则是迅速收敛的。比如, 当该实验的润湿前锋位置达到 5000cm 时, Δ 的最大值 (即前锋处的 Δ 之值) 为: 5.2×10^{-8} ; Δ 的最小值 (即 $x=0$ 处的 Δ 之值) 为: 10^{-8} ; 此时曲线上 $x=4990\text{cm}$ 时的 Δ 之值也仅为 2×10^{-7} 。由此表明, 在一般情况下, (3.20) 式的 Δ 之值是远远小于 1 的。因此, 根据 (3.20) 式, 可有:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \exp[\beta \theta] \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right]$$

即

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \exp[\beta \theta] \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

或

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \quad \mu = A \exp[\beta \theta]$$

表明, (3.15) 或 (3.16) 式确实是原方程的解。

现在来讨论确定 (3.16) 式中常数 a 的方法。

由于任意时刻润湿前锋处有关系式:

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = m (\text{常数})^{(1)}$$

于是将这个式子代入 (3.15) 式可得:

$$a = \frac{A \exp[\beta \theta_0] - A \exp[\beta \theta^0] - \frac{1}{2} m^2}{m} \quad (3.21)$$

由于 m 为常数, 所以 a 必为常数。

于是, 土壤水运动方程的理论解为:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\beta} \ln \left[\exp[\beta \theta_0] - \left(\frac{A \exp[\beta \theta_0] - A \exp[\beta \theta^0] - \frac{1}{2} m^2}{mA} \right) \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2A} \frac{x^2}{t} \right] \quad (3.22)$$

尽管这个结果在理论上有一定的近似性, 但它在实际应用中已经是足够精确的了。因为, 从理论上讲, 在 x 的定义域内, 除了润湿前锋及其邻域之外, (3.20) 式的 Δ 值趋近于 $\frac{1}{\beta t}$, 这个值在一般情况下是远小于 1 的, 虽然润湿前锋附近的 Δ 之值稍大, 但前锋处的实验误差往往更大。从后面的几个实验的验证也表明, 在一般情况下, (3.22) 式完全可作为非饱和土壤水一维水平流方程的精确解。

四、解的理论分析

4.1 方程(3.22)式代表的 $\theta-x$ 的图形是图2所示的曲线。

4.2 $\theta-x$ 曲线中, 曲线各处的斜率为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{\frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{x}{t}}{\beta \left(A \exp[\beta \theta_0] - a \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{t} \right)} \quad (4.1)$$

于是在润湿前锋处有:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=t^{-1/2}-m} = - \frac{a+m}{A\beta \exp[\beta \theta_0]} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (4.2)$$

在 $x=0$ 处有:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{a}{A\beta \exp[\beta \theta_0]} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (4.3)$$

进而可求得通过 $x=0$ 的界面进入土壤内的入渗通量为:

$$j = -D(\theta_0) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{a}{\beta} t^{-\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

式中, j 是通量, 即单位时间通过单位面积的水的数量, $D(\theta_0)$ 是 $x=0$ 处的水扩散率, $D(\theta_0) = A \exp[\beta \theta_0]$.

通过 $x=0$ 的界面进入土壤内部的入渗总量为:

$$\Delta N = S \frac{a}{\beta} \int_0^t t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2aS}{\beta} t^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

式中 ΔN 代表入渗总量, S 是入渗面面积。

4.3 在Philip迭代运算中, 首先将水运动方程(3.1)式作Boltzmann变换, 得到

$$x = \lambda(\theta) \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

式中 $\lambda(\theta)$ 为 θ 的未知函数, 其值是通过Philip法反复迭代而获得。从(3.14)可看出 $\lambda(\theta)$ 的准确表达式为:

$$\lambda(\theta) = -a + \sqrt{a^2 + 2A(\exp[\beta \theta_0] - \exp[\beta \theta])} \quad (4.6)$$

五、解的实验验证

5.1 土壤中含水量分布的理论曲线与实验值的比较

这里采用杨苑璋的实验资料^[1], 该实验的边界处的含水量是 $\theta_0 = 0.425 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, 土壤初始含水量是 $0.05 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, 测定时间是 $t = 480$ 分。根据其测定 $D(\theta)$ 的实验资料得到(3.16)式各参数的值是:

$$A = 0.0005775, \quad \beta = 24.42, \quad a = 6.120$$

于是, $t = 480$ 分时土壤含水量分布的理论方程是:

$$\theta = \frac{1}{24.42} \ln(32160.7 - 1.8037x^2 - 483.703x)$$

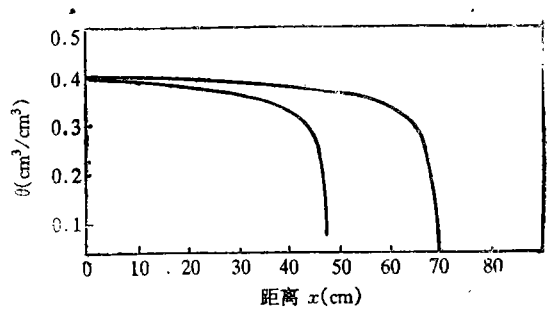


图2 不同时间($t_2 > t_1$) $\theta-x$ 的理论曲线

由该方程绘制的含水量分布的理论曲线与实验值比较见图 3。

从图 3 可看出理论曲线与实验值相当吻合。

5.2 由方程(3.14)式计算得到的 $x(\theta, t)$ 之值与 Philip 迭代运算得到的 $x(\theta, t)$ 之值的比较

这里采用雷志栋等人的实验资料来验证^[2]。该实验的边界处的含水量为 $\theta_0 = 0.46 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ，测定时间是 $t = 540$ 分钟。根据其测定 $D(\theta)$ 的实验资料可得到(3.14)式各参数的值是：

$$A = 0.0008015, \beta = 20.168, a = 2.832$$

于是根据(3.21)式得：

$$x(\theta, 540) = -65.81 + 23.2379 \sqrt{8.021 + 0.001603(10692.3 - \exp[20.168\theta])}$$

应用该方程得到的 x 值与 Philip 迭代运算的 x 值的比较见表 2。

表 2 x 值的解析法与 Philip 迭代运算法的比较表

$\theta(\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3})$	0.440	0.399	0.337	0.317	0.276	0.214	0.173	0.132	0.091	0.071
$x(\text{Philip 法})$	24.14	42.57	48.04	48.60	49.11	49.73	50.05	50.33	50.58	50.75
$x(\text{解析法})$	20.23	38.51	47.38	48.51	49.78	50.47	50.63	50.70	50.73	50.74

表明两种方法的计算结果吻合很好。

5.3 任意时刻土壤含水量分布的实验验证

为了验证方程(3.22)式能否对不同时间土壤含水量分布规律作出成功的预测，笔者采用水平土柱法^[1,2]用同种土样在同一实验条件下测定不同时间土壤含水量分布，结果发现理论曲线与实验值完全吻合。

该实验的供试土样为轻壤土，土壤容重为 $1.47 \text{ g}/\text{cm}^3$ ，实验温度为 293°K ，土壤初始含水量约为 $0.04 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ，边界 $x = 0$ 处的含水量是 $0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ 。

实验首先测定不同 θ 值时的 $D(\theta)$ 之值，测定结果见表 3。

表 3 土壤水扩散率 $D(\theta)$ 的测定 (时间 $t = 300$ 分)

距离 $x(\text{cm})$	38.75	38.5	38.0	37.5	36.5	35	30	20	5
含水量 $\theta(\text{cm}^3/\text{cm}^3)$	0.13	0.19	0.26	0.31	0.34	0.36	0.39	0.42	0.44
扩散率 $D(\theta) (\text{cm}^2/\text{cm}^3)$	0.01616	0.0429	0.1006	0.1722	0.6348	1.515	3.6190	7.5714	1.716

注 $D(\theta)$ 的计算公式： $D(\theta) \approx \frac{1}{2t} \frac{\delta x}{\delta \theta} \sum_{\theta_i} x \Delta \theta$ ，其中 $\frac{\delta x}{\delta \theta}$ 是根据实验值绘制的 $x-\theta$ 关系曲线，应用差分方法而获得的近似值。

根据表(2.1)可确定出(3.16)式各参考的值是：

$$A = 0.0004619, \beta = 22.48, a = 3.9483$$

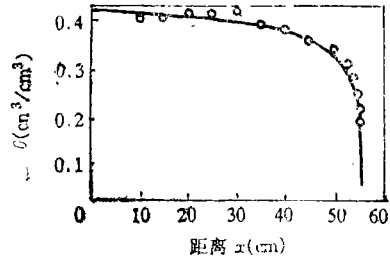
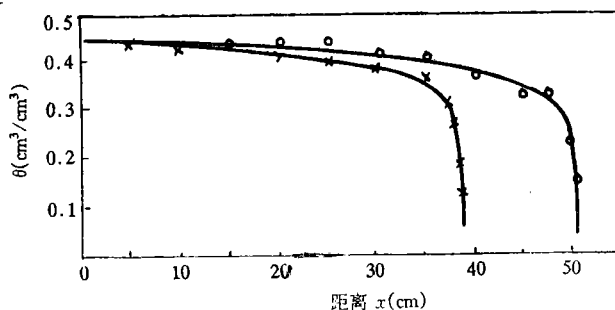


图 3 土壤含水量分布的理论曲线与实验值 (⊙代表实验值)

于是土壤含水量分布的理论方程是:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{22.48} \ln \left(24735.6 - 1082.48 \frac{x^2}{t} - 8548.08 \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$$

由该方程绘制的土壤含水量分布的理论曲线与实验值比较见图4, 从图4可看出, 理论计算与实验结果完全吻合。



×—×—× 时间 $t=300$ 分 ○—○—○ 时间 $t=500$ 分

图4 不同时间土壤含水量分布的理论曲线与实验值 (×, ○实验值)

参 考 文 献

- [1] 姚贤良等, 《土壤物理学》, 农业出版社 (1986), 307—334.
- [2] 雷志栋等, 《土壤水动力学》, 清华大学出版社 (1988), 39, 92—93, 267—320.
- [3] W. R. Gardner and M. S. Mayhugh, Solutions and tests of the diffusion equation for the movement of water in soil, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 22 (1958), 197—201.

Almost Analytic Solutions and Their Tests of the Horizontal Diffusion Equation for the Movement of Water in Unsaturated Soil

Li Hang Liu Zhiqiang

(College of Resources and Environment, South west Agricultural University, Chongqing 630716, P. R. China)

Abstract

This paper discusses the analytic solutions of the diffusion equation for the movement of water in unsaturated soil. Firstly, according to the experience relation between the diffusivity " $D(\theta)$ " and water content in soil " θ ", and through variable substitution, the original diffusion equation is converted into the form easy to solve. Then, the variables separation method together with the Boltzmann transform method is used to find out the solution of the new partial differential equation. So the analytic function of $\theta(x, t)$ is obtained, which is verified by the experiment of water flow through unsaturated soil.

Key words horizontal diffusion equation, unsaturated water flow, analytics