

# 求解超声速无粘绕流的杂交型有限元格式

徐守栋<sup>1</sup> 吴望一<sup>1</sup>

(1995年11月24日收到, 1997年3月3日收到修改稿)

## 摘 要

本文从一维双曲型标量方程出发, 以一个普通二阶有限元格式及由其单边对角化导出的一阶单调型格式为基础, 构造出一种具有单调性的杂交型有限元格式。为了向二维 Euler 方程组情形推广, 所采用的开关函数是基于流场梯度的局部函数, 并专门考虑了相邻单元的影响。二维情形的算例表明新格式可以明显抑制激波附近的振荡。

**关键词** 有限元 杂交格式 激波

## 一、引 言

由于有限元方法是采用非规则网格离散, 可以方便地求解复杂边界问题, 在高速可压缩流动中也获得了广泛应用。但在非规则网格上构造具有高分辨率的有限元格式比在规则网格上构造格式难得多。所以网格自适应技术是有限元方法中用来提高数值解分辨率的常用手段之一。另一方面, 借鉴差分法中成熟的思想 and 技巧在非规则网格上设法构造具有较高分辨率的有限元格式也是提高有限元方法解题能力的有效途径之一。

对一维模型方程的分析是研究多维流动问题的基础。在一维情形, Galerkin 有限元方法等效于中心差分近似, 因此对于对流占优的非定常传输问题 Galerkin 解会产生非物理振荡。在差分法中已发展了许多抑制这种振荡的措施, 如迎风格式、杂交格式和 TVD 格式<sup>[1]</sup>等。有限元法在借鉴差分法的同时还必须考虑如何向多维非规则网格情形推广。文[2]成功地将文[3]提出的针对一维标量方程的 Taylor-Galerkin 有限元格式推广到多维方程组情形, 即 Lax-Wendroff 型 Taylor-Galerkin (LW/TG) 格式, 并已成为高速可压缩流动问题中广泛采用的方法之一。当然这方面的各种尝试大多还停留在一维情形。

差分法中从一阶单调格式发展到二阶无波动格式经历了数十年的努力。文[4]所提出的杂交型差分格式是这期间的过渡性格式。通过将普通的二阶格式与单调的一阶格式组合成混合格式, 既保证了数值解在激波附近的单调性, 也保证了在光滑区域的二阶精度, 显然这种杂交格式会比一阶单调格式的分辨率高。本文的目的是针对多维问题构造单调的杂交型有限元格式, 并力图得到优于现行人工粘性方法的分辨率。

首先, 本文从一维双曲型标量方程出发构造单调的杂交型有限元格式。前面提到的 LW/

<sup>1</sup> 北京大学力学与工程科学系, 北京 100871

TG 格式在不加人工粘性修正时是二阶精度的, 分析表明如果对有限元方程左端的系数矩阵做对角化处理则所得方程可等效成一阶耗散型的单调格式. 构造一个开关函数将二阶非单调格式和一阶单调格式组合起来, 使得在光滑流场区域由二阶格式起主导作用, 而在激波附近由一阶格式占主导. 从另一方面讲, 这种杂交格式也可理解成是一阶和二阶格式的加权平均, 而权函数正是所构造的权函数. 本文利用当地流场梯度和相邻单元信息构造出两种适用于二维非规则网格情形的开关函数. 二维算例表明数值解对激波的分辩率比人工粘性方法有明显改善.

## 二、一维情形的分析

本节考虑一维标量方程的初边值问题

$$u_t + f_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.1)$$

将求解区域  $\Omega$  均匀离散, 网格节点定义为  $x_j = jh$ , 将时间坐标离散成  $t^n = n\Delta t$ , 其中  $j$  和  $n$  是整数,  $h$  和  $\Delta t$  代表空间和时间步长, 即节点  $x_j$  和  $x_{j+1}$  的连线为单元  $e$ . 求解的目的是在给定  $t^n$  时刻解的情况下, 利用特定的格式进行迭代求出下一个时刻  $t^{n+1}$  的解. 首先, 这里采用 Euler 格式对 (2.1) 进行时间离散, 即

$$(u^{n+1} - u^n) / \Delta t = -f_x^n + O(\Delta t) \quad (2.2)$$

将每一时刻的未知函数  $u(x)$  表示成

$$u(x) = \sum_j u_j N_j \quad (2.3)$$

其中  $u_j$  代表未知的节点值,  $\{N_j\}$  是一维线性插值函数. 将 (2.3) 代入 (2.1) 并将所得方程与 (2.3) 中的插值函数  $\{N_j\}$  做内积得到 Galerkin 有限元方程, 写成矩阵形式为

$$B_{il} u_i^{n+1} = B_{il} u_i^n + R_i \quad (i, l = 1, 2) \quad (2.4)$$

其中  $B$  为相应的系数矩阵

$$B_{il} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i N_l dx = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$R_i = \Delta t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{f}_e \quad (2.6)$$

这里  $\bar{f}_e$  代表单元  $e$  中的平均通量.

对有限元方程 (2.4) 两边的系数矩阵做对角化处理<sup>[6]</sup>, 得

$$B_{ij}^L u_j^{n+1} = B_{ij}^L u_j^n + R_i \quad (2.7)$$

其中  $B^L$  是矩阵  $B$  的对角化形式

$$B^L = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

将两相邻单元  $e-1$  和  $e$  的对角化单元方程做合成, 对节点  $j$  可得有限差分方程

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (\bar{f}_e - \bar{f}_{e-1}) \quad (2.9)$$

其中  $\lambda = \Delta t / h$ . (2.6) 中的通量是当做已知的单元常量来处理, 其数值是在每个单元中按中间时间层计算的.

将 $t=t^{n+1/2}$ 时刻的未知量对 $t^n$ 时刻做Taylor展开,

$$u^{n+1/2} = u^n - \frac{\Delta t}{2} f_x^n \quad (2.10)$$

在单元 $e$ 中对(2.10)做积分, 对 $t=t^n$ 时刻的函数 $u$ 和 $f$ 做线性插值近似, 得

$$\int_{\Omega_e} u^{n+1/2} dx = \int_{\Omega_e} N_j dx u_j^n - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} N_{j,x} dx f_j^n \quad (2.11)$$

将 $t=t^{n+1/2}$ 时刻的函数 $u$ 近似成单元常量, 得

$$\bar{u}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (2.12)$$

进而得(2.6)中的平均通量为

$$\bar{f}_e = f(\bar{u}_e^{n+1/2}) \quad (2.13)$$

这种计算平均通量的方法只涉及到当地单元 $e$ 中的积分, 因此可以不经合成而直接得出.

对于线性对流方程, 有 $f=au$ , 利用(2.9)、(2.12)、(2.13)可得如下熟知的格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.14)$$

其中 $\nu=a\Delta t/h$ . 可见对角化的Galerkin有限元方程与有限差分法中的Lax-Wendroff格式是完全等价的.

另一方面, 如果只对(2.4)的左端实施对角化, 则对应于(2.7)、(2.9)和(2.14)分别有

$$B^L u^{n+1} = B u^n + R \quad (2.15)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{6}(u_{j+1}^n + 4u_j^n + u_{j-1}^n) - \lambda(\bar{f}_e^n - \bar{f}_{e-1}^n) \quad (2.16)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{6}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.17)$$

从等价的有限差分方程(2.17)可以看出其右端的第二项是由单边对角化产生的, 该项代表二阶导数 $h^2 u_{xx}/6$ , 所以可以说有限元方程的单边对角化等价于对原方程增加正耗散项, 所得格式是空间一阶精度的.

根据Godunov<sup>[6]</sup>的结论, 形如

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_{j+k}^n, \quad \alpha_k = \text{constant} \quad (2.18)$$

的线性差分格式当且仅当

$$\alpha_k \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (2.19)$$

时成为单调格式. 因此差分格式(2.17)连同与其等价的有限元格式(2.15)当满足

$$\nu \leq \sqrt{2/3} \quad (2.20)$$

时是单调格式. 这个有条件单调的有限元格式(2.15)将在下节用于构造杂交格式.

### 三、一维杂交型有限元格式

人工粘性修正是差分法中早期用于减少数值解在激波附近振荡的较直接的方法之一, 也是有限元方法中较早获得成功的方法<sup>[2]</sup>. 差分法中提高激波捕获质量的另一种途径是设计具有保单调性的格式. 数值解的单调性是指在随时间迭代的过程中解本身不会有新的极值点产

生,也就是说如果初始值没有波动,则数值解将保持为无波动的。

根据Godunov的结论,线性格式如果是保单调的则其精度最高为一阶。但一阶格式耗散太强,对激波的分辨率很低,所以一般不会采用纯一阶格式求解有激波的问题。近几年来,差分法中陆续发展起来一些既保单调又具有二阶以上精度的高分分辨率格式。这些格式中所采用的平均通量是非线性的,所形成的格式也是非线性的。在一维情形构造高分分辨率有限元格式并无太大困难,但由于网格的非规则性使得一般格式很难向多维情形推广。文[7]在权函数中引入非线性修正量,得到了相当于TVD (Total Variation Diminishing)差分格式的高分分辨率有限元格式。文[8]也构造出了相当于TVB (Total Variation Bounded)差分格式的另一高分分辨率 Galerkin 有限元格式。但所有这些格式均未能推广到多维非规则网格情形。事实上,不论差分法还是有限元法,真正的多维特征型格式的构造还有待于多维Riemann问题数学理论的进一步发展。

杂交型差分格式曾是由人工粘性方法到特征型高分分辨率格式发展过程中的过渡性处理方法之一。借助一个人工构造的开关函数将一阶单调格式和二阶普通格式组合起来,这相当于每一时刻都用两种格式的加权平均作为实际采用的格式。权函数是变化的,以使得在保持单调性和精度的前提下尽可能使二阶格式的权重一些。文[9]曾设计了FCT (Flux Corrected Transport)有限元格式,其实质也是高低价格的混合格式,两种格式的结合准则是基于有限差分法中反扩散的概念。由FCT格式求得的数值解比人工粘性方法波动减少,分分辨率有所提高。尽管反扩散修正所带来的计算量和判断过程均很复杂,但这毕竟是将规则网格上的方法移植到非规则网格上的一个成功例子。

由于在非规则网格上直接构造高分分辨率有限元格式的条件还远不具备,而人工粘性方法即使结合网格自适应技术也不能完全满足工程需要,为了提高有限元解对强激波的分辨率,扩大有限元方法的解题能力,本节参考文[4]中有限差分法的思想并在上节所述有限元格式的基础上构造杂交型有限元格式。

一般的杂交型格式可写成:

$$u_j^{n+1} = \theta L_1 u^n + (1-\theta) L_2 u^n \quad (3.1)$$

其中 $\theta$ 是无量纲开关函数, $L_1$ 和 $L_2$ 分别代表一阶和二阶格式的相应算子。显然,当 $\theta=0$ 时,格式为二阶;当 $\theta=1$ 时为一阶。

利用(2.4)和(2.15)构造杂交型有限元格式如下:

$$B^L \delta u^{n+1} = R + \theta(B - B^L)u^n \quad (3.2)$$

其中 $\delta u^{n+1} = u^{n+1} - u^n$ 。相应于(2.16)和(2.17)有

$$\delta u_j^{n+1} = -\lambda(\bar{f}_e - \bar{f}_{e-1}) + \frac{1}{6}[-\theta_{e-1}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \theta_e(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (3.3)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\theta}{6}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.4)$$

(3.4)的改型方程可写成

$$u_t + cu_x = \frac{\theta}{6}h^2 u_{xx} - \frac{c}{6}h^2(1-\nu^2)u_{xxx} \quad (3.5)$$

(3.4)的稳定性条件为

$$\theta \geq 0, \quad \nu \leq 1 \quad (3.6)$$

将(3.4)改写成

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C^+(u_{j+1}^n - u_j^n) - C^-(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.7)$$

其中

$$C^+ = \frac{1}{2} \left( -\nu + \nu^2 + \frac{\theta}{3} \right), \quad C^- = \frac{1}{2} \left( \nu + \nu^2 + \frac{\theta}{3} \right) \quad (3.8)$$

根据文[1]的结论, 形如(3.7)的格式当满足

$$C^+ \geq 0, \quad C^- \leq 0, \quad C^+ + C^- \leq 1 \quad (3.9)$$

时是TVD的, 于是知格式(3.2)的单调性条件是在激波附近须满足

$$3\nu(1-\nu) \leq \theta \leq 3(1-\nu) \quad (3.10)$$

光滑区域和激波区域没有明显界线, 开关函数的设计须使得一阶算子在流场参数变化剧烈的区域占主导, 即  $\theta = O(1)$ ; 而在光滑区域以二阶格式占主导, 即  $\theta = O(h)$ . 组合的结果应使得数值解在激波附近的单调性得以保持, 也同时避免在光滑区域不必要的耗散.

一般来讲, 开关函数应满足如下条件:

- (1) 对激波敏感;
- (2) 数值解在激波附近保持单调性;
- (3) 在光滑区域二阶格式占优;
- (4) 格式具有守恒性;
- (5) 便于向多维非规则网格情形推广.

因此, 针对杂交格式(3.2)定义如下开关函数

$$\theta_e = \min[C_\theta \max(\theta_j, \theta_{j+1}), 1] \quad (3.11)$$

其中

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{1}{A} |u_x(e) - u_x(e-1)| & A = |u_x(e)| + |u_x(e-1)| \\ 0 & \end{cases} \quad (3.12)$$

这里  $u_x(e)$  代表未知量在单元  $e$  内的导数,  $C_\theta$  为调节系数, 一般取值为  $1 \sim 2$ .  $\theta_j$  是节点函数, 而  $\theta_e$  是由两节点处的  $\theta_j$  定义的单元开关函数. 由以上定义可以看出, 当节点  $j$  处于局部极值点时, 其两侧单元中的  $u_x$  符号相反, 致使  $\theta_j = 1$ , 格式(3.2)表现为一阶精度. 因此, 由(3.11)所定义的开关函数对于激波和局部极值点是敏感的, 并能使格式自动地在这些区域降为一阶精度. 很显然, 由于格式(3.2)连同开关函数(3.11)只涉及本单元的局部导数, 不论单元是否规则均可方便地计算, 所以该格式容易向多维非规则网格情形推广.

#### 四、向二维Euler方程组推广

无粘可压缩气体流动的控制方程是Euler方程组, 在二维笛卡儿坐标系  $(x_1, x_2)$  中写成守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{i1} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{i2} \\ u_i (\rho \varepsilon + p) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

里这 $u_1, u_2$ 表示速度分量,  $\rho$ 为气体密度,  $p$ 为压力,  $\varepsilon$ 为总比能,  $\delta_{ij}$ 为Kronecker函数. 连同完全气体状态方程

$$p = (\gamma - 1) \rho (\varepsilon - u_i^2/2) \quad (4.3)$$

使(4.1)成为封闭方程组. 其中 $\gamma$ 为气体的比热比. 在适当的边界条件下上述方程组成为适定的.

将二维求解区域离散成三角形单元. 构造相应于一维格式(3.2)的二维杂交格式求(4.1)的数值解

$$B_{it}^L \delta_i^{n+1} = R_i + H_i \quad (4.4)$$

其中

$$H_i = \theta \left( \sum_k B_{ik} U_k^n - B_{it}^L U_i^n \right), \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (4.5)$$

因为

$$B_{it}^L = \sum_k B_{ik}$$

$$H_i = \theta_e \sum_j B_{ij} \Delta_{ji} U^n \quad (4.6)$$

或

$$H_i = \sum_j \theta_{ij} B_{ij} \Delta_{ji} U^n \quad (4.7)$$

其中

$$\Delta_{ji} U^n = U_j^n - U_i^n$$

通常选用对间断敏感的变量构造开关函数. 一般来讲, 气体密度对膨胀波、激波和接触间断均很敏感, 但当流场中只包含激波时压力是更有效的敏感参数. 定义

$$\theta_e = \min(\theta', 1) \quad (4.8)$$

其中

$$\theta' = C_\theta \frac{\Delta t}{\Delta t_e} \frac{h_e |\nabla p|}{\bar{p}} \quad (4.9)$$

这里 $\Delta t/\Delta t_e$ 等效于对不同单元尺度所进行的修正.  $\bar{p}$ 为单元平均压力.  $C_\theta$ 为调节系数, 其值取为3~5.

为了进一步减少格式的耗散性, 可按比(4.8)所定义的单元开关更加局部化的方式来定义开关函数. 当(4.4)中右端第二项写成(4.7)时, 开关函数 $\theta_{ij}$ 可以看成是基于两节点间相互作用的边开关. 一阶和二阶导数都可以用来构造局部开关函数. 在线性单元中一阶导数是常量, 基于一阶导数的单元开关函数可以在本单元内构造, 而构造基于二阶导数的开关函数则相对较复杂, 相邻单元的信息通常必须考虑在内.

当在一个节点或一条边上构造二阶导数时, 如果试图将所有相邻单元都考虑在内, 则由于网格的非规则性会使计算量和内存增加很多. 本文采用准一维方法构造沿特定方向的二阶

导数，见图1所示。将连接节点*i*和*j*的边向其两侧延长，这两条延线将分别与两个相邻单元*L*和*R*相交，在这两个相邻单元中可分别计算出流场参数沿*ij*方向的一阶导数，然后利用三条线段上的一阶导数分别在平均的意义上构造节点*i*和*j*处的二阶导数，即

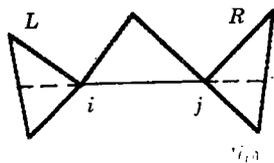


图1 相邻单元和边开关

$$\theta_{ij} = \min[D_0 \max(\theta_i, \theta_j), 1] \tag{4.10}$$

其中

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{1}{A} |\nabla\rho(e) \cdot \mathbf{k} - \nabla\rho(L) \cdot \mathbf{k}|, & A \neq 0 \\ 0, & A = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{1}{B} |\nabla\rho(e) \cdot \mathbf{k} - \nabla\rho(R) \cdot \mathbf{k}|, & B \neq 0 \\ 0, & B = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

$$A = |\nabla\rho(e) \cdot \mathbf{k}| + |\nabla\rho(L) \cdot \mathbf{k}|, \quad B = |\nabla\rho(e) \cdot \mathbf{k}| + |\nabla\rho(R) \cdot \mathbf{k}| \tag{4.13}$$

这里 $\nabla\rho(e)$ 表示单元*e*内的密度梯度， $\mathbf{k}$ 为沿*ij*方向的单位向量。 $D_0$ 为调节系数，其值取为1.5~2.0。

需要指出的是，如果采用(4.11)和(4.12)直接作为节点开关函数，则不能保证格式守恒，从而会导致错误的激波位置和强度。

上述杂交型有限元格式需满足如下Courant型稳定性条件：

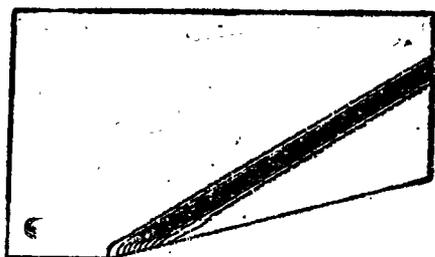
$$\Delta t = \min[\beta h_e / \max(|V| + c)] \tag{4.14}$$

其中*V*代表流体速度，*c*代表声速，*h<sub>e</sub>*为单元的代表尺度， $\beta$ 为安全系数，其值取为0.8。

### 五、算 例

本节选取两个算例以检验上述杂交型有限元格式的效果。第一个算例是模拟二维压缩拐角的超声速绕流，拐角为15°，马赫数为 $M_\infty = 3.0$ 。初始网格为33×17均匀划分，共1024个三角形单元，采用杂交型格式连同开关函数(4.8)迭代求解Euler方程组得到稳态解。

当在均匀网格上求得稳态解后再采用同时包括网格加密和稀疏技术的自适应方法<sup>[10]</sup>对原网格划分和节点分布进行调整，然后重新进行计算以进一步提高数值解的分辩率。计算结果示于图2，为比较起见，采用人工粘性方法<sup>[2]</sup>以及完全相同的网格自适应准则所计算的结



(a) 人工粘性方法

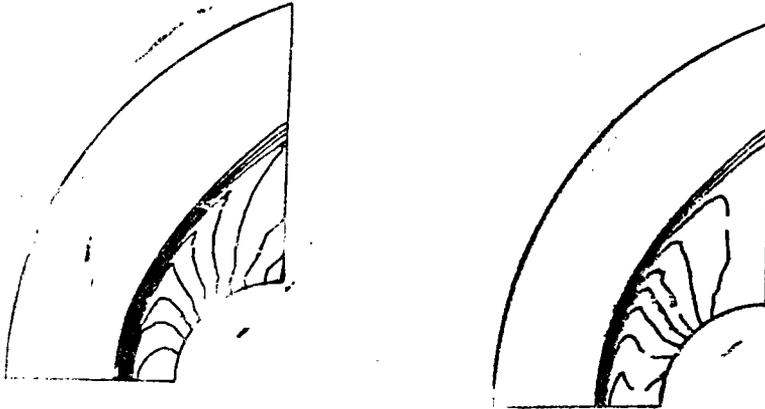


(b) 杂交型格式连同单元开关

图2 二维压缩拐角绕流的等压图

果也附于图中。需要指出的是所用网格自适应技术既包括网格局部加密,也包括局部稀疏,所以调整的结果是使节点分布较多地趋近于激波附近区域,而节点和单元总数增加不多。由两种结果比较可见杂交型格式在激波附近波动较少,激波宽度较窄,这说明杂交型有限元格式对激波的分辩率比人工粘性方法高。

第二个算例是模拟二维圆柱的超声速绕流,马赫数为5.0。初始网格为 $25 \times 21$  C型网格,共960个三角型单元。采用两种不同的开关函数结合网格自适应技术所得计算结果示于图3。其中图3(a)采用由(4.8)定义的单元开关,图3(b)为(4.10)所定义的边开关。显然,采用边开关时波动较少,且激波更清晰。因此可以说采用杂交型有限元格式连同局部边开关函数在保证格式守恒的前提下有效地提高了数值解对于强激波的分辩率。



(a) 采用单元开关

(b) 采用边开关

图3 用杂交型有限元格式计算的二维圆柱绕流的等压图

## 六、结 论

本文针对一维情形构造了杂交型有限元格式并推广应用到了二维Euler方程组情形。研究了两种类型的开关函数,其一是基于本单元内压力梯度的单元开关;其二是按照一维方式针对三角形的每条边利用其两端延线上的两个特殊的相邻单元构造的基于密度二阶导数的边开关。二维算例表明就减少激波附近波动来讲后者效果更好。另一方面,有限元法由于网格的非规则性在构造高分辨率无波动格式方面仍进展不大。本文在人工粘性方法的基础上探讨了杂交型有限元格式,使数值解对激波的分辩率有明显提高,结合网格自适应技术可以成为适合于包含强激波绕流问题的一种实用有效的分析手段。

## 参 考 文 献

- [1] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 49 (1983), 357.
- [2] R. Löhner, An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 51 (1985), 441.
- [3] J. Donea, A Taylor-Galerkin method for convective transport problems, *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.*, 20 (1984), 101.
- [4] A. Harten, Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, *J. Comput. Phys.*, 9 (1972), 568.

- [5] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill (1977).
- [6] S. K. Godunov, A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations, *Math. Sb.*, 47 (1959), 271.
- [7] T. J. R. Hughes, A high precision finite element method for shock-tube calculations, *Finite Elements in Fluids*, 6 (1985), 339.
- [8] B. Cockburn, TVB Range-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws:2. A general framework, *Math. Comput.*, 52 (1989), 411.
- [9] R. Löhner, Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meths. Fluids*, 7 (1987), 1093.
- [10] 徐守栋, 求解超/高超声速无粘绕流的自适应有限元方法, 北京大学博士学位论文 (1992, 5).

## A Hybrid Finite Element Scheme for Inviscid Supersonic Flows

Xu Shoudong Wu Wangyi

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking  
University, Beijing 100871, P. R China)

### Abstract

A hybrid monotonous finite element algorithm is developed in the present paper, based on a second-order-accurate finite element scheme and a first-order-accurate monotonous one derived from the former by a unilateral lumping procedure in one dimensional case. The switch functions for the two dimensional Euler equation system are constructed locally, based on the gradient of the flow field, with special consideration on the information from neighboring elements. Examples show that the new scheme can eliminate oscillations near strong shocks obviously.

**Key words** finite element, hybrid scheme, shocks