应用数学和力学，第18卷 第8期（1997年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

弱拓扑下的非线性随机积分和微分方程组的解*

丁协平[1] 王 凡[2]

（1996年12月22日收到）

摘 要

在本文中，我们首先对具有随机定义域的弱连续随机算子组证明了一个Darbo 型随机不动点定理。利用这一定理，我们对Banach空间中关于弱拓扑的非线性随机 Volterra 积分方程组给出了随机解的存在性准则。作为应用，我们得到了非线性随机微分方程组的 Cauchy 问题弱随机解的存在定理，也得到了这些随机方程组在Banach空间中关于弱拓扑的极值随机解的存在性和随机比较结果。我们的定理改进和推广了 Szep，Mitchell-Smith，Cramer-Lakshmikantham，Lakshmikantham-Leela和丁的相应结果。

关键词 非线性随机Volterra积分 随机Cauchy问题 极值随机解 比较结果 Banach空间中弱拓扑

一、引 言

Banach 空间强拓扑的非线性 Volterra 积分方程解的存在性和比较结果已为 Vaughn[18,19]，Lakshmikantham[13] 和 Lakshimikantham-Leela[14] 所获得。Banach空间中非线性微分方程的Cauchy问题弱解的存在性结果为Szep[16]，Mitchell-Smith[15]，Cramer-Lakshmikantham-Mitchell[3]和Lakshmikantham-Leela[14]所获得。

我们已经知道随机积分和微分方程的理论在许多应用科学领域中有广泛的应用，例如工程、物理、化学、生物学和系统科学等（见［1，6，10，17］）。因而很多数学家致力于此课题的研究。最近，第一作者[7,8,9]得到了 Banach 空间中关于强和弱拓扑的非线性随机Volterra积分方程和非线性随机微分方程的 Cauchy 问题随机解的存在性准则，以及这些随机方程在Banach空间中关于强和弱拓扑的极值随机解的存在定理，这些结果推广了上述文献中的一些已知结果。

在本文中，我们首先对具有随机定义域的弱连续随机算子组证明了一个Darbo型随机不

---

* 国家自然科学基金资助项目

1 四川师范大学数学系，成都 610066

2 南通师范专科学校数学系，南通 226007

动点定理．利用这一定理，我们对Banach空间中关于弱拓扑的非线性随机 Volterra 积分方程组给出了随机解的存在性准则．作为应用，我们得到了非线性随机微分方程组的Cauchy问题弱随机解的存在定理，也得到了这些非线性随机方程组在Banach空间中关于弱拓扑的极值随机解的存在定理和比较结果．我们的结果改进和推广了Szep[16]，Mitchell-Smith[15]，Cramer-Lakshmikantham-Mitchell[3]，Lakshmikantham[13]，Lakshmikantham-Leela[14]，Vaughn[18,19]，De Blasi和Myjak[4]及丁[7,8,9]的相应结果．

二、预 备 知 识

令$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$是完全概率测度空间，$(X_i, \mathscr{B}_i)$ $i=1, \cdots, n$是可测空间，其中每一X是可分Banach空间和每一$\mathscr{B}_i$是X_i的一切Borel子集的σ-代数．$CC(X_i)$表X_i的一切非空有界闭凸子集的族，$CL(X_i)$表X_i的一切非空闭子集的族．令$X=X_1\times\cdots\times X_n$，对每一$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$，定义$\|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|$，则$X$也是可分Banach空间．

定义2.1 称集值映射$E:\Omega\to CL(X)$是可测的（或弱可测的），如果对X的每一闭（或开）子集A，

$$E^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega: E(\omega)\cap A\neq\phi\}\in\mathscr{A}$$

由[2]中定理Ⅲ30知，可测性与弱可测性是等价的．E的图被定义为

$$Gr(E)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X: x\in E(\omega)\}$$

定义2.2 称映射$x_i:\Omega\to X_i$是X_i-值随机变量，如果对每一$B_i\in\mathscr{B}_i$，

$$x_i^{-1}(B_i)=\{\omega\in\Omega: x_i(\omega)\in B_i\}\in\mathscr{A}$$

定义2.3 称映射$x_i:\Omega\to X_i$是X_i-值弱（或 Pettis）随机变量，如果对每一$f\in X_i^*$（X^i的对偶空间），函数$f(x_i(\omega))$是实值随机变量．

从[1, p.16]可知，当X_i是可分Banach空间时，$x_i(\omega)$是X_i-值随机变量的充要条件是$x_i(\omega)$是X_i-值弱随机变量．

引理2.1[1,p.19] 设$\{x_i^m(\omega)\}_{m=1}^{\infty}$是$X_i$-值随机变量序列且几乎处处弱收敛于$x_i(\omega)$，则$x_i(\omega)$是$X_i$-值随机变量．

定义2.4 设$E:\Omega\to CC(X)$是可测映射，称映射$T_i:Gr(E)\to X_i$是具有随机定义域E的弱连续随机算子，如果

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$T_i(\omega,\cdot):E(\omega)\to X_i$是弱连续的；

(ii) 对每一$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$和每一$B_i\in\mathscr{B}_i$，

$$\{\omega\in\Omega: x\in E(\omega),\ T_i(\omega, x)\in B_i\}\in\mathscr{A}$$

设$a_{i,j}:\Omega\to[0, \infty)$，$i, j=1, \cdots, n$是实值随机变量．定义

$$a_{i,j}^1(\omega)=\begin{cases} a_{i,j}(\omega), & i\neq j\\ 1-a_{i,j}(\omega), & i=j;\ i, j=1, \cdots, n\end{cases}$$

$$a_{i,j}^{l+1}(\omega)=\begin{cases} a_{1,1}^l(\omega)a_{i+1,j+1}^l(\omega)+a_{i+1,1}^l(\omega)a_{1,j+1}^l(\omega), & i\neq j\\ a_{1,1}^l(\omega)a_{i+1,j+1}^l(\omega)-a_{i+1,1}^l(\omega)a_{1,j+1}^l(\omega), & i=j\\ l=1, \cdots, n-1;\ i, j=1,\cdots,n-l \end{cases}$$

引理2.2[5,6] 存在正实值随机变量$r_i(\omega)$，$i=1, \cdots, n$使得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)<r_i(\omega), \qquad \forall\omega\in\Omega,\ i=1,\ \cdots,\ n \tag{2.1}$$

的充要条件是

$$a^l_{i,i}(\omega)>0, \qquad \forall\omega\in\Omega,\ l=1,\ \cdots,\ n;\ i=1,\ \cdots,\ n+1-l$$

令$S_i=\{x_i\in X_i:\|x_i\|\leqslant 1\}$是$X_i$的闭单位球。对$X_i$的每一有界子集$H_i$，定义$H_i$在弱拓扑下的弱非紧性测度如下：

$$\beta(H_i)=\inf\{t\geqslant 0:\text{存在弱紧集}C_i\subset X_i,\ \text{使得}H_i\subset C_i+tS_i\}$$

有关弱非紧性测度β的性质，可参考[14, Ch.1]和[15]。

定理2.1 设$T_i:Gr(E)\to X_i$, $i=1,\ \cdots,\ n$是具有随机定义域E的弱连续随机算子。假设

(i) 对每一$\omega\in\Omega$, $E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$，其中每一$E_i(\omega)$是$X_i$的非空有界闭凸子集且$T_i(\omega,\ E(\omega))\subset E_i(\omega)$, $i=1,\ \cdots,\ n$;

(ii) 对每一$\omega\in\Omega$, $B_i\subset E_i(\omega)$, $i=1,\ \cdots,\ n$,

$$\beta(T_i(\omega,\ B))\leqslant\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\omega)\beta(B_j)$$

其中$B=B_1\times\cdots\times B_n$, $T_i(\omega,\ B)=\{T_i(\omega,\ x):x\in B\}$和$a_{i,j}(\omega)$, $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$是非负实值随机变量，使不等式组(2.1)有随机正解$(r_1(\omega),\ \cdots,\ r_n(\omega))$。

则随机算子组T_i, $i=1,\ \cdots,\ n$有一随机不动点，即存在X-值随机变量$(x^*_1(\omega),\cdots,\ x^*_n(\omega))\in E(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$，使得

$$x^*_i(\omega)=T_i(\omega,\ x^*_1(\omega),\ \cdots,\ x^*_n(\omega)), \qquad \forall\omega\in\Omega,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

证 对每一$\omega\in\Omega$，令

$$E^1_i(\omega)=E_i(\omega), \qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

$$E^{m+1}_i(\omega)=\overline{\mathrm{co}}(T_i(\omega,\ E^m_1(\omega),\ \cdots,\ E^m_n(\omega))), \qquad i=1,\cdots,n;\ m=1,\ 2,\cdots$$

由假设(i)易得$E^2_i(\omega)\subset E^1_i(\omega)$, $i=1,\ \cdots,\ n$。由归纳法，我们有

$$E^{m+1}_i(\omega)\subset E^m_i(\omega), \qquad i=1,\ \cdots,\ n;\ m=1,\ 2,\ \cdots$$

令$K_i(\omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}E^m_i(\omega)$, $i=1,\ \cdots,\ n$，则每一$K_i(\omega)$是闭凸集。

因为不等式组(2.1)的随机正解集对乘以正纯量封闭，不失一般性，我们可设

$$\beta(E^1_i(\omega))\leqslant r_i(\omega), \qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{2.2}$$

令$q(\omega)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{r_i^{-1}(\omega)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)\right\}$，则$0\leqslant q(\omega)<1$和

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)\leqslant q(\omega)r_i(\omega), \qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

由β的性质，假设(ii)和(2.2)可得

$$\begin{aligned}\beta(E^2_i(\omega))&=\beta(\overline{\mathrm{co}}(T_i(\omega,\ E^1_1(\omega),\ \cdots,\ E^1_n(\omega))))\\&=\beta(T_i(\omega,\ E^1_1(\omega),\ \cdots,\ E^1_n(\omega)))\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\omega)\beta(E^1_j(\omega))\end{aligned}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)$$

$$\leqslant q(\omega)r_i(\omega),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

由归纳法，我们可得

$$\beta(E_i^m(\omega))\leqslant[q(\omega)]^{m-1}r_i(\omega),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

由于$0\leqslant q(\omega)<1$，故有

$$\beta(E_i^m(\omega))\to 0\ (m\to\infty),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

因此，由Mitchell-Smith[15]的引理1.2知，$K_i(\omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}E_i^m(\omega)$，$i=1,\ \cdots,\ n$是非空紧凸集。

令$K(\omega)=K_1(\omega)\times\cdots\times K_n(\omega)$，则$K(\omega)$也是非空紧凸集。易知

$$T_i(\omega,\ K(\omega))\subset K_i(\omega),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

令$T=(T_1,\ \cdots,\ T_n)$，则$T(\omega,\ \cdot):K(\omega)\to K(\omega)$是弱连续的。由Tychonoff不动点定理和$\omega\in\Omega$的任意性知，$T$有广义不动点。由丁[11]的定理2.1，存在$X$-值随机变量$(x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\in E(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$，使得

$$(x_1^*(\omega),\ \cdots,\ x_n^*(\omega))=T(\omega,\ x_1^*(\omega),\ \cdots,\ x_n^*(\omega)),\qquad\forall\omega\in\Omega$$

从而

$$x_i^*(\omega)=T_i(\omega,\ x_1^*(\omega),\ \cdots,\ x_n^*(\omega)),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

注2.1 定理2.1推广了Mitchell-Smith[15]的定理1和丁[11]的系2.1到非线性弱连续随机算子组。

设G_i是X_i的开子集，$J=[t_0,\ t_0+a]\subset\boldsymbol{R}$（全体实数的集合）。设

$$C[J,\ X_i]=\{x_i:J\to X_i\,|\,x_i\text{连续},\ \|x_i\|_J=\max_{t\in J}\|x_i(t)\|\}$$

则$(C[J,\ X_i],\ \|\cdot\|_J)$是可分Banach空间。设

$$C[\Omega\times J,\ G_i]=\{x_i:\Omega\times J\to G_i\,|\,x_i(\omega,\ \cdot)\text{连续和}x_i(\cdot,\ t)\text{是}X_i\text{-值随机变量}\}$$

$$\begin{aligned}&C^w[\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,\ G_i]\\&=\{K_i:\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n\to G_i\,|\,K_i(\omega,\ \cdot,\ \cdots,\ \cdot)\text{弱连续和}\\&\quad K_i(\cdot,\ t,\ s,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\text{是}X_i\text{-值随机变量}\}\end{aligned}$$

有关抽象函数弱连续、弱可积和弱可微的定义和性质，可参考[14, Ch.1]或[15, Ⅱ]。

引理2.3[7] 设$z_i\in C[\Omega\times J,\ G_i]$，则存在实值随机变量$\eta_i:\Omega\to(0,\ \infty)$使得

$$\{x_i\in X_i:\|x_i-z_i(\omega,\ t_0)\|<\eta_i(\omega)\}\subset G_i$$

引理2.4[7] 设$z_i\in C[\Omega\times J,\ G_i]$，$\eta:\Omega\to(0,\ \infty)$是实值随机变量。则存在实值随机变量$\delta_i:\Omega\to(0,\ \infty)$使得

$$|t-t_0|<\delta_i(\omega)\Rightarrow\|z_i(\omega,\ t)-z_i(\omega,\ t_0)\|<\eta(\omega)/2$$

引理2.5[4] $x_i\in C[\Omega\times J,\ X_i]$，如果映射$\omega\mapsto x_i(\omega,\ \cdot)$是$C[J,\ X_i]$-值随机变量（作为从$\Omega$到$C[J,\ X_i]$的映射）。

引理2.6[11] 设M，$\eta:\Omega\to(0,\ \infty)$和$\gamma:\Omega\to(0,\ a]$是实值随机变量，令

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]\\&=\{x_i\in C[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]:\|x_i(\omega,\ t_1)-x_i(\omega,\ t_2)\|\\&\quad\leqslant M(\omega)|t_1-t_2|,\ \forall t_1,\ t_2\in J_0(\omega)\}\end{aligned}$$

其中$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$。设$z_i\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]$，则由

$$E_i(\omega)=\{x_i\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]:\|x_i(\omega,\ t)-z_i(\omega,\ t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\eta(\omega)/2\}$$

定义的映射$E_i:\Omega\to CC(C[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i])$是可测的。

显然，对每一$\omega\in\Omega$，$E_i(\omega)$是$C[J_0(\omega),\ X_i]$的强闭凸子集，因而也是$C[J_0(\omega),\ X_i]$的弱闭凸子集（见[12，定理2.9.3]）。

三、弱拓扑下解的存在性

本节我们考虑如下的非线性随机Volterra积分方程组：

$$x_i(\omega,\ t)=z_i(\omega,\ t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds,\qquad i=1,\cdots,n\quad(3.1)$$

其中$z_i(\omega,t)\in\mathrm{Lip}_{M_1(\omega)}[\Omega\times J,\ G_i]$，$K_i\in C^w[\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,\ G_i]$，$i=1,\cdots,n$，$J=[t_0,\ t_0+a]$，$G_i$是$X_i$的开子集，$M_1:\Omega\to(0,\ \infty)$是实值随机变量，积分是弱积分。

定理3.1　假设

(i) 存在实值随机变量$M_2:\Omega\to(0,\ \infty)$，使得对每一$\omega\in\Omega$和任意的$(t,s,\ x)\in J\times J\times G$，其中$x=(x_1,\cdots,x_n)\in G=G_1\times\cdots\times G_n$，有

$$\|K_i(\omega,\ t,\ s,\ x)\|\leqslant M_2(\omega),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

(ii) 存在实值随机变量$M_3:\Omega\to(0,\ \infty)$，使得对一切$\phi_i\in X_i^*$，$\omega\in\Omega$，$I\subset J$，有界集$B_i\subset G_i$，$i=1,\ \cdots,\ n$，$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in C[\Omega\times I,\ B]=C[\Omega\times I,\ B_1]\times\cdots\times C[\Omega\times I,\ B_n]$和$t,\ \tau\in J$，有

$$\left|\int_I\phi_i[K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))-K_i(\omega,\tau,s,x(\omega,s))]ds\right|\leqslant M_3(\omega)\,|t-\tau|$$

$$i=1,\ \cdots,\ n$$

(iii) 存在非负实值随机变量$\alpha_{i,j}:\Omega\to(0,\ \infty)$，$i,\ j=1,\ \cdots,\ n$，使得对每一$\omega\in\Omega$和任意的有界集$B_i\subset G_i$，$i=1,\ \cdots,\ n$，有

$$\beta(K_i(\omega,\ J,\ J,\ B))\leqslant\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(\omega)\beta(B_j)$$

其中$B=B_1\times\cdots\times B_n$。

则存在实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,\ a]$使得非线性随机Volterra积分方程组(3.1)有一随机解

$$\begin{aligned}(x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*)&\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]\\&=\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_1]\times\cdots\times\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_n]\end{aligned}$$

其中$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$和$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$。

证　设$\eta_i(\omega)$如引理2.3中所定义。令$\eta(\omega)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\eta_i(\omega)\}$，则$\eta(\omega)$是正实值随机变量，使得

$$\{x_i\in X_i:\|x_i-z_i(\omega,\ t_0)\|<\eta(\omega)\}\subset G_i,\quad i=1,\ \cdots,\ n$$

设$\delta_i(\omega)$如引理2.4中所定义和令$\delta(\omega)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_i(\omega)\}$，则$\delta(\omega)$是正实值随机变量，使得

$$|t-t_0|<\delta(\omega)\Rightarrow\|z_i(\omega,t)-z_i(\omega,t_0)\|<\eta(\omega)/2,\qquad i=1,\cdots,n$$

令$\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\ \eta(\omega)/2M_2(\omega),\ b/\alpha(\omega)\}$，其中$b\in(0,\ 1)$和

$$\alpha(\omega)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(\omega)\right\}$$

则$\gamma:\Omega\to(0, a]$是实值随机变量．

对$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$，引理2.6中定义的映射$E_i:\Omega\to CC(C[\Omega\times J_0(\omega), G_i])$是可测的且对每一$\omega\in\Omega$，$E_i(\omega)$是$C[J_0(\omega), G_i]$的非空有界闭凸子集．令$E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$．定义映射$T_i:Gr(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega), G_i]$，$i=1, \cdots, n$如下

$$T_i(\omega, x_1(\omega, t), \cdots, x_n(\omega, t))$$
$$=z_i(\omega, t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega, t, s, x_1(\omega, s), \cdots, x_n(\omega, s))ds \tag{3.2}$$

其中积分是弱积分．由$K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))$的假定知积分有意义，对$x_i\in C[\Omega\times J_0(\omega), G_i]$，$i=1, \cdots, n$和$t\in J_0(\omega)$，由于$X_i$-值随机变量的有限和序列的极限还是$X_i$-值随机变量，因而$T_i(\cdot, x_1(\cdot, t), \cdots, x_n(\cdot, t))$也是$X_i$-值随机变量．对每一$\omega\in\Omega$，$x\in E(\omega)$和$t\in J_0(\omega)$，由Hahn-Banach定理，存在$\phi_i\in X_i^*$，使得$\|\phi_i\|=1$和$|\phi_i[T_i(\omega, x(\omega, t))-z_i(\omega, t)]|=\|T_i(\omega, x(\omega, t))-z_i(\omega, t)\|$．由假设(i)知，对一切$\omega\in\Omega$，$i=1, \cdots, n$，有

$$\begin{aligned}&\|T_i(\omega, x(\omega, t))-z_i(\omega, t)\|\\&=|\phi_i[T_i(\omega, x(\omega, t))-z_i(\omega, t)]|\\&\leqslant\int_{t_0}^{t}|\phi_i[K_i(\omega, t, s, x(\omega, s))]|ds\\&\leqslant\int_{t_0}^{t}M_2(\omega)ds\leqslant M_2(\omega)\gamma(\omega)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

对每一$\omega\in\Omega$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in E(\omega)$和$t$，$\tau\in J_0(\omega)$，由Hahn-Banach定理，存在$\psi_i\in X_i^*$，使得$\|\psi_i\|=1$和

$$|\psi_i[T_i(\omega,x(\omega,t))-T_i(\omega,x(\omega,\tau))]|=\|T_i(\omega,x(\omega,t))-T_i(\omega,x(\omega,\tau))\|$$

因而由假设(i)，(ii)和$z_i\in \mathrm{Lip}_{M_1(\omega)}[\Omega\times J, G_i]$有

$$\begin{aligned}&\|T_i(\omega, x(\omega, t))-T_i(\omega, x(\omega, \tau))\|\\&=|\psi_i[T_i(\omega, x(\omega, t))-T_i(\omega, x(\omega, \tau))]|\\&\leqslant|\psi_i[z_i(\omega, t)-z_i(\omega, \tau)]|+\left|\int_{\tau}^{t}\psi_i[K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))]ds\right|\\&\quad+\left|\int_{t_0}^{\tau}\psi_i[K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))-K_i(\omega,\tau,s,x(\omega,s))]ds\right|\\&\leqslant\|z_i(\omega,t)-z_i(\omega,\tau)\|+\left|\int_{\tau}^{t}M_2(\omega)ds\right|+M_3(\omega)|t-\tau|\\&\leqslant(M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega))|t-\tau|=M(\omega)|t-\tau|,\quad i=1,\cdots, n\end{aligned} \tag{3.4}$$

于是对每一$i=1, \cdots, n$，$T_i:Gr(E)\to C[\omega\times J_0(\omega), G_i]$和对每一$\omega\in\Omega$，$T_i(\omega, E(\omega))\subset E_i(\omega)$．现证对每一$i=1, \cdots, n$和$\omega\in\Omega$，$T_i(\omega, \cdot):E(\omega)\to C[\Omega\times J_0(\omega), G]$是弱连续的．设$x=(x_1, \cdots, x_n)\in E(\omega)$和任一固定的$\omega\in\Omega$，令$\mathscr{N}(T_i(\omega, x(\omega, t)), \phi_i, \varepsilon)$是$T_i(\omega, x(\omega, t))$在空间$C[J_0(\omega), X]$中的弱邻域，其中$\phi_i\in C[J_0(\omega), X]^*$($C[J_0(\omega), X]$的对偶空间)．由于(3.4)说明$T_i(\omega, E(\omega))$是$C[J_0(\omega), X]$的等度连续子集，因而由Mitchell-Smith[16]的引理1.9，只需假定$\phi_i=\sum_{m=1}^{N}\phi_i^m$，其中每一$\phi_i^m$是点泛函（见[15, p.394]）．假定$\phi_i$具有这种形式，由于$\phi_i^m$是点泛函，因而存在$\psi_i^m\in X_i^*$和点$t_m\in J_0(\omega)$，使得对每一$x\in C[\Omega\times$

$J_0(\omega)$, $G]$, $\phi_i^m[x(\omega,\ t)]=\psi_i^m[x(\omega,\ t_m)]$. 由Mitchell-Smith[15]的引理 1.10，对每一 ψ_i^m 和 t_m，存在有限多个点泛函 $\Lambda_i^{m,k}\in C[J_0(\omega),\ X]^*$，$k=1,\ \cdots,\ N_i^m$ 和 $\lambda_i^m>0$，使得当 $y\in \mathscr{N}(x,\ \Lambda_i^{m,k},\ \lambda_i^m,\ N_i^m)$时，对一切$s\in J_0(\omega)$，有

$$|\psi_i^m[K_i(\omega,\ t_m,\ s,\ y(\omega,\ s))-K_i(\omega,\ t_m,\ s,\ x(\omega,\ s))]|<\varepsilon/N\gamma(\omega)$$

因此对 $y\in E(\omega)\cap\left[\bigcap_{m=1}^{N}\mathscr{N}(x,\ \Lambda_i^{m,k},\ \lambda_i^m,\ N_i^m)\right]$，我们有

$$\begin{aligned}
&|\phi_i[T_i(\omega,\ x(\omega,\ t))-T_i(\omega,\ y(\omega,\ t))]|\\
&=\left|\sum_{m=1}^{N}\phi_i^m[T_i(\omega,\ x(\omega,\ t))-T_i(\omega,\ y(\omega,\ t))]\right|\\
&=\left|\sum_{m=1}^{N}\phi_i^m\left(\int_{t_0}^{t}[K_i(\omega,\ t,\ s,\ x(\omega,\ s))-K_i(\omega,t,s,y(\omega,s))]ds\right)\right|\\
&=\left|\sum_{m=1}^{N}\psi_i^m\left(\int_{t_0}^{t_m}[K_i(\omega,t_m,s,x(\omega,s))-K_i(\omega,t_m,s,y(\omega,s))]ds\right)\right|\\
&\leqslant\sum_{m=1}^{N}\int_{t_0}^{t_m}|\psi_i^m[K_i(\omega,t_m,s,x(\omega,s))-K_i(\omega,t_m,s,y(\omega,s))]|ds\\
&\leqslant\sum_{m=1}^{N}\frac{\varepsilon}{N\gamma(\omega)}|t_m-t_0|\leqslant\varepsilon
\end{aligned}$$

因而对 $y\in E(\omega)\cap\left[\bigcap_{m=1}^{N}\mathscr{N}(x,\ \Lambda_i^{m,k},\ \lambda_i^m,\ N_i^m)\right]$，$T_i(\omega,\ y(\omega,\ t))\in\mathscr{N}(T_i(\omega,\ x(\omega,\ t)),$ $\phi_i,\ \varepsilon)$，于是对每一$i=1,\ \cdots,\ n$，$T_i:Gr(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]$ 是弱连续随机算子.

对每一$\omega\in\Omega$，$B_i\subset E_i(\omega)$，$i=1,\ \cdots,\ n$，$B=B_1\times\cdots\times B_n$，由假设(iii)，有

$$\begin{aligned}
&\beta(T_i(\omega,\ B(\omega,\ t)))\\
&=\beta\left(\left\{z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x\in B\right\}\right)\\
&=\beta\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x\in B\right\}\right)\\
&\leqslant\beta(|t-t_0|\overline{\text{co}}(K_i(\omega,J_0(\omega),\ J_0(\omega),\ B(J_0(\omega)))))\\
&\leqslant\gamma(\omega)\beta(K_i(\omega,\ J_0(\omega),\ J_0(\omega),\ B(J_0(\omega))))\\
&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(\omega)\beta(B_j(J_0(\omega)))\\
&=\sum_{j=1}^{n}\gamma(\omega)a_{i,j}(\omega)\beta(B_j(J_0(\omega))),\qquad i=1,\ \cdots,\ n
\end{aligned}$$

由(3.3)和(3.4) 知，对每一 $\omega\in\Omega$，$T_i(\omega,\ B(\omega,\ t))$ 在 $J_0(\omega)$ 上一致有界和等度连续. 由Mitchell-Smith[15]的定理2，有

$$\beta(T_i(\omega,\ B))=\sup_{t\in J_0(\omega)}\beta(T_i(\omega,B(\omega,t)))$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\gamma(\omega)\alpha_{i,j}(\omega)\beta(B_j),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

记 $a_{i,j}(\omega)=\gamma(\omega)\alpha_{i,j}(\omega),\qquad i,\ j=1,\ \cdots,\ n$

由 $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(\omega)=\sum_{j=1}^{n}\gamma(\omega)\alpha_{i,j}(\omega)\leqslant\gamma(\omega)\alpha(\omega)\leqslant b<1,\qquad i=1,\ \cdots,\ n$

知，存在正实值随机变量 $r_i(\omega)\equiv1$，$i=1,\ \cdots,\ n$ 是随机不等式组 (2.1) 的随机解．由定理2.1，存在$(x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$，使得对一切$\omega\in\Omega$，$i=1,\ \cdots,\ n$,

$$x_i^*(\omega,\ t)=T_i(\omega,\ x_1^*(\omega,\ t),\ \cdots,\ x_n^*(\omega,\ t))$$

即$(x_1^*(\omega,\ t),\ \cdots,\ x_n^*(\omega,\ t))$是非线性随机Volterra积分方程组(3.1)的随机解．

定理3.2 设定理3.1的假设(ii)被满足和对每一$i=1,\ \cdots,\ n$，X_i 是自反的，$K_i\in C^w[\Omega\times J\times J\times\bar{G},\ \bar{G}_i]$，其中$\bar{G}_i$是$G_i$的闭包和$\bar{G}=\bar{G}_1\times\cdots\times\bar{G}_n$．则定理3.1的结论成立．

证 由于对每一$i=1,\ \cdots,\ n$，$\bar{G}_i$是有界闭集，因而$\bar{G}_i$是弱紧集．于是$\bar{G}$ 是 $X=X_1\times\cdots\times X_n$中弱紧集．由$K_i$的弱连续性推得对每一$\omega\in\Omega$，$K_i(\omega,\ J\times J\times\bar{G})$在 X_i 中也是弱紧的．令$M_2(\omega)=\sup\{\|K_i(\omega,\ t,\ s,\ x)\|:(t,\ s,\ x)\in J\times J\times\bar{G},\ i=1,\ \cdots,\ n\}$，则$M_2:\Omega\to(0,\ \infty)$是实值随机变量．设$E(\omega)$如定理3.1中所定义．对每一$\omega\in\Omega$，$B_i\subset G_i$，$i=1,\ \cdots,\ n$，我们有$K_i(\omega,\ J_0(\omega),\ J_0(\omega),\ B(J_0(\omega)))\subset K_i(\omega,\ J,\ J,\ \bar{G})$和$B(J_0(\omega))=B_1(J_0(\omega))\times\cdots\times B_n(J_0(\omega))\subset\bar{G}$．因而推得$\beta(K_i(\omega,\ J_0(\omega),\ J_0(\omega),\ B(J_0(\omega))))=0$和$\beta(B_i)=0$，$i=1,\ \cdots,\ n$．由定理3.1即得结论成立．

注3.1 定理3.1和3.2改进和推广了丁[7]的定理3.1，丁[9]的定理3.2和3.3，Vaughn[18] 的定理 3.1，Lakshmikantham[13]的定理2.1到Banach空间中关于弱拓扑的非线性随机Volterra积分方程组．

作为定理3.1和3.2的应用，我们易得非线性随机微分方程组的Cauchy问题的弱随机解的存在定理．

以下我们考虑随机微分方程组的随机Cauchy问题：

$$\left.\begin{aligned}&dx_i(\omega,\ t)/dt=f_i(\omega,\ t,\ x_1(\omega,\ t),\cdots,\ x_n(\omega,\ t))\\&x_i(\omega,\ t_0)=z_i(\omega),\qquad\forall\,\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,\ n\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

弱随机解的存在性．其中每一 $z_i:\Omega\to G_i$ 是 X_i-值随机变量，$f_i\in C^w[\Omega\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,\ G_i]$．导数是弱导数．

称函数组$x_i:\Omega\times J\to G_i$，$i=1,\cdots,\ n$是随机Cauchy 问题 (3.5) 的弱随机解，如果对每一$i=1,\cdots,\ n$,

(i) $x_i\in C^w[\Omega\times J,\ G_i]$,

(ii) $x_i(\omega,\ t_0)=z_i(\omega)$，$\forall\,\omega\in\Omega$,

(iii) $dx_i(\omega,\ t)/dt=f_i(\omega,\ t,\ x_1(\omega,\ t),\cdots,\ x_n(\omega,t))$，$\forall\,(\omega,t)\in\Omega\times J$．

定理3.3 假设

(i) 存在实值随机变量$M:\Omega\to(0,\ \infty)$，使得对每一$\omega\in\Omega$和任意的 $(t,\ x)\in J\times G$，有

$$\|f_i(\omega,\ t,\ x_1,\cdots,\ x_n)\|\leqslant M(\omega),\qquad i=1,\cdots,\ n$$

(ii) 存在非负实值随机变量 $\alpha_{i,j}(\omega)$，$i,\ j=1,\cdots,\ n$，使得对每一 $\omega\in\Omega$ 和任一有界集 $B_i\subset G_i$，$i=1,\cdots,\ n$，$B=B_1\times\cdots\times B_n$，有

$$\beta(f_i(\omega,\ J,\ B))\leqslant\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}(\omega)\beta(B_j),\qquad i=1,\cdots,\ n$$

则存在正实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,\ a]$使得随机Cauchy问题(3.5)在$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$上有弱随机解$(x_1^*(\omega,\ t),\cdots,\ x_n^*(\omega,\ t))\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$。

证 求随机 Cauchy 问题(3.5) 的解等价于求如下的非线性随机 Volterra 积分方程组：

$$x_i(\omega,t)=z_i(\omega)+\int_{t_0}^{t} f_i(\omega,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds,\qquad i=1,\cdots,n \tag{3.6}$$

令$z_i(\omega,t)=z_i(\omega)$和$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)=f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_n)$，$\forall t\in J$，$i=1,\cdots,n$。容易验证，对于$M_1(\omega)=M_3(\omega)=0$和$M_2(\omega)=M(\omega)$，$\forall\,\omega\in\Omega$的定理3.1中全部条件均被满足。因此，随机Volterra 积分方程组 (3.6) 有随机解 $(x_1^*(\omega,\ t),\ \cdots,\ x_n^*(\omega,\ t))\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$。由Mitchell-Smith[15]的引理3.1知，$(x_1^*(\omega,t),\ \cdots,x_n^*(\omega,t))$是随机Cauchy问题(3,5)在$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$上的弱随机解。

定理3.4 设对每一$i=1,\cdots,\ n$，$f_i\in C^w[\Omega\times J\times\bar{G}_1\times\cdots\times\bar{G}_n,\ \bar{G}_i]$，$G_i$是$X_i$有界子集且$X_i$是自反的。则存在实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,\ a]$，使得随机Cauchy问题 (3.5) 有弱随机解$(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$，其中$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$和$M(\omega)=\sup\{\|f_i(\omega,\ s,\ x)\|:(s,\ x)\in J\times\bar{G},\ i=1,\cdots,\ n\}$。

证 在定理3.2中，对每一$i=1,\cdots,\ n$，$t\in J$，令$z_i(\omega,t)=z_i(\omega)$，$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)=f_i(\omega,s,x_1,\cdots,\ x_n)$。由定理3.2知，随机Volterra积分方程组 (3.6) 有随机解 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$，其中$M(\omega)=\sup\{\|f_i(\omega,s,x)\|:(s,x)\in J\times\bar{G},\ i=1,\cdots,n\}$。于是$(x_1^*,\cdots,x_n^*)$也是随机Cauchy问题(3.5)的弱随机解。

注3.2 定理3.3和3.4推广了丁[9]的定理3.4和3.5，Mitchell-Smith[15]的定理3，De Blasi-Myjak[4]的定理4.2和[3,14,15,16]中相应结果到Banach弱拓扑下随机微分方程组的随机Cauchy问题。

四、极值随机弱解的存在性

在本节中，我们讨论在Banach空间的弱拓扑下，随机积分和微分方程组的极值随机弱解的存在性。

设$H_i\subset X_i$，$i=1,\cdots,\ n$是真锥且H_i的内部H_i^0非空。对u，$v\in X_i$，我们说$u\leqslant v$，如果$v-u\in H_i$和$u<v$，如果$v-u\in H_i^0$。令H_i^*和$H_{0,i}^*$表示如下的集合：

$$H_i^*=\{f\in L(X_i,\ \mathbf{R}):x\in H_i\Rightarrow f(x)\geqslant 0\}$$

$$H_{0,i}^*=\{f\in L(X_i,\ \mathbf{R}):x\in H_i^0\Rightarrow f(x)>0\}$$

其中$L(X_i,\ \mathbf{R})$是从X_i到$\mathbf{R}$的全体连续线性泛函的集合。

我们首先证明下述随机积分不等式。

定理4.1 设$K_i\in C^w[\Omega\times J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n,\ X_i]$，$z_i$，$u_i$，$v_i\in C^w[\Omega\times J,\ X_i]$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。假设对每一$(\omega,\ t,\ s)\in\Omega\times J\times J$，$K_i(\omega,\ t,\ s,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$单调非减，即若$x_j\leqslant y_j$，$j=1,\cdots,\ n$，则有

$$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)\leqslant K_i(\omega,t,s,y_1,\cdots,y_n),\qquad i=1,\cdots,n$$

假若对$t>t_0$和$\omega\in\Omega$，下列不等式组：

$$u_i(\omega,t)\leqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,u_1(\omega,s),\cdots,u_n(\omega,s))ds,\qquad i=1,\cdots,n \tag{4.1}$$

$$v_i(\omega,t)\geqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds,\qquad i=1,\cdots,n \tag{4.2}$$

其中之一组是严格的，且

$$u_i(\omega,t_0)<v_i(\omega,t_0),\qquad \forall\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$$

则我们有

$$u_i(\omega,t)<v_i(\omega,t),\qquad \forall\omega\in\Omega,\ t>t_0,\ i=1,\cdots,n$$

证 假设结论不成立，则存在$\omega\in\Omega$和$i\in\{1,\cdots,n\}$，使得

$$F(\omega)=\{t\geqslant t_0:u_i(\omega,t)\not< v_i(\omega,t)\}\neq\phi$$

令$t(\omega)=\inf F(\omega)$，则$t(\omega)>t_0$且对任一$t\in[t_0,t(\omega))$，$v_i(\omega,t)-u_i(\omega,t)\in H_i^0$和$v_i(\omega,t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega))\in\partial H_i$。因此由Lakshmikantham-Leela[14]引理4.3.2，存在$f\in H_i^*$，使得$f(v_i(\omega,t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega)))=0$和对任一$u\in H_i^0$，$f(u)>0$。

如果随机不等式组(4.2)是严格的，则由$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$的单调性有

$$\begin{aligned}&f(u_i(\omega,t(\omega)))\\&\leqslant f(z_i(\omega,t(\omega))+\int_{t_0}^{t(\omega)}K_i(\omega,t(\omega),s,u_1(\omega,s),\cdots,u_n(\omega,s))ds)\\&\leqslant f(z_i(\omega,t(\omega))+\int_{t_0}^{t(\omega)}K_i(\omega,t(\omega),s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds)\\&<f(v_i(\omega,t(\omega)))\end{aligned}$$

这与$f(v_i(\omega,t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega)))=0$矛盾。于是结论成立。

如果随机不等式组(4.1)是严格的，利用相同的证法可证结论成立。

定理4.2 假设定理3.1的条件均被满足，且对每一$i=1,\cdots,n$和$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$单调非减。则存在实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,a]$，使得非线性随机Volterra积分方程组(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)]$上有极大和极小随机解，即存在$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),G]=\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_1]\times\cdots\times\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G_n]$，其中$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$和$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$，使得对(3.1)的任一随机解$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$，

$$\rho_i(\omega,t)\leqslant x_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

证 设$\eta(\omega)$，$\delta(\omega)$和$\alpha(\omega)$如在定理3.1中所定义。令$\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\ \eta(\omega)/4M_2(\omega),\ b/\alpha(\omega)\}$，其中$b\in(0,1)$，则$\gamma:\Omega\to(0,\ a]$是实值随机变量。令$E_i(\omega)$如在引理2.6中所定义，其中$M(\omega)=M_1(\omega)+M_2(\omega)+M_3(\omega)$。令$E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$。定义映射$T_i:Gr(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]$，$i=1,\cdots,n$为

$$\begin{aligned}&T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))\\&=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds\end{aligned}$$

其中积分是弱积分。对每一$i=1,\cdots,n$，选取X_i-值随机变量$y_i:\Omega\to H_i^0$，使$\|y_i(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$，$\forall\omega\in\Omega$。令$y_i^m(\omega)=y_i(\omega)/m$，$m=1,2,\cdots$。定义映射$T_i^m:Gr(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]$，$i=1,\cdots,n$为

$$T_i^m(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))=T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))+y_i^m(\omega),\qquad m=1,2,\cdots$$

则对每一$\omega\in\Omega$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in E(\omega)$和$t\in J_0(\omega)$，由Hahn-Banach定理，存在$\phi_i\in X_i^*$，使得$\|\phi_i\|=1$，$|\phi_i[T_i^m(\omega,x(\omega,t))-z_i(\omega,t)]|=\|T_i^m(\omega,x(\omega,t))-z_i(\omega,t)\|$。因而对每一$i=1,\cdots,n$和$\omega\in\Omega$，有

$$\begin{aligned}\|T_i^m(\omega,x(\omega,t))-z_i(\omega,t)\|&=|\phi_i[T_i^m(\omega,x(\omega,t))-z_i(\omega,t)]|\\&\leqslant\int_{t_0}^t|\phi_i[K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))]|ds+|\phi_i[y_i^m(\omega)]|\\&\leqslant\|y_i^m(\omega)\|+M_2(\omega)(t-t_0)\\&\leqslant\eta(\omega)/4m+M_2(\omega)\gamma(\omega)\leqslant\eta(\omega)/2\end{aligned}\tag{4.3}$$

对每一$\omega\in\Omega$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in E(\omega)$，$i=1,\ \cdots,\ n$和$t,\ \tau\in J_0(\omega)$，由(3.4)式有

$$\begin{aligned}&\|T_i^m(\omega,x(\omega,t))-T_i^m(\omega,x(\omega,\tau))\|\\&=\|T_i(\omega,x(\omega,t))-T_i(\omega,x(\omega,\tau))\|\\&\leqslant M(\omega)|t-\tau|\end{aligned}\tag{4.4}$$

于是对每一$\omega\in\Omega$和$m=1,2,\cdots,T_i^m:E(\omega)\to E_i(\omega)$，利用定理3.1证明中相同的论证方法，我们可证对$m=1,2,\cdots$，$T_i^m$，$i=1,\cdots,n$在$J_0(\omega)$上有不动点$(x_1^m,\cdots,x_n^m)\in \mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),G]$。

对每一$\omega\in\Omega$，由β的性质有

$$\begin{aligned}&\beta(\{x_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^\infty)=\beta(\{T_i(\omega,x_1^m(\omega,t),\cdots,x_n^m(\omega,t))+y_i^m(\omega)\}_{m=1}^\infty)\\&=\beta\left(\left\{\int_{t_0}^t K_i(\omega,t,s,x_1^m(\omega,s),\cdots,x_n^m(\omega,s))ds\right\}_{m=1}^\infty\right)\\&\leqslant\beta(|t-t_0|\overline{\mathrm{co}}(K_i(\omega,J_0(\omega),J_0(\omega),\{x_1^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty,\cdots,\{x_n^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)))\\&\leqslant\gamma(\omega)\beta(K_i(\omega,J_0(\omega),J_0(\omega),\{x_1^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty,\cdots,\{x_n^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty))\\&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}(\omega)\beta(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty),\qquad i=1,\cdots,n\end{aligned}$$

由(4.3)和(4.4)知，对每一固定的$\omega\in\Omega$，$i=1,\cdots,n$，$\{x_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^\infty$是一致有界和等度连续的。因而由Mitchell-Smith[15]定理2，对每一$\omega\in\Omega$，$i=1,\cdots,n$，有

$$\begin{aligned}\beta(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)&=\sup_{t\in J_0(\omega)}\beta(\{x_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^\infty)\\&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}(\omega)\beta(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)\end{aligned}$$

因为 $\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}(\omega)\leqslant\gamma(\omega)\alpha(\omega)\leqslant b<1,\qquad\forall\,\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$

从而若对某个$\omega\in\Omega$和$k\in\{1,\cdots,n\}$，有$\beta(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\beta(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)>0$，则我们有

$$\begin{aligned}\beta(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\alpha_{k,j}(\omega)\beta(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)\\&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\alpha_{k,j}(\omega)\beta(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^\infty)\end{aligned}$$

$$\leqslant b\beta(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$
$$<\beta(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$

矛盾. 于是必有 $\beta(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})=0$, $\forall\omega\in\Omega$, $i=1,\cdots,n$. 从而对每一 $\omega\in\Omega$, $\{x_i^m(\omega,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$是弱紧的. 由 Lakshmikantham-Leela[14] 定理 1.1.6 和 $\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$是弱闭凸集知, 对每一固定的$i=1,\cdots,n$, 存在$\{x_i^m(\omega,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$的子序列$\{x_i^{m_k}(\omega,\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$和$\lambda_i\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G_i]$, 使得$\{x_i^{m_k}(\omega,\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$一致弱收敛于$\lambda_i(\omega,\cdot)$. 注意到对每一$i=1,\cdots,n$,

$$x_i^{m_k}(\omega,t)=T_i^{m_k}(\omega,x_1^{m_k}(\omega,t),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,t))$$
$$=T_i(\omega,x_1^{m_k}(\omega,t),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,t))+y_i(\omega)/m_k$$

由T_i的弱连续性, 有

$$\lambda_i(\omega,t)=T_i(\omega,\lambda_1(\omega,t),\cdots,\lambda_n(\omega,t)),\qquad i=1,\cdots,n$$

即$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),G]$是随机Volterra积分方程组(3.1)的随机解.

现设$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega),G]$是方程组(3.1)的任一随机解, 即对每一$\omega\in\Omega$, $i=1,\cdots,n$,

$$x_i(\omega,t)=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds$$

因为对每一$\omega\in\Omega$, $i=1,\cdots,n$,

$$x_i^{m_k}(\omega,t)=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds+y_i^{m_k}(\omega)$$
$$>z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds$$
$$x_i(\omega,t_0)=z_i(\omega,t_0)<z_i(\omega,t_0)+y_i^{m_k}(\omega)=x_i^{m_k}(\omega,t_0)$$

由定理4.1推得

$$x_i(\omega,t)<x_i^{m_k}(\omega,t)$$

因而对每一$\omega\in\Omega$, $c_i\in H_i^*$, 有

$$c_i[\lambda_i(\omega,t)-x_i(\omega,t)]$$
$$=c_i[\lambda_i(\omega,t)-x_i^{m_k}(\omega,t)]+c_i[x_i^{m_k}(\omega,t)-x_i(\omega,t)]$$
$$\geqslant c_i[\lambda_i(\omega,t)-x_i^{m_k}(\omega,t)]\to0\quad(k\to\infty),\qquad i=1,\cdots,n$$

由Lakshmikantham-Leela[14]引理4.3.2, 有

$$x_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

这就证明$(\lambda_1(\omega,t),\cdots,\lambda_n(\omega,t))$是随机Volterra 积分方程组 (3.1) 在 $J_0(\omega)$ 上的极大随机解.

如果定义$\hat{T}_i^m:Gr(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega), G_i]$, $i=1,\cdots,n$为

$$\hat{T}_i^m(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))$$
$$=T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))-y_i^m(\omega),\qquad m=1,2,\cdots$$

类似上述证明, 可证得随机Volterra积分方程组(3.1)的极小随机解的存在性.

定理4.3 假设定理3.3的条件(i)和(ii)被满足, 且对每一$(\omega,s)\in\Omega\times J$, $i=1,\cdots,n$, $f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$单调非减. 则存在实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,a]$, 使得随机Cauchy问题(3.5)在$\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$中有极大和极小弱随机解, 其中$J_0(\omega)=[t_0,$

$t_0+\gamma(\omega)]$.

证 我们考虑与随机Cauchy问题(3.5)等价的随机Volterra积分方程组 (3.6). 对每一$i=1,\cdots,n$和对任意$t\in J$, 在定理4.2中令$z_i(\omega,t)=z_i(\omega)$和$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)=f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_n)$. 由定理4.2推得随机Volterra积分方程组(3.6)有极大和极小随机解$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$. 显然, 它们也是随机Cauchy 问题 (3.5) 的极大和极小弱随机解.

注4.1 在定理3.2和3.5的假设条件下, 我们也能得到随机Volterra积分方程组(3.1)和随机 Cauchy 问题(3.5)的极值弱随机解的存在定理. 这里不再赘述.

注4.2 定理4.2和4.3推广了丁[8]定理5, 丁[9]定理4.2 和 4.3, Vaughn[18] 定理4.2 和 Lakshmikantham-Leela[14]定理 5.5.3 到 Banach 空间弱拓扑下随机积分方程组和随机微分方程组的随机 Cauchy 问题.

五、弱拓扑下的比较结果

在本节中, 我们将证明随机Volterra积分方程组(3.1)和随机Cauchy问题(3.5) 的比较结果.

定理5.1 设定理4.2的条件均被满足, $(\lambda_1(\omega,t),\cdots,\lambda_n(\omega,t))$和$(\rho_1(\omega,t),\cdots,\rho_n(\omega,t))$分别是随机Volterra积分方程组(3.1)的极大和极小弱随机解. 设$(v_1(\omega,t),\cdots,v_n(\omega,t))\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$, 则

(i) 如果对每一$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$, $i=1,\cdots,n$,

$$v_i(\omega,t)\leqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds$$

则对任意$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$, $i=1,\cdots,n$, 有$v_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t)$;

(ii) 如果对每一$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$, $i=1,\cdots,n$,

$$v_i(\omega,t)\geqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds$$

则对任意$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$, $i=1,\cdots,n$, 有$v_i(\omega,t)\geqslant\rho_i(\omega,t)$.

证 我们只需证明结论(i), 因为结论(ii)的证明类似. 沿用定理4.2的证明中的记号和证法, 对每一$\omega\in\Omega$, $i=1,\cdots,n$, 有

$$x_i^{m_k}(\omega,t)>z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds$$

和

$$v_i(\omega,t_0)\leqslant z_i(\omega,t_0)<x_i^{m_k}(\omega,t_0)$$

由定理4.1推得, 对任意$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$和$i=1,\cdots,n$, $v_i(\omega,t)<x_i^{m_k}(\omega,t)$.
利用定理4.2的证明中类似的证法, 可证

$$v_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

定理5.2 假设定理4.3的所有条件被满足, 并且$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $(\rho_1,\cdots\rho_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$分别是随机Cauchy问题(3.5)的极大和极小弱随机解. 设

$$(v_1,\cdots,v_n)\in\mathrm{Lip}_{M(\omega)}[\Omega\times J_0(\omega), G]$$

则

(i) 如果对每一$\omega\in\Omega$, $t\in J_0(\omega)$, $i=1,\cdots,n$,

$$dv_i(\omega,t)/dt \leqslant f_i(\omega,t,v_1(\omega,t),\cdots,v_n(\omega,t)) \tag{5.1}$$

和$v_i(\omega,t_0) \leqslant z_i(\omega)$，其中导数是弱导数，则

$$v_i(\omega,t) \leqslant \lambda_i(\omega,t), \quad \forall \omega \in \Omega,\ t \in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

(ii) 如果对每一$\omega \in \Omega$，$t \in J_0(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，

$$dv_i(\omega,t)/dt \geqslant f_i(\omega,t,v_1(\omega,t),\cdots,v_n(\omega,t)) \tag{5.2}$$

和$v_i(\omega,t_0) \geqslant z_i(\omega)$，其中导数是弱导数，则

$$v_i(\omega,t) \geqslant \rho_i(\omega,t), \quad \forall \omega \in \Omega,\ t \in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

证　我们只需证明结论 (i)，因为结论 (ii) 的证明类似。由弱导数的定义和 Lakshmikantham-Leela[14]引理4.3.2，易证随机微分不等式组 (5.1) 等价于如下随机积分不等式组：

$$v_i(\omega,t) \leqslant v_i(\omega,t_0) + \int_{t_0}^{t} f_i(\omega,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds, \quad i=1,\cdots,n$$

其中积分是弱积分。由于$v_i(\omega,t_0) \leqslant z_i(\omega)$，$\forall \omega \in \Omega$，$i=1,\cdots,n$，因而有

$$v_i(\omega,t) \leqslant z_i(\omega) + \int_{t_0}^{t} f_i(\omega,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds, \quad i=1,\cdots,n$$

在定理5.1中，对一切$(\omega,t) \in \Omega \times J$，$i=1,\cdots,n$，取

$$z_i(\omega,t) = z_i(\omega) \text{和} K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n) = f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_n)$$

由此推得

$$v_i(\omega,t) \leqslant \lambda_i(\omega,t), \quad \forall \omega \in \Omega,\ t \in J_0(\omega),\ i=1,\cdots,n$$

注5.1　定理5.1和5.2推广了丁[8]定理7，丁[9]定理 5.1 和 5.2，Vaughn[18] 定理 4.3，Lakshmikantham[13] 定理 4.1 和 Lakshmikantham-Leela[14] 定理5.5.4 到 Banach 空间中关于弱拓扑的非线性随机Volterra积分方程组和随机微分方程组的随机Cauchy问题。

参 考 文 献

[1] A. T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, Acad. Press, New York (1972).

[2] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag (1977), 580.

[3] E. J. Cramer, V. Lakshmikantham and A. R. Mitchell, On the existence of weak solutions of differential equations in nonreflexive Banach spaces, *Nonlinear Anal.*, (2) (1978), 169—177.

[4] F. S. De Blasi and J. Myjak, Random differential equations on closed subsets of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 90 (1982), 273—285.

[5] 丁协平，随机集值映射的不动点定理及其应用，应用数学和力学，5(4) (1984)，561—576.

[6] X. P. Ding, Existence, uniqueness and approximation of solutions for a system of nonlinear ramdom operator equations, *Nonlinear Anal.*, 8(6) (1984), 563—576.

[7] 丁协平，随机积分和微分方程解的存在性准则，应用数学和力学，6(3) (1985)，265—270.

[8] 丁协平，随机积分方程和微分方程解的存在性和比较结果，应用数学和力学，7(7) (1986)，597—604.

[9] 丁协平，随机积分和微分方程在弱拓扑下解的存在性和比较结果，应用数学和力学，8(12) (1987)，1039—1050.

[10] X. P. Ding, Solutions for a system of random operator equations and some applications, *Scientia Sinica*, **30**(8) (1987), 785—795.

[11] X. P. Ding, A general random fixed point theorem of weakly continuous random operator with applications, *J. Engineering Math.*, 5(2) (1988), 1—7.

[12] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1957).

[13] V. Lakshmikantham, Existence and comparison results for Volterra integral equations in Banach spaces, *Volterra Integral Equations*, Springer-Verlag, **737** (1979), 120—126.

[14] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York (1981).

[15] A. R. Mitchell and C. Smith, An existence theorem for weak solutions of differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 387—403.

[16] A. Szep, Existence theorem for weak solutions of ordinary differential equations in reflexive Banach spaces, *Studia Sci. Math. Hungrica*, **6** (1971), 197—203.

[17] C. J. Tsokos and W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications to Life Science and Engineering*, Acad. Press, New York (1974).

[18] R. L. Vaughn, Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Appl. Anal.*, 7 (1978), 337—348.

[19] R. L. Vaughn, Criteria for the existence and comparison of solutions to nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, In *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 463—468.

Solutions for a System of Nonlinear Random Integral and Differential Equations under Weak Topology

Ding Xieping

(*Department of Mathematics, Sichuan Normal University Chengdu, Sichuan* 610066, *P. R. China*)

Wang Fan

(*Department of Mathematics, Nantong Teacher's College, Nantong, Jiangsu* 226007, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, a Darbao type random fixed point theorem for a system of weak continuous random operators with random domain is first proved. Then, by using the theorem, some existence criteria of random solutions for a systems of nonlinear random Volterra integral equations relative to the weak topology in Banach spaces are given. As applications, some existence theorems of weak random solutions for the random Cauchy problem of a system of nonlinear random differential equations are obtained, as well as the existence of extremal random solutions and random comparison results for these systems of random equations relative to weak topology in Banach spaces. The corresponding results of Szep, Mitchell-Smith, Cramer-Lakshmikantham, Lakshmikantham-Leela and Ding are improved and generalized by these theorems.

Key words system of nonlinear random Volterra integral equations, random Cauchy problem, extremal random solution, comparison result, weak topology in Banach space