应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多体系统动力学微分/代数方程组的一类新的数值分析方法*

王艺兵[1] 赵维加[1] 潘振宽[1]

（程耿东推荐，1996年7月18日收到）

摘　要

本文讨论了多体系统动力学微分/代数混合方程组的数值离散问题．首先把参数t并入广义坐标讨论，简化了方程组及其隐含条件的结构，并将其化为指标1的方程组．然后利用方程组的特殊结构，引入一种局部离散技巧并构造了相应的算法．算法结构紧凑，易于编程，具有较高的计算效率和良好的数值性态，且其形式适合于各种数值积分方法的的实施．文末给出了具体算例．

关键词　多体系统　动力学　微分/代数方程　数值解

一、引　言

受约束多体系统动力学方程可表达为如下微分/代数方程组[1]

$$\left.\begin{aligned} &M(q,t)\ddot{q}+\phi_q^T(q,t)\lambda=F(q,\dot{q},t) &(1.1\text{a})\\ &\phi(q,t)=0 &(1.1\text{b})\end{aligned}\right\}$$

其中　t是时间，$q\in R^n$是系统广义坐标列阵，$M(q,t)$：$R^n\times R\to R^{n\times n}$是系统广义质量矩阵，$\lambda\in R^m$是Lagrange乘子列阵，$\phi(q,t)$：$R^n\times R\to R^m(m<n)$是系统运动学约束函数；$\phi_q(q,t)$是$\phi$关于$q$的Jacobi矩阵；$F(q,\dot{q},t)$：$R^n\times R^n\times R\to R^n$是广义力列阵．方程组（1.1）称为多体系统动力学第二类数学模型[10]或Euler-Lagrange方程组[9]．近年来国内外对（1.1）的数值积分方法的研究见[13]．

本文讨论了(1.1)的数值计算问题．主要内容为：把时间t并入广义坐标q讨论；把(1.1)化为指标1的一阶模型；引入局部等价方程组概念对其局部数值离散；利用方程组的特殊结构设计紧凑、高效率的算法；给出具体算例验证算法的有效性和实施方法．

二、化二阶微分/代数方程组为一阶微分/代数方程组

类似于文献[2]，本文方程组(1.1a)，(1.1b)满足：

---

* 国家自然科学基金与山东省自然科学基金资助项目．

1 青岛大学自动化系，青岛 266071．

（1）ϕ，M，F足够光滑；

（2）M为对称正定矩阵；

（3）ϕ_q为行满秩矩阵。

为简化方程组的结构，基于(1.1a)，(1.1b)，定义

$$q_1=\begin{bmatrix} q \\ t \end{bmatrix} \quad F_1=\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_1=\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则(1.1a)，(1.1b)化为

$$\left.\begin{aligned} &M_1(q_1)\ddot{q}_1+\phi_{q1}^T(q_1)\lambda_1=F_1(q_1,\dot{q}_1) \qquad (2.1a)\\ &\phi(q_1)=0 \qquad (2.1b)\end{aligned}\right\}$$

显然M_1正定，$\phi_{q1}=[\phi_q,\phi_t]$为行满秩矩阵，即满足方程组（1.1a)，(1.1b）的假设条件，其中，$\phi_q=\partial\phi/\partial q$，$\phi_t=\partial\phi/\partial t$．$\lambda_1$为新的Lagrange乘子，为书写简便，以下讨论中将(2.1a、b)写为

$$\left.\begin{aligned} &M(q)\ddot{q}+\phi_q^T(q)\lambda=F(q,\dot{q}) \qquad (2.2a)\\ &\phi(q)=0 \qquad (2.2b)\end{aligned}\right\}$$

这样处理使问题的分析和程序设计都大大简化．对(2.2b)两端求导得

$$\phi_q\dot{q}=0 \tag{2.2c}$$

$$\phi_q\ddot{q}=-\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q}) \tag{2.2d}$$

以下将(2.2a)，(2.2b)化为一阶微分代数方程组．由(2.2a)，(2.2d)得

$$\begin{bmatrix} M & \phi_q^T \\ \phi_q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F \\ -\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q}) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

由于M正定，ϕ_q行满秩，知(2.3)的系数矩阵非奇异，从而(2.3)有唯一一组解

$$\ddot{q}=\varphi(q,\dot{q}) \tag{2.4}$$

其中

$$\varphi(q,\dot{q})=[I,0]\begin{bmatrix} M & \phi_q^T \\ \phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F \\ -\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q}) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

引入新的变量$x=[q^T,\dot{q}^T]^T$，则(2.4)式化为

$$\dot{x}=g(x) \tag{2.6}$$

其中

$$g(x)=\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \varphi(q,\dot{q}) \end{bmatrix}$$

(2.2b)，(2.1c)化为

$$f(x)=0 \tag{2.7}$$

其中

$$f(x)=\begin{bmatrix} \phi(q) \\ \phi_q(q)\dot{q} \end{bmatrix}$$

(2.6)，(2.7)即为与（2.2a～d）等价的指标1的一阶微分代数方程组．其中包含了位移、速度和加速度约束方程．

三、局部等价方程组及其数值离散方法

考虑方程组(2.6)，(2.7)，设$x=x(t)$是它们的一组解，将其代入(2.7)微分得：

$$Df(x)\dot{x}=Df(x)g(x)=0 \tag{3.1}$$

(3.1)是方程组(2.6)，(2.7)的隐含条件，称为(2.6)与(2.7)的相容条件．联立(2.6)，(2.7)，(3.1)得超定方程组

$$\dot{x}=g(x) \tag{3.2}$$

$$f(x)=0 \tag{3.2}$$

$$Df(x)g(x)=0 \tag{3.2}$$

给定初值条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{3.3}$$

则得到一阶微分/代数方程组的初值问题．当x_0满足(3.2b)和(3.2c)时，称为相容初值．

命题1 $f(x)$，$g(x)$同(2.6)，(2.7)，设$p=n-m$，A是$2n\text{x}2p$阶矩阵，若使

$$\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x_0) \end{bmatrix}$$

非奇异，则存在t_0的邻域δ_{t_0}，在其上(3.2a～c)与方程组

$$A^T(\dot{x}-g(x))=0 \tag{3.4a}$$

$$f(x)=0 \tag{3.4b}$$

$$Df(x)g(x)=0 \tag{3.4c}$$

在初始条件(3.3)下是同解的．

证明 只要由(3.4a)～(3.4c)推出(3.2a)即可．设$x=x(t)$是(3.4a～c)满足(3.3)的任一解，由$Df(x)$连续，知存在t_0的邻域δ_{t_0}，在其上

$$\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x) \end{bmatrix}$$

非奇异．对(3.4c)微分得

$$Df(x)\dot{x}=0 \tag{3.5}$$

从而由(3.4a)，(3.4c)和(3.5)得

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A^Tg(x) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A^Tg(x) \\ Df(x)g(x) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A^T \\ Df(x) \end{bmatrix}g(x)=g(x)$$

证毕．

注1 对一般情况，如果不联立(3.4c)，则(3.4a～b)与(3.2a～b)不等价．例如，考虑方程

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}=x+t \\ &\dot{t}=1 \\ &x+t=1 \end{aligned}\right\}$$

由于$Df(x)g(x)=x+t+1=2\neq 0$，故为矛盾方程组．但若取$A^T=[0,1]$，则(3.4a～b)为

$$\dot{t}=1$$

$$x+t=1$$

对相容初值它的解存在.

命题2 设$f(x)$，$g(x)$如(2.6)，(2.7)所定义，则 (3.4a)，(3.4b) 的解满足相容条件(3.4c).

证明 由(2.6)，(2.7)式知

$$Df(x)g(x)=\begin{bmatrix}\phi_q & 0\\ \phi_{qq}\dot{q} & \phi_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \varphi(q,\dot{q})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_q\dot{q}\\ \phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q})+\phi_q\varphi(q,\dot{q})\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

由$\varphi(q,\dot{q})$的定义知等式右端下半部分恒为0，上半部分是(3.4b)的一部分. 证毕.

由于(3.4a～b) 不再是超定问题，可以把它们离散成普通方程组求解. 为讨论方便，以改进的 Euler方法为例. 注意到A的局部性，一般来讲它的选择与差分格式的每一步初值有关. (3.4a)，(3.4b)的差分格式为:

$x_0=[q_0^T,\dot{q}_0^T]^T$，对$k=0,1,2\cdots,x_{k+1}$由下述方程组得到

$$\begin{cases}A_k^T(x-x_k-h/2(g(x)+g(x_k)))=0 & (3.7a)\\ f(x)=0 & (3.7b)\end{cases}$$

这是$2n$个变量的非线性方程组. 对(3.7a)直接迭代求解，而对(3.7b)采用Newton法进行迭代，可得到如下算法:

$$A_k^T\delta_s=-A_k^T(x_s'-x_k-h/2(g(x_s')+g(x_k))) \tag{3.8a}$$

$$Df(x_s')\delta_s=-f(x_s') \tag{3.8b}$$

$$x_{s+1}'=x_s'+\delta_s \quad s=0,1,2,\cdots,l;x_0'=x_k;\ x_l'=x_{k+1};k=0,1,2\cdots$$

四、Ak的选取方法和计算步骤

由于ϕ_q是满秩的，$\phi_q u=0$的解空间是$p=n-m$维的. 可设 $V=[V_1,V_2,\cdots\cdots,V_p]$ 是其中一组基，用V^T左乘(2.2a)得

$$V^TM\ddot{q}=V^TF \tag{4.1}$$

与(2.2d)联立得:

$$\begin{bmatrix}V^TM\\ \phi_q\end{bmatrix}\ddot{q}=\begin{bmatrix}V^TF\\ -\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q})\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

命题3 (4.2)的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}V^TM\\ \phi_q\end{bmatrix} \tag{4.3}$$

是非奇异矩阵.

证明 设$u\in R^n$使得

$$\begin{bmatrix}V^TM\\ \phi_q\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}V^TMu\\ \phi_q u\end{bmatrix}=0$$

知u在ϕ_q的零空间中，即存在$y\in R^q$使$u=Vy$. 从而使$V^TMVy=0$即有

$$(Vy)^T MVy=0$$

而M对称正定，故有$u=Vy=0$。得证。

注2 由于M对称正定，M^TV与$\phi_q{}^T$在尺度$\|.\|_{M^{-1}}$下正交[11]。从而选择$B=V^TM$是使矩阵

$$\begin{bmatrix} B \\ \phi_q \end{bmatrix}$$

条件数较小的一种选择。

推论1 (2.3)和(4.2)是等价微分方程组。

推论1说明(2.4)式中的$\varphi(q,\dot{q})$也可由(4.2)式得到。下面考虑(3.7a～b)中A_k的选择。由于命题3及

$$Df(x)=\begin{bmatrix} \phi_q & 0 \\ \phi_{qq}\dot{q} & \phi_q \end{bmatrix}$$

知可取

$$A_k=\begin{bmatrix} V^TM & 0 \\ \phi_q & V^TM \end{bmatrix}_{x=x_k} \tag{4.4}$$

其中 $x_k=[q_k^T,\dot{q}_k^T]^T$，$(A)_{x=x_k}$表示矩阵$A$在$x_k$点的值，将(4.4)代入(3.8a～b)并记$\delta_s=[\delta_{1s}^T,\delta_{2s}^T)^T$，则(3.8a～b)化为

$$\begin{bmatrix} V^TM & 0 \\ 0 & V^TM \\ \phi_q & 0 \\ \phi_{qq}\dot{q} & \phi_q \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} \delta_{1s} \\ \delta_{2s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -V^TM(x_s-x_k-h/2(g(x_s)+g(x_k)))_1 \\ -V^TM(x_s-x_k-h/2(g(x_s)+g(x_k)))_2 \\ (-f(x_s))_1 \\ (-f(x_s))_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

其中 $(x)_1$表示x的前n个分量，$(x)_2$表示x的后n个分量。注意到$(x)_1=q$，$(x)_2=\dot{q}$，$(g(x))_1=\dot{q}$，$(g(x))_2=\varphi(q,\dot{q})$，$(f(x))_1=\phi(q)$，$(f(x))_2=\phi_q\dot{q}$，从而将(4.5)的1，3式和2，4式分别组合得到：

$$\begin{bmatrix} V^TM \\ \phi_q \end{bmatrix}_s \delta_{1s}=\begin{bmatrix} -V^TM(q_s'-q_k-h/2(\dot{q}_s'-\dot{q}_k)) \\ -\phi(q_s') \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\begin{bmatrix} V^TM \\ \phi_q \end{bmatrix}_s \delta_{2s}=\begin{bmatrix} -V^TM(\dot{q}_s'-\dot{q}_k-h/2(\ddot{q}_s'-\ddot{q}_k)) \\ -(\phi_{qq}\dot{q}'\cdot\delta_{1s}-(\phi_q\dot{q}')_s \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$q_{s+1}'=q_s'+\delta_{1s},\quad \dot{q}_{s+1}'=\dot{q}_s'+\delta_{2s}\qquad (s=0,1,2,\cdots),\quad q_0'=q_k,\quad \dot{q}_0'=\dot{q}_k.$$

整个计算步骤描述如下：

第k步：已知$q_k\dot{q}_k$取$q_0'=q_k$，$\dot{q}_0'=\dot{q}_k$。对$s=0,1,2\cdots$

(1) 计算$M,F,\phi,\phi_q,\phi_q\dot{q},\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q})$，在$q_s,\dot{q}_s$的值，

(2) 求$\phi_q x=0$的一组基V，

(3) 由(4.2)式求得上$\ddot{q}_s'$，

(4) 由(4.6)，(4.7)求出q_{s+1}'，$\dot{q}_{s+1}'$，

(5) 若$\|q_{s+1}'-q_s'\|<\varepsilon$且$\|\dot{q}_{s+1}'-\dot{q}_s'\|<\varepsilon$，则取$q_{k+1}=q_{s+1}'$，$\dot{q}_{k+1}=\dot{q}_{s+1}'$ 并转入第 $k+1$ 步。

五、V的选取方法

5.1　正交化方法

将ϕ_q^T进行QR正交分解[11]得

$$\phi_q^T=[U,\ V]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中　$[U,V]$是正交方阵，R是上三角矩阵，V是P个正交列，由于

$$\phi_q V=[R^T,0]\begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix}V=[R^T,0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=0$$

从而V即所求。

5.2　Gauss消去法

由于ϕ_q行满秩，对ϕ_q按行选主元消元得：

$$P\phi_q Q=\begin{bmatrix} {e_{p+1}}^T \\ \vdots \\ {e_n}^T \end{bmatrix} \qquad e_i=[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \overset{i}{1}\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$$

其中　P是消去矩阵，Q是列变换初等矩阵的积，可以选择

$$V=Q[e_1,\cdots,e_p]$$

这时

$$P\phi_q Q=\begin{bmatrix} {e_{p+1}}^T \\ \vdots \\ {e_n}^T \end{bmatrix}[e_1,\cdots,e_p]=0$$

而P非奇异．故$\phi_q V=0$．

由于Gauss消去法在一定程度上保持稀疏性且计算量小，在ϕ_q病态不严重时应用较好正交化方法得到的算法系数矩阵条件数较小．

六、计算实例

如图1.为平面二连杆操作手，各杆均匀质，其长度和质量分别为：$l_1=1\text{m}$，$l_2=2\text{m}$，$m_1=1\text{kg}$，$m_2=1\text{kg}$，系统广义坐标为：

$$q=[x_1\ \ y_1\ \ \theta_1\ \ x_2\ \ y_2\ \ \theta_2]^T$$

系统广义质量阵为：

$$M=\begin{bmatrix} m_1 &&&&& \\ & m_1 &&&& \\ && J &&& \\ &&& m_2 && \\ &&&& m_2 & \\ &&&&& J_2 \end{bmatrix}$$

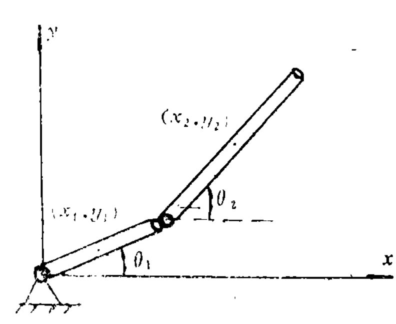

图1　平面二连杆操作手

广义力列阵为

$$F=[0 \quad -m_1g \quad 0 \quad 0 \quad -m_2g \quad 0]^T$$

系统约束方程为

$$x_1-(l_1/2)\cos\theta_1=0$$
$$y_1-(l_1/2)\sin\theta_1=0$$
$$x_2-l_1\cos\theta_1-(l_2/2)\cos\theta_2=0$$
$$y_2-l_1\sin\theta_1-(l_2/2)\sin\theta_2=0$$

设初始条件为

$$q_0=[0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T$$
$$q_0=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

由于无法得到该算例的解析结果，用QR方法[4]取 $h=0.001$ 时的结果作为其较精确近似解如图2，本文用修正的Euler法对系统数值积分，取步长$h=10^{-2}$s，误差容限EPS$=10^{-4}$，仿真误差曲线列入图3.

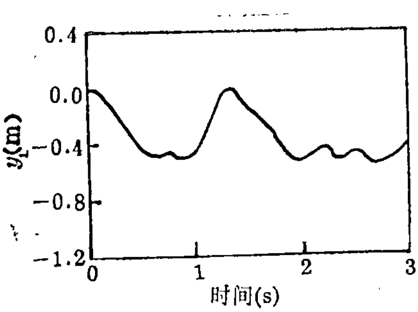

图2 y_1随时间变化规律

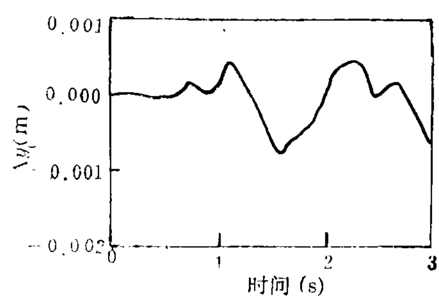

图3 误差Δy_1随时间变化规律

七、结 束 语

本文将多体系统动力学 Euler-Lagrange 方程转化为一阶微分/代数方程，并在此基础上得到易于实施的局部等价方程. 该方法同样适用于电路网络及轨迹控制问题中的数学模型处理. 算法的特点如下:

a. 由于把t并入q讨论，从而 $\phi_q\dot{q}=d\phi/dt$，$\phi_{qq}(\dot{q}\cdot\dot{q})=(d\dot{\phi}/dt)_q\dot{q}$，计算这些量的子程序要简单的多.

b. 主要迭代步(2.2)，(2.3)由 (4.2)，(4.6)，(4.7) 三个系数矩阵相同的n阶方程组组成. 而一般算法这一步有两个系数矩阵不同的$2n$阶方程组组成. 故该算法结构紧凑，计算量小.

c. 由于V^TM与ϕ_qA^{-1}正交，当V的各列近似正交时，方程组的病态程度只取决于ϕ_q，即问题的模型本身.

d. 算法不依赖于某种具体的离散方法. 如果利用其它方法如Runge-Kutta方法等，只要在(4.6)，(4.7)右端作相应修改即可.

参 考 文 献

[1] E. J. Haug, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Vol.1: Basic Methods, Ally & Bacon, Boston (1989).

[2] F.A. Potra and W.C. Rheinbolt, On the numerical solution of Euler-Lagrange Equations, *Mechanics of Structures & Machines*, 19(1) (1991), 1—18.

[3] J. W. Baumgarte, A new method of stabilization for holonomic constraints, *J. Applied Mechanics*, 50 (1983), 869—870.

[4] R. P. Singh and P. W. Likins, Singular value decomposition for constrained dynamical systems, *J. Applied Mechanics*, 52 (1985), 943—948.

[5] S.S. Kim and M.J. Vanderploeg, QR Decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems, *J. Mech. Tran. & Auto. in Design*, 108 (1986), 168—183.

[6] C. G. Liang and G.M. Lance, A differential null space method for constrained dynamic analysis, *J. Mech. Tran. & Auto. in Design*, 109 (1987), 405—411.

[7] O. P. Agrawal and S. Saigal, Dynamic analysis of multibody systems using tangent coordinates, *Computers & Structures*, 31(3) (1989), 349—355.

[8] J. W. Kamman and R. L. Huston, Constrained multibody systems-an automated approach, *Computers & Structures*, 18(4) (1984), 999—1112.

[9] F. A. Potra and J. Yen, Implicit integration for Euler-Lagrange equations via tangent space parameterization, *Mechanics of Structures & Machines*, 19(1) (1991), 77—98.

[10] 洪嘉振、刘延柱，离散系统动力学计算方法，力学进展，19(2) (1989), 205—210.

[11] 王德人，《非线性方程解法和最优化方法》，人民教育出版社，北京 (1980).

[12] 潘振宽，柔性多体系统动力学建模理论与数值方法研究，上海交大博士学位论文 (1992).

[13] 潘振宽、赵维加、洪嘉振、刘延柱，多体系统动力学微分/代数方程数值方法，力学进展，26(1) (1996), 28—40.

A New Algorithm for Solving Differential/Algebraic Equations of Multibody System Dynamics

Wang Yibing Zhao Weijia Pan Zhenkuan

(*Department of Automation*, *Qingdao University*, *Qingdao* 266071, P. R. China)

Abstract

The second order Euler-Lagrange equations are transformed to a set of first order differential/algebraic equations, which are then transformed to state equations by using local parameterization. The corresponding discretization method is presented, and the results can be used to implementation of various numerical integration methods. A numerical example is presented finally.

Key words multibody systems, differential/algebraic equations, numerical analysis