应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于拟线性混合型边界问题的概率表示

丁　灯[1]

（薛大为推荐，1996年3月25日收到）

摘　要

关于某些抛物型和椭圆型偏微分方程的混合边界问题的解被表示为一类联系于 Itô 正向反射边界随机微分方程的反向随机微分方程的解。

关键词　偏微分方程　混合型边界问题　随机微分方程　概率表示

一、引　言

我们知道，对混合型问题的解的概率表示问题的研究不单在偏微分方程理论上有着重要的应用，同时在如最优控制理论，下鞅问题，变分及拟变分等关于随机微分方程理论和应用上的问题也有着许多重要的应用（参见[1]、[2]和[4]等）。

设$a(x)=\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{d}$和$b(x)=\{b_i(x)\}_{i=1}^{d}$为有界可测的矩阵值函数．$L_x$为一如下的算子．

$$L_xu(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\partial_{ij}^{2}u(x)+\sum_{i=1}^{d}b_i(x)\partial_iu(x) \tag{1.1}$$

这里我们记　$\partial_{ij}u(x)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}u(x)$ 和 $\partial_iu(x)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}u(x)$　$(j=1,2,\cdots,d)$。

设D为R^d上的一具有光滑边界$\partial D=\Gamma$的有界开集．$Q\subset D$为具有光滑边界Γ和Γ_0的环型域。我们考虑如下的抛物型偏微分方程的混合边界问题：

$$\left.\begin{aligned}&\partial_tu(x,t)+L_xu(x,t)+f[u(x,t),(\partial_xu(x,t)\cdot\sigma(x)),x,t]=0\\&\partial_xu(x,t)\cdot\gamma(x)=\varphi(x)\qquad(\forall(x,t)\in\Gamma\times[0,T])\\&u(x,T)=\psi(x)\qquad(\forall x\in\bar{D})\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

和椭圆型偏微分方程的混合边界问题：

$$\left.\begin{aligned}&L_xu(x)+f[u(x),(\partial_xu(x)\cdot\sigma(x)),x]=0\qquad(\forall x\in Q)\\&\partial_xu(x)\cdot\gamma(x)=\varphi(x)\qquad(\forall x\in\Gamma)\\&u(x)=\psi(x)\qquad(\forall x\in\Gamma_0)\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

这里$\partial_x=(\partial_1,\ \partial_2,\cdots,\ \partial_d)$，$\sigma(x)$为一使得$a(x)=\sigma(x)\cdot\sigma(x)^*$的$d\times d$矩阵值函数（$\sigma(x)^*$为$\sigma(x)$的转置）．

1 澳门大学科技学院，澳门；中山大学数学系，广州 510725．

如果泛函f关于u和$\partial_x u\cdot\sigma$是线性的，例如$f=c(x)u-h(x)$，而且$\varphi(x)=\psi(x)=0$，我们已知，在通常的正则条件下，问题(1.2)的解能表示为

$$u(x,t)=E\left[\int_t^T h(X_s)\exp\left(-\int_t^s c(X_r)dr\right)ds\right] \tag{1.4}$$

这里X_s为满足如下的反射边界随机微分方程的扩散过程：

$$\left.\begin{array}{l} dX_s=\sigma(X_s)dW_s+b(X_s)ds-\gamma(X_s)d\xi_s \\ d\xi_s=I_\Gamma(X_s)d\xi_s \qquad (X_s\in\bar{D};\ \forall s\geqslant t)\end{array}\right\} \tag{1.5}$$

且其初值为$X_t=x$。而问题(1.3)的解也有如下的概率表示：

$$u(x)=E\left[\int_0^T h(X_s)\exp\left(-\int_0^s c(X_r)dr\right)ds\right] \tag{1.6}$$

这里X_s为方程(1.5)的具有初值$X_0=x$的解，$\tau=\inf\{s\geqslant 0,\ X_s\in\Gamma_0\}$是一停时(参见[1]和[2])。

在这一工作中，我们将考虑拟线性的情形。我们将证明，在某些关于非线性泛函$f(u,(\partial_x u\cdot\sigma),\cdot,\cdot)$的合适条件下，拟线性混合边界问题(1.2)或(1.3)的解分别可以用如下一联系于反射边界随机微分方程(1.5)的反向随机微分方程：

$$-dp_s=f(p_s,q_s,X_s,s)ds-q_s dW_s+\varphi(X_s)d\xi_s \tag{1.7}$$

的解来表示。这类反向随机微分方程首先是由Pardoux和Peng等人所研究（见[7]和[8]）。在Peng的文章[8]中，拟线性的Dirichlet问题的解被证明可以表示成一联于经典的Ito型随机微分方程的反向随机微分方程的解。

下面我们先对具有反射边界的随机微分方程(1.5)解的存在唯一性做一个简单的讨论，并证明了关于这一解的一些重要的估计。

二、具有反射边界的随机微分方程

设σ和b分别为R^d上的$R^{d\times d}$-值和R^d-值有界可测函数且满足如下的条件：存在一常数$K_0>0$使得

$$|\sigma(x)-\sigma(x')|+|b(x)-b(x')|\leqslant K_0|x-x'| \qquad (\forall x,x'\in R^d) \tag{2.1}$$

设$D\subset R^d$的边界是一C^3-流形。γ为一R^d-值、$C_b^2(\bar{D})$类的函数且满足如下的条件：

$$\gamma(x)n(x)\geqslant\delta_1>0 \qquad (\forall x\in\Gamma) \tag{2.2}$$

这里 $\bar{D}=D\cup\Gamma$，δ_1为一常数，$n(x)$为在$x\in\Gamma$上的向外单位法向量。设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},P)$为一满足通常假设的概率空间，$W_t$是一$R^d$-值标准$(\mathscr{F}_t)$-Wiener过程。

在假设(2.1)和(2.2)之下，我们知道对任一$(x,t)\in\bar{D}\times[0,\infty)$，方程(1.5)存在唯一的解$(X_s,\xi_s)$，即存在一连续适应$\bar{D}$-值过程$X_s$和一连续适应增过程$\xi_s$满足如下的随机积分方程：

$$X_s=x+\int_t^s b(X_r)dr+\int_t^s\sigma(X_r)dW_r-\int_t^s\gamma(X_r)d\xi_r \qquad (\forall s\geqslant t) \tag{2.3}$$

和边界条件：

$$\xi_s=\int_t^s I_\Gamma(X_r)d\xi_r \qquad (\forall s\geqslant t) \tag{2.4}$$

（参见[1]，[2]和[6]）。下面我们将证明两个重要的引理。

引理2.1 ([6]中的引理4.1和命题4.1)

在假设(2.2)之下，存在一对称的$d\times d$矩阵值函数$e(x)=\{e_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{d}$使得对任$i,j=1,\cdots,d$，$e_{ij}(x)\in C_b^2(R^d)$且存在正的常数$\nu$和$C_0$使得：

$$e(x))\geqslant\nu I_d,\ \ \forall x\in R^d;\quad \sum_{j=1}^{d}e_{ij}(x)\gamma_j(x)=n_i(x)\qquad(\forall 1\leqslant i\leqslant d,x\in\Gamma)\tag{2.5}$$

$$C_0|x-y|^2+\sum_{ij=1}^{d}e_{ij}(x)(x^i-y^i)\gamma_j(x)\geqslant 0\qquad(\forall x\in\Gamma,y\in\bar{D})\tag{2.6}$$

进一步，还存在一函数$\Phi(x)\in C_b^2(R^d)$满足如下的条件：存在一常数$\delta_2>0$使得

$$\gamma(x)\partial_x\Phi(x)\leqslant-\delta_2\qquad(\forall x\in\Gamma)\tag{2.7}$$

引理2.2 如果假设(2.1)和(2.2)被满足，且$(X_s,\ \xi_s)$是方程(1.5)的唯一解，则对任固定的$T>t\geqslant 0$，存在一常数$C_1>0$使得对任意的s_1，$s_2\in[t,T]$且$s_1<s_2$有：

$$E|X_{s2}-X_{s1}|^2+E|\xi_{s2}-\xi_{s1}|^2\leqslant C_1|s_2-s_1|\tag{2.8}$$

证明 设$\lambda>0$是一待定的常数，由(2.5)和(2.7)对函数$F(x)=\exp\{-\lambda\Phi(x)\}x^*e(x)x$应用Ito公式，我们可得到：

$$\begin{aligned}&E[\exp\{-\lambda\Phi(X_{s2})\}(X_{s2}-X_{s1})^*e(X_{s2})(X_{s2}-X_{s1})]\\&\leqslant K_1E\left[\int_{s_1}^{s_2}|X_r-X_{s_1}|^2\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}dr\right]+K_2E\left[\int_{s_1}^{s_2}|X_r\right.\\&\qquad\left.-X_{s_1}|^2\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}d\xi_r\right]-\delta_2\nu\lambda E\left[\int_{s_1}^{s_2}|X_r-X_{s_1}|^2\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}d\xi_r\right]\\&\qquad-2E\left[\int_{s_1}^{s_2}\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}(X_r-X_{s_1})^*e(X_r)\gamma(X_r)d\xi_r\right]\end{aligned}$$

这里 K_1和K_2是两个常数，且K_2不依赖于λ。现在，取$\lambda=(1/s_2\nu)(K_2+2C_0)$，应用边界条件(2.4)和不等式(2.6)我们可得：

$$\begin{aligned}&E\left[\int_{s_1}^{s_2}(X_r-X_{s_1})^*e(X_{s_2})(X_r-X_{s_1})\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}dr\right]\\&\leqslant K_1E\left[\int_{s_1}^{s_2}|X_r-X_{s_1}|^2\exp\{-\lambda\Phi(X_r)\}dr\right]\end{aligned}$$

或者 $$E[|X_{s_2}-X_{s_1}|^2]\leqslant K_1'E\left[\int_{s_1}^{s_2}|X_r-X_{s_1}|^2dr\right]$$

于是应用Gronwall的不等式，我们得到：

$$E[|X_{s_2}-X_{s_1}|^2]\leqslant C_1'|s_2-s_1|$$

然后，由于$\gamma(x)$是在Γ上有界的，用类似的方法，我们可得到

$$E[|\xi_{s_2}-\xi_{s_1}|^2]\leqslant C_1''|s_2-s_1|$$

因此引理得证。Q. E. D

设$Q\subset D$是一个以Γ和Γ_0为边界的环形域，且Γ_0是一个C^2-流形。设$(X_s,\ \xi_s)$是方程(1.5)的唯一解，且初值$X_0=x\in\bar{Q}$和$\xi_0=0$。设$\tau=\inf\{s\geqslant 0;\ X_s\in\Gamma_0\}$。则$\tau$是一$(\mathscr{F}_t)$-停时。

引理2.3 假设存在常数$\beta>\alpha\geqslant 0$使得

$$\beta I_d\geqslant a(x)\geqslant\alpha I_d\qquad(\forall x\in\bar{Q})\tag{2.9}$$

且存在一函数$\Psi(x)\in C_b^2(R^d)$和常数$\delta_3>0$，$m>0$使得

$$\partial_x \Psi(x)\cdot\gamma(x)\geqslant\delta_3>0(\forall x\in\Gamma);\quad L_x\Psi(x)\geqslant m\qquad(\forall x\in\bar{Q})\tag{2.10}$$

则在引理2.2的假设之下，存在某些常数$\mu>0$使得

$$E[e^{\mu T}]<\infty \text{ 和 } E[\xi_T]<\infty\tag{2.11}$$

证明 设λ和μ为两个正的待定常数，对函数$F(x,s)=\exp\{-\lambda\psi(x)+\mu s\}$应用Ito公式。可得

$$F(x,t)=E[F(X_{\tau\wedge s},\tau\wedge s)]+E\left[\int_0^{\tau\wedge s}F(X_r,r)(\partial_x\Psi(X_r)\cdot\gamma(X_r))d\xi_r\right]$$

$$-E\left[\int_0^{\tau\wedge s}F(X_r,r)\{\mu+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{ij=1}^d a_{ij}(X_r)\partial_i\Psi(X_r)\partial_j\Psi(X_r)-\lambda L_{X_r}\Psi(X_r)\}dr\right.\tag{2.12}$$

现选μ使得$0<\mu<m^2/(2\beta M_{\partial\Psi})$，这里$M_{\partial\Psi}>0$是一个常数使得$|\partial_x\Psi(x)|\leqslant M_{\partial\Psi}$对任$x\in\bar{Q}$，则有$m^2-4\mu\left(\frac{1}{2}\beta M_{\partial\Psi}\right)\geqslant 0$。因此，从假设(2.9)和(2.10)，我们可选$\lambda>0$使得对所有的$x\in\bar{Q}$

$$\mu+\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{ij=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\Psi(x)\partial_j\Psi(x)-\lambda L_x\Psi(x)\leqslant\mu+\frac{1}{2}\lambda^2\beta M_{\partial\Psi}-\lambda m\leqslant 0$$

因此，我们有

$$F(x,t)\geqslant E[F(X_{\tau\wedge s},\tau\wedge s)]\geqslant M_\lambda E[\exp[\mu(\tau\wedge s)]]$$

这里 $M_\lambda=\exp(-\lambda M_\Psi)>0$，而$M_\Psi$为一使得对所有$x\in\bar{Q}\,|\Psi(x)|\leqslant M_\Psi$的常数。令 $s\to\infty$。应用Faton引理。可得

$$M_\lambda E[\exp[\mu\tau]]\leqslant E[F(X_\tau,\tau)]\leqslant F(x,t)$$

因此有$E[\exp[\mu\tau]]<\infty$。

另一方面，从(2.12)等及已选定的λ和μ，我们可以证明

$$E\left[\int_t^{\tau\wedge s}F(X_r,r)(\partial_x\Psi(X_r)\cdot\gamma(X_r))d\xi_r\right]\leqslant F(x,t)-E[F(X_{\tau\wedge s},\tau\wedge s)]$$

令$s\to+\infty$。由Faton引理，可得

$$E\left[\int_t^{\tau}F(X_r,r)(\partial_x\Psi(X_r)\cdot\gamma(X_r))d\xi_r\right]\leqslant F(x,t)$$

于是从(2.10)式，可证得$E[\xi_\tau]<\infty$。Q. E. D

三、拟线性混合型的概率表示

设$\varphi(x)$和$\psi(x)$是R^d上的连续函数，而$f(p,q,x,s)$是$R\times R^d\times\bar{D}\times[0,\infty)$上的连续函数且满足如下的条件：

（1） 存在一个常数C_2使得对所有的$p_1,p_2\in R$，$q_1,q_2\in R^d$和$(x,s)\in\bar{D}\times[0,\infty)$

$$|f(p_1,q_1,x,s)-f(p_2,q_2,x,s)|\leqslant C_2(|p_1-p_2|+|q_1-q_2|)\tag{3.1}$$

（2） 存在一个常数$\delta_4>0$使得对任一$p,p_1\in R,(q,x,s)\in R^d\times\bar{D}\times[0,+\infty)$，有

$$p_1(f(p+p_1,q,x,s)-f(p,q,x,s))\leqslant-\delta_4 p_1^2\tag{3.2}$$

设$\theta\geqslant t\geqslant 0$是一$(\mathscr{F}_s)$-停时，我们考虑如下的反向随机微分方程

$$\left.\begin{aligned}&-dp_s=f(p_s,q_s,X_s,s)ds\quad q_sdW_s+\varphi(X_s)d\xi_s\qquad((s\in[t,\theta]))\\&p_\theta=\psi(X_\theta).\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

这里 (X_s,ξ_s)为关于初值$X_t=x$和$\xi_t=0$的具有反射边界随机微分方程(1.5)的唯一解。我们称一对过程(p_s,q_s)是反向随机微分方程(3.3)的解，如果p_s是$(\mathscr{F}_s)$-适应的连续过程而q_s是R^d-值的$(\mathscr{F}_s)$-适应连续过程，且它们满足如下的积分方程：

$$p_s=\psi(X_\theta)+\int_s^\theta f(p_r,q_r,X_r,r)dr-\int_s^\theta q_r dW_r+\int_s^\theta \varphi(X_r)d\xi_r, \qquad (s\in[t,\theta]) \qquad (3.4)$$

定理3.1 假设$\theta=T>t$，σ和b是满足(2.1)的有界连续函数，$\gamma\in C_b^2(\bar{D})$且满足(2.2)，φ,ψ和f是连续函数且f满足(3.1)和(3.2)。则反向随机微分方程(3.3)存在唯一的解(p_s,q_s)，而且(p_s,q_s)还满足如下的条件：

$$E\left[\int_t^T|p_r|^2dr\right]<\infty,\quad E\left[\int_t^T|q_r|^2dr\right]<\infty \qquad (3.5)$$

证明 由于φ，ψ和f是连续的，而$\bar{D}$为有界域，可知φ，ψ和$f(p,q,\cdot,\cdot)$在$\bar{D}$及$\bar{D}\times[0,T]$上有界，故由引理2.2，可得

$$E[|\psi(X_T)|^2]+E\left[\int_0^T|f(0,0,X_r,r)|^2dr\right]<\infty \qquad (3.6)$$

和

$$E\left[\int_0^T|\varphi(X_r)|^2d\xi_r\right]<\infty \qquad (3.7)$$

由估计(3.6)和(3.7)及条件(3.1)和(3.2)，用完全类似于文章[8]在证明定理2.2的方法。可证得这一定理，这里，我们忽略了其细节. Q. E. D.

设τ是如在第二节中所定义的停时。则如定理3.1，应用引理2.2和引理2.3，我们可证得如下的定理。

定理3.2 设$\theta=\tau$和$t=0$。则在引理2.3及定理3.1的条件之下，反向随机微分方程(3.3)存在唯一的$(\mathscr{F}_s)$-适应解(p_s,q_s)。而且(p_sq_s)还满足下面的条件

$$E\left[\int_0^\tau|p_r|^2dr\right]<\infty,\quad E\left[\int_0^\tau|q_r|^2dr\right]<\infty \qquad (3.8)$$

下面我们将证明拟线性混合型边界问题(1.2)或混合的Dirichlet-Neumann边界问题(1.3)的解分别可以表示成随机微分方程(3.3)的解。这一解分别由定理 3.1 和定理 3.2 所给出。

定理3.3 假设关于如下的抛物型微分方程的混合边界问题：

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t u(x,t)+L_x u(x,t)+f[u(x,t),(\partial_x u(x,t)\cdot\sigma(x)),x,t]=0\\&\partial_x u(x,t)\cdot\gamma(x)=\varphi(x)\qquad(\forall(x,t)\in\Gamma\times[0,T])\\&u(x,T)=\psi(x)\qquad(\forall x\in\bar{D})\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

有一解$u(x,t)\in C_b^2(\bar{D}\times[0,\infty))$。则在定理3.1的假设之下，其解$u(x,t)$有下面的表示

$$u(x,\ t)=p_t \qquad (3.10)$$

这里 p_t是唯一由(3.5)式在$\theta=T$之下所确定。

证明 对其解$u(x,t)$应用Ito公式，我们可得：

$$u(X_T,T)-u(X_s,s)=\int_s^T(\partial_r u(X_r,r)+L_{X_r}u(X_r,r))dr$$

$$-\int_s^T(\partial_x u(X_r,r)\cdot\gamma(X_r))d\xi_r+\int_s^T(\partial_x u(X_r,r)\cdot\sigma(X_r))dW_r$$

由$u(x,t)$满足混合边界问题(3.10)，而(X_s,ξ_s)是满足反射边界边条件(2.4)，我们可得：

$$u(X_s,s)=\psi(X_T)+\int_s^T f(u(X_r,r),v(X_r,r),X_r,r)dr$$

$$+\int_s^T\varphi(X_r)d\xi_r-\int_r^T(\partial_x u(X_r,r)\cdot\sigma(X_r))dW_r$$

这里$v(X_s,s)=(\partial_x u(X_s,s)\cdot\sigma(X_s))$。因此$(u(X_s,s),v(X_s,s))$是方程(3.4)的唯一解。即

$$u(x,\ t)=p_t \tag{3.11}$$

Q. E. D

定理3.4 假设如下关于椭圆型微分方程的混合边界问题：

$$\left.\begin{array}{ll} L_x u(x)+f(u(x),(\partial_x u(x)\cdot\sigma(x)),x)=0 & (\forall x\in Q)\\ \partial_x u(x)\cdot\gamma(x)=\varphi(x) & (\forall x\in\Gamma)\\ u(x)=\psi(x) & (\forall x\in\Gamma_0)\end{array}\right\} \tag{3.12}$$

有一解$u(x)\in C_b^2(\bar{D})$。则在定理3.2的假设之下，$u(x)$有如下的表示：

$$u(x)=p_0 \tag{3.13}$$

这里p_0是唯一由(3.5)在$\theta=\tau$和$t=0$之下所确定的。

证明 对问题(3.12)的解$u(x)$应用Ito公式，可得

$$u(X_\tau)-u(X_0)=\int_0^\tau L_{X_r}u(X_r)dr$$

$$-\int_0^\tau(\partial_x u(X_r)\cdot\gamma(X_r))d\xi_r+\int_0^\tau(\partial_x u(X_r)\cdot\sigma(X_r))dW_r$$

由于$u(x)$是(3.12)的解，而(X_s,ξ_s)满足边界条件(2.4)我们可得

$$u(X_s)=\psi(X_\tau)+\int_s^\tau f(u(X_r),v(X_r),X_r)dr$$

$$+\int_s^\tau\varphi(X_r)d\xi_r-\int_s^\tau(\partial_x u(X_r)\cdot\sigma(X_r))dW_r$$

这里 $v(X_s)=(\partial_x u(X_s)\cdot\sigma(X_s))$。因此$(u(X_s),v(X_s))$是(3.12)的唯一的问题解，即

$$u(x)=p_0 \tag{3.14}$$

Q. E. D

参 考 文 献

[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Impulse Control and Quasi-uariational Inequalities*, Gauthier-Villars (1984).

[2] M. Frridlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1985).

[3] N. Ikeda and S. Watanade, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publishing Company (1981).

[4] P. L. Lions, Optimal control of diffussion processes and Hamilton Jacobi equations, Part 1, *Commu. in PDE*, 8(10) (1983), 1101—1174; Part 2, *Commu. in PDE*, 8 (11), (1983), 1229—1276.

[5] P. L. Lions, Optimal control of diffussion processes and Hamilton Jacobi equations, Part 3, in H. Brezis and J. L. Lionseds, *Nonlinear Patial Diferential Equations and Their Application*, Research Notes in Math. 93, Pateman Admaroed

Publishing Program.

[6] P. L. Lions and A. S. Sznitman, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, *Commu. in Pure and Applied Mathematics*, **37** (1984), 511—537.

[7] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of backward stochastic equation, *Systems and Control Letter*, **14** (1990), 56—61.

[8] S. Peng, Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations, *Stochastics and Stochastics Reports*, **37** (1991), 61—74.

A Note on Probabilistic Interpretation for Quasilinear Mixed Boundary Problems

Ding Deng

(*Faculty of Science and Technology, University of Macau, P. O. Box* 3001, *Macau; Mathematical Department, Zhongshan University, Guangzhou* 510725, *P. R. China*)

Abstract

Solutions of quasilinear mixed boundary problems for the same parabolic and elliptic partial differential equations are interpreted as solutions of a kind of backward stochastic differential equations, which are associated with the classical Ito forward stochastic differential equations with reflecting boundary conditions.

Key words quasilinear partial differential equations, mixed boundary problems, stochastic differential equations, probabilistic interpretations