应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

离散变量结构优化设计的组合算法*

柴 山[1,2]　　孙焕纯[1]

（1996年11月28日收到）

摘 要

本文首先给出了离散变量优化设计局部最优解的定义，然后提出了一种综合的组合算法。该算法采用分级优化的方法，第一级优化首先采用计算效率很高且经过随机抽样性能实验表明性能较高的启发式算法——相对差商法，求解离散变量结构优化设计问题近似最优解$\tilde{X}$；第二级采用组合算法，在$\tilde{X}$的离散邻集内建立离散变量结构优化设计问题的（−1，0，1）规划模型，再进一步将其化为（0，1）规划模型，应用定界组合算法或相对差商法求解该（0，1）规划模型，求得局部最优解。解决了采用启发式算法无法判断近似最优解是否为局部最优解这一长期未得到解决的问题，提高了计算精度，同时，由于相对差商法的高效率与高精度，以上综合的组合算法的计算效率也还是较高的。

关键词 离散变量 结构最优化 组合优化 局部最优解

一、引 言

工程实际中的结构优化设计问题，由于规范要求（例如钢筋混凝土结构的模数制要求），材料限制（例如选用型钢）等多方面的原因，大多都属于离散变量结构优化设计。由于设计变量的不连续性这一根本性的原因，使得离散变量优化设计具有两个突出的困难：

（1） 离散变量优化设计均为非凸规划，解析的数学工具无能为力了，应当用组合优化的方法进行求解，而由于组合优化的NP困难问题的障碍难以克服，使得求解离散变量优化设计问题的难度极大。

常用的组合算法有三类：

① 精确算法。这类算法可求得问题的全局最优解，但一般来讲这些算法的运算时间都是设计变量的指数函数，对这类算法的评价标准是其计算效率。

② 近似算法。这类算法求得的不是精确最优解而是近似最优解，但是该类算法可以保证近似最优解与精确最优解的相对误差不超过某一固定的比值。由于确定相对误差界非常困难，所以只有很少几个问题有近似算法。

③ 启发式算法。这类算法的基本思想不是一定要求得精确最优解，而是在允许的时间内求得一近似最优解。因为这类算法大多都是在对问题进行了充分研究的基础上根据经验而

* 山东省自然科学基金资助课题。
1 大连理工大学工程力学系，116023.
2 山东工程学院，山东淄博 255012.

提出的，因此称之为启发式算法．对启发式算法的评价标准是近似最优解接近精确最优解的程度．

在以上三类算法中，最优化算法虽然可求得全局最优解，但由于这类算法的指数时间限制，如文[1]指出的那样，仅适用于小规模的问题．在工程实际中应用最多的是各种各样的根据具体问题提出的启发式算法．

（2） 做为连续变量优化设计局部最优性条件的库-塔克条件已不再适用，因此，无法判断由启发式算法求得的解是不是局部最优解，这是在离散变量结构优化设计问题中长期未得到解决的问题．

为克服以上两个困难，本文首先给出了离散变量优化设计局部最优解的定义，然后提出了一种综合的组合算法．该算法采用分级优化的方法，第一级优化首先采用计算效率很高且经过随机抽样性能实验表明性能较高的启发式算法——相对差商法，求解离散变量结构优化设计问题，在迭代收敛后，求得近似最优解 $\bar{X}$；第二级采用组合算法，在$\bar{X}$的离散邻集内建立离散变量结构优化设计问题的$(-1,\ 0,\ 1)$规划模型，再进一步将其化为$(0,1)$规划模型，应用定界组合算法或相对差商法求解该$(0,\ 1)$规划模型，以检验近似最优解是否为局部最优解，若近似最优解不是局部最优解，再进一步迭代，直至收敛为止．采用这种算法，可以保证求得局部最优解，解决了采用启发式算法无法判断近似最优解是否为局部最优解这一长期未得到解决的问题，提高了计算精度，同时，由于相对差商法的高效率与高精度，以上综合的组合算法的计算效率也还是较高的．

二、几个定义

为了下面论述方便，本节给出几个有关的定义．

定义1　点的离散近集　点X的离散近点是X在各个坐标轴上相邻的离散点．令P_i，Q_i分别为X点在i坐标轴的下坐标近点和上坐标近点，则点X的离散近集为

$$S_c(X)=\bigcup_{i=1}^{n}\{P_i,\ Q_i\} \tag{2.1}$$

进一步地，$S_c(X)$能被分为两个子集：下离散坐标近点子集$S_{cl}(X)$和上离散坐标近点子集$S_{cu}(X)$

$$\left.\begin{aligned}S_{cl}(X)&=\bigcup_{i=1}^{n}\{P_i\}\\ S_{cu}(X)&=\bigcup_{i=1}^{n}\{Q_i\}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

令

$$E_i=\{x_i^{P_i},x_i^X,x_i^{Q_i}\} \tag{2.3}$$

其中　$x_i^{P_i},x_i^X,x_i^{Q_i}$分别是$P_i$，$X$，$Q_i$的第$i$个分量．

定义2　点的离散邻集　点X的离散邻集定义为由包含$\{x_i^{P_i},x_i^X,x_i^{Q_i},\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$的离散坐标线（平面或超平面）的所有交点构成的集合．这可用下式表示

$$S_u(X)=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\prod_{i=1}^{n}E_i \tag{2.4}$$

这里　$E_i \times E_j$表示E_i和E_j的笛卡尔乘积。

图 1 表示了二维离散变量X点的离散近集和离散邻集的几何关系。

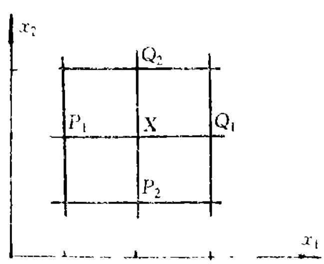

图1　X点的下坐标近点和上坐标近点

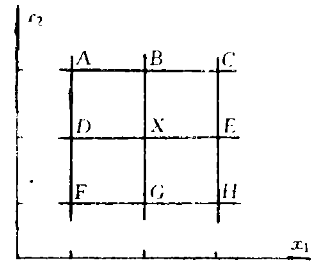

图2　X点的离散近集与离散邻集

其中

$$S_u(X)=\{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H\} \quad S_c(X)=\{B,\ E,\ G,\ D\}$$

$$S_{cl}(X)=\{D,\ G\},\ S_{cu}(X)=\{B,\ E\}$$

在一般情形下，设离散变量的维数为n，则根据组合理论，离散邻集$S_u(X)$内的离散点总数$N=3^n-1$，而离散近集$S_c(X)$内的离散点总数$N=2n$。

在离散变量的优化问题中，约束条件一般都是离散变量的不等式函数，可表示为

$$g_j(X)\leqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{2.5}$$

式中　　m为不等式约束条件的个数，$g_j(X)$可以是任意函数。

定义3　离散变量的可行集　在离散点集内，满足约束条件的离散点X的集合S_f称为离散变量的可行集。

$$S_f=\{X \mid g_j(X)\leqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \tag{2.6}$$

定义4　离散变量优化设计的拟局部最优解　若$X^*\in S_f$且对于所有$X\in S_c(X^*)\cap S_f$均有下述不等式成立

$$f(X^*)\leqslant f(X) \tag{2.7}$$

则称X^*为拟局部最优解。

定义5　离散变量优化设计的局部最优解　若$X^*\in S_f$并且对于所有$X\in S_u(X^*)\cap S_f$均有不等式(2.7)成立，则称X^*为局部最优解。

定义6　离散变量优化设计的全局最优解　若$X^*\in S_f$并且对于所有$X\in S_f$，均有不等式(2.7)成立，则称X^*为全局最优解。

三、离散变量结构优化设计的（-1，0，1）规划模型

3.1　离散变量结构优化设计的数学模型

在应力、位移约束下框架结构离散变量优化设计的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & W=\sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i A_i \\ \text{s.t.} \quad & \sigma_{il}\leqslant[\sigma]_i \qquad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ NL) \\ & \delta_{jl}\leqslant\bar{\delta}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ NJ) \\ & x_i\in S_i \qquad (S_i\in S) \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中　x_i 是设计变量，$x_i=\{A_i,\ I_{yi},\ W_{yi},\ R_{yi},\ I_{zi},\ W_{zi},\ R_{zi},\ J_i\}$ 是截面几何性质的集合，S_i是x_i的许用集合，S是S_i的集合。

在以上模型中，应力约束、尺寸约束属局部约束，位移约束属全局约束。采用二级算法，第一级处理局部约束，其数学模型为

$$\begin{aligned}
&\min \quad W=\sum_{i=1}^{m}\rho_i A_i\sum_{k\in G_i} l_k \\
&\text{s.t.} \quad \sigma_{il}\leqslant[\sigma]_i \qquad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ NL) \\
&\qquad\ \ x_i\in S_i \qquad (S_i\in S)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中　i为变量连接后的设计变量编号；m为计变量的个数；G_i为变量连接后取同一设计变量x_i的单元的集合。

采用一维搜索算法求解(3.2)式，得优化解$X_0^*=\{x_{10}^*,\ x_{20}^*,\ \cdots,\ x_{m0}^*\}$

第二级处理全局性约束。取X_0^*做为离散变量集合的下界，将S_i及S修改为新的集合S_i'及S'。由于应力约束的单调性质，截面增加不会破坏应力约束因而在第二级优化时不必再考虑应力约束，其数学模型为

$$\begin{aligned}
&\min \quad W=\sum_{i=1}^{m}\rho_i A_i\sum_{k\in G_i} l_k \\
&\text{s.t.} \quad \delta_{jl}\leqslant\bar{\delta}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ NJ) \\
&\qquad\ \ x_i\in S_i', \qquad S_i'\in S'
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\delta_{jl}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in G_i}\delta_{kjl} \tag{3.4}$$

其中　j为位移约束编号；l为荷载工况编号；δ_{kjl}为单元k对l工况第j号位移的贡献。

3.2　离散变量结构优化设计的(−1，0，1)规划模型

设已知一设计点$\tilde{X}$，由定义5，若$\tilde{X}$在其离散邻集$\tilde{S}_u$内为一最优解，则$\tilde{X}$为一局部最优解。设$\tilde{X}$对应的各设计变量为$\tilde{x}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，令$P_i$，$Q_i$分别为$\tilde{X}$点在$i$坐标轴的下坐标近点和上坐标近点，且$\tilde{S}_i=\{x_i^{P_i},\ \tilde{x}_i, x_i^{Q_i}\}$，则离散变量结构优化设计的(−1，0，1)规划模型为：

$$\begin{aligned}
&\min \quad W=\sum_{i=1}^{m}\rho_i A_i\sum_{k\in G_i} l_k \\
&\text{s.t.} \quad \delta_{jl}\leqslant\bar{\delta}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ NJ) \\
&\qquad\ \ x_i\in\tilde{S}_i, \qquad \tilde{S}_i\in\tilde{S}_u
\end{aligned} \tag{3.5}$$

在以上模型中，设计变量$x_i\in\tilde{S}_i=\{x_i^{P_i},\ \tilde{x}_i, x_i^{Q_i}\}$可取三个值。令

$$x_i=\begin{cases}\tilde{x}_i+x_i'(\tilde{x}_i-x_i^{P_i}) & (x_i'\leqslant 0)\\ \tilde{x}_i+x_i'(x_i^{Q_i}-\tilde{x}_i) & (x_i'>0)\end{cases} \qquad x_i'\in\{-1,\ 0,\ 1\} \tag{3.6}$$

则数学模型(3.5)可化为x_i'的(−1，0，1)规划模型。

3.3 化(−1, 0, 1)规划模型为(0, 1)规划模型

为生成组合及求解方便，下面将数学模型(3.5)化为(0, 1)规划模型．令

$$\left.\begin{array}{l} x_i=x_i^{P_i}+y_{i1}(\tilde{x}_i-x_i^{P_i})+y_{i2}(x_i^{Q_i}-x_i^{P_i}) \\ y_{i1}\in(0,\ 1),\ y_{i2}\in(0,\ 1),\ y_{i1}+y_{i2}\leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

这样，即将x_i表示为y_{i1}，y_{i2}的线性函数，设计变量数由m增加为$2m$，将(3.7)式代入(3.5)式，并对设计变量重新编号，即可将(−1, 0, 1)规划模型化为(0, 1)规划模型．

$$\begin{array}{ll} \min & W=\sum\limits_{r=1}^{2m}\rho_r A_r\sum\limits_{k\in G_i} l_k \\ \text{s.t.} & \delta_{jl}\leqslant\bar{\delta}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ NJ;\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ NL) \\ & y_r\in(0,\ 1) \end{array} \tag{3.8}$$

注意，在(3.8)式中，经重新编号后的设计变量y_r还要满足其对应的设计变量的约束条件$y_{i1}+y_{i2}\leqslant 1$．形式上，(3.7)式的数学模型有$2^{2m}=4^m$个组合，但由于$y_{i1}+y_{i2}\leqslant 1$的约束，实际上只有3^m个组合，与(−1, 0, 1)规划的组合数相等．

四、计算方法

由以上分析可见，求解数学模型(3.1)式，有两个关键问题．一是要求得一近似局部最优解$\tilde{X}$；一是要在$\tilde{X}$的离散邻集S_u中寻优，若在S_u中$\tilde{X}$是最优解，则$\tilde{X}$是数学模型(3.1)式的局部最优解，否则，就应重新进行优化迭代．针对以上两个关键问题，采用以下的相应算法．

4.1 用相对差商法求近似局部最优解

文[2]提出了一种用于求解一类离散优化问题的启发式算法——相对差商法（文[2]中称为方向差商法），该法具有计算效率高，迭代次数少，收敛稳定的特点.为检验其计算精度，进行了在服从概率分布的随机测验题目样本空间中进行了随机数值实验．100个数学模型(3.3)式的随机测验题目（10个设计变量）的数值实验的结果为：近似最优解与局部最优解的平均相对误差为0.3%，近似最优解与局部最优解的最大相对误差为3.8%，有85%的算例近似最优解等于局部最优解．这些实验结果表明相对差商法还是一种计算精度较高的算法．

该算法的基本思想是首先将(3.3)式的约束条件表示为

$$\Delta_k=\bar{\delta}_j-\delta_{jl}\geqslant 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ NJ\times NL) \tag{4.1}$$

将(3.8)式的约束条件集合分为两个子集$G_1=\{\Delta_k|\Delta_k<0\}$和$G_2=\{\Delta_k|\Delta_k\geqslant 0\}$，$G_1$为有效约束子集，$G_2$为无效约束子集，可将$G_1$看作定义在$R^{k_1}(k_1\leqslant NJ\times NL)$上的一个实向量，取该向量的2范数作为统一约束函数

$$Z=\|G_1\|_2=\Big(\sum_{k\in G_1}\Delta_k^2\Big)^{1/2} \tag{4.2}$$

定义相对差商为

$$\beta_i=\frac{\Delta Z/\Delta x_i}{\Delta W/\Delta x_i}=\frac{\Delta Z}{\Delta W} \tag{4.3}$$

其中 ΔZ, ΔW分别表示统一约束的向前差分和目标函数的向前差分．优化方法是从可行集

外由目标函数最小的点出发，沿目标函数增加最小、约束条件降低最多的方向（即相对差商最小的方向）前进，逐步靠近可行集的边界。该算法的具体理论和算法可以参考文[2]。

4.2 求解(0,1)规划的计算方法

文[3]提出了一种求解一类(0, 1)规划问题的定界组合算法。该算法的基本思想是首先将约束条件的系数按由大到小排列，在(0, 1)规划总组合 2^{2m} 中，求出在(n, r)组合中满足约束条件所必需的不为0的设计变量个数 r_0，并以此为组合搜索的下界，同时，由于约束条件 $y_{i1}+y_{i2}\leqslant 1$的限制，r的上界为m，则组合数降为 $\sum\limits_{r=r_0}^{m} C(2m,r)$，然后，再将目标函数的系数按由小到大排列，根据目标函数的系数确定搜索的上界，进一步减少搜索组合的个数。本算法计算效率较高，对于中等规模的问题，可较快地求得其最优解。该算法的具体理论和算法可以参考文[3]。

对于大规模问题，为提高计算效率，可采用相对差商法，该法的基本思想如4.1节所述，只是此时许用集合为{0, 1}，计算精度更高。该法的组合搜索个数不大于设计变量的个数，并且更重要的是该法可以给出误差估计，若误差较大，还给出了修正算法，一般经过0阶修正，至多1阶修正即可达到较高的精度，1阶修正的计算工作量也仅为$O(n)$。

4.3 组合算法的计算步骤

以上讨论了离散变量结构优化设计数学模型的建立，在 $\bar{X}$ 邻集内的(−1, 0, 1)规划模型并将其化为相应的(0, 1)规划模型，并且给出了几种求解上述模型的算法。求解离散变量结构优化设计问题的组合算法的基本思想是首先应用相对差商法求解数学模型(3.3)式的近似局部最优解$\bar{X}$，然后应用定界组合算法或相对差商法求解(0, 1)规划模型(3.7)式，求得问题的局部最优解。这一算法的计算框图见图3。

五、算　　例

下面通过两个算例说明以上算法与其他算法的对比情况。

例1 单跨两层框架，结构尺寸及荷载工况如图4所示，水平位移上限为25.4mm，离散变量集见表1弹性模量$E=206.88\mathrm{GN/m^2}$，许用应力$[\sigma]=163.86\mathrm{MN/m^2}$，材料比重$\rho=76999.34\mathrm{N/m^3}$，优化结果如表2所示。

例2 十杆平面桁架，有6个节点，10个设计变量，材料是铝。$E=68.96\mathrm{GN/m^2}$，$\rho=27150.68\mathrm{N/m^3}$，全部杆件的许用应力均为±172.4$\mathrm{MN/m^2}$，在2号节点和4号节点分别作用有向下的444.89kN的集中力，各可动节点y方向的位移允许值为50.8mm，各杆载面积的下限均为的0.645$\mathrm{cm^2}$，初始设计值均为64.5$\mathrm{cm^2}$。离散变量集为{0.64516, 1.9355, 6.4516, 19.355, 32.258, 51.6128, 96.774, 109.677, 141.935, 154.838, 187.096, 2000.000}（面积单位为$\mathrm{cm^2}$），优化结果如表3所示。

在以上两个算例中，分别列出了本文算法与两种启发式算法的对比计算结果。例1用的是相对差商算法和改进的Templeman[4]算法，由对比计算结果可见，这两种启发式算法都未求得局部最优解；例2用的是相对差商算法和(0, 1)规划组合算法，本例有相等的两个局部最优解，以上两种算法分别求得了这两个解。

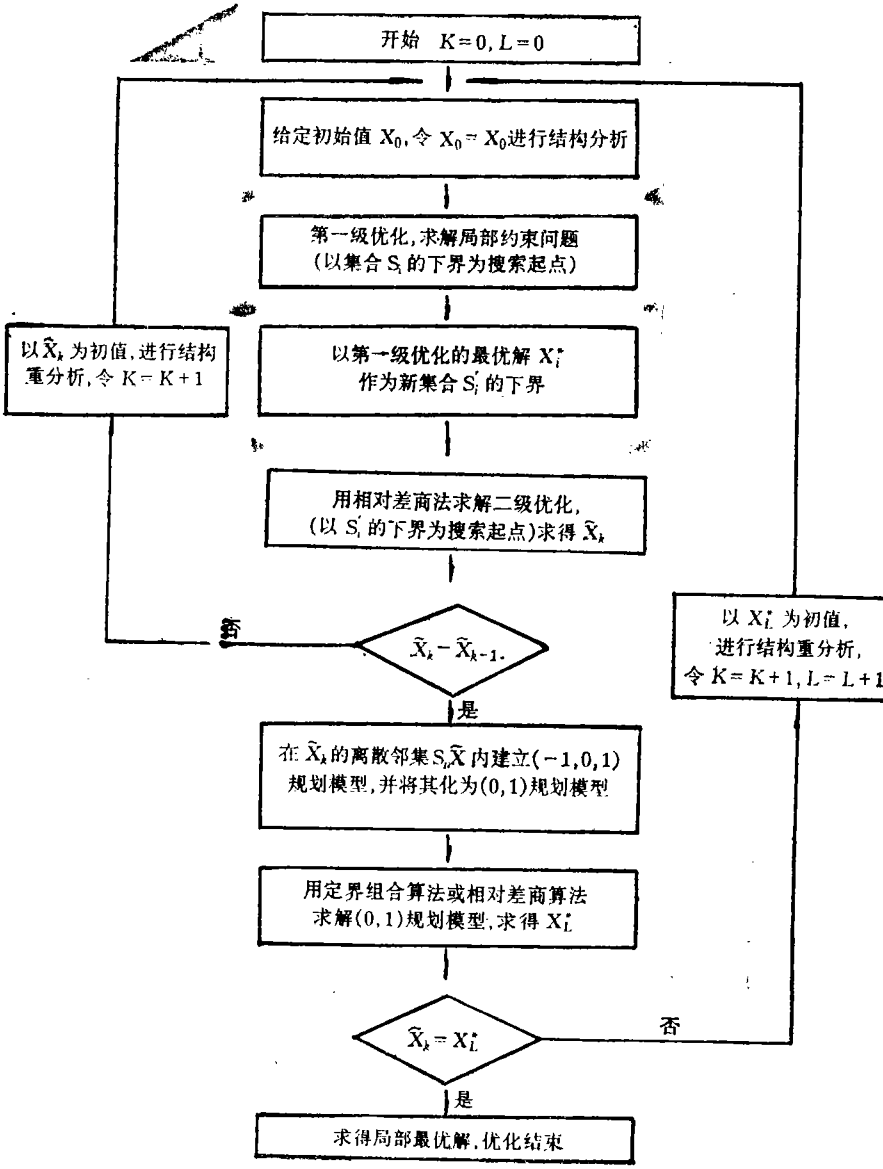

图3 计算框图

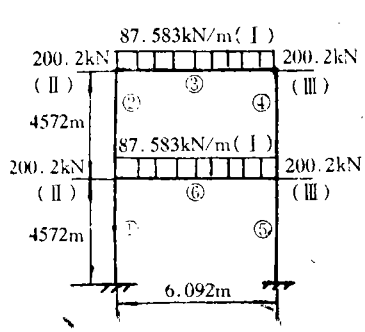

图4 单跨两层框架

表 1 离散变量集

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	118.39	144.92	167.34	187.10	204.96	221.37	236.66	251.02	264.59
W	1690.2	2290.9	2842.5	3360.3	3852.7	4324.9	4780.5	5222.0	5651.4
I	41623	62435	83246	104058	124869	145681	166492	187304	208115

表 2 优化结果

	截面性质				重量 (N)	迭代次数
	①⑤	②④	③	⑥		
连续变量	1183.13	64357	57227	174650	42296.8	4
文[4]方法	124869	62435	62435	187304	43219.3	
相对差商法	146581	62435	62435	145681	42972.2	3
局部最优解	124869	62435	62435	166492	42534.4	5

表 3 平面桁架优化结果

杆件号	杆件截面积				
	初始值	文[5]方法	相对差商法	局部最优解	
1	141.9	187.096	200.000	187.096	200.000
2	141.9	0.64516	0.64516	0.64516	0.64515
3	141.9	154.838	141.935	154.838	141.935
4	141.9	96.7740	96.7740	96.7740	96.7740
5	141.9	0.64516	0.64516	0.64516	0.64516
6	141.9	0.64516	0.64516	0.64516	0.64516
7	141.9	51.6128	51.6128	51.6128	51.6128
8	141.9	141.935	141.935	141.935	141.935
9	141.9	141.935	141.935	141.935	141.935
10	141.9	0.64516	0.64516	0.64516	0.64516
结构重量(kg)		2325.374	2325.374	2325.374	2325.374
重分析次数		10	5	7	7

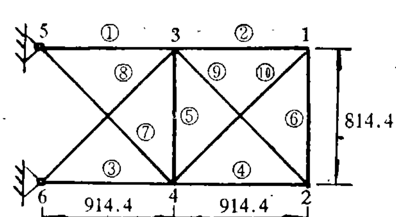

图5 十杆桁架

参考文献

[1] J. S Arora & M. W. Huang, Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables, a review, *Structural Optimization*, 8 (1994), 69—85.

[2] 柴山等，离散变量优化设计的方向差商法，计算结构力学及其应用，3 (1994).
[3] 柴山，一类(0,1)规划问题的定界组合算法及其在离散变量结构优化设计中的应用，工程力学，1 (1995).
[4] 隋允康等，含梁结构离散断面的优化设计及其对平面框架的程序实现，计算结构力学及其应用，3 (1987).
[5] 许强、孙焕纯，离散变量桁架结构优化设计的组合算法，大连理工大学学报，6 (1991).
[6] 柴山、孙焕纯，寻求离散变量桁架结构优化设计(0, 1)规划模型可行集的差商向量法，大连理工大学学报，5 (1995).

A Combinatorial Algorithm for the Discrete Optimization of Structures

Chai Shan Sun Huanchun

(*Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *P. R. China*)

Abstract

The definition of local optimum solution of the discrete optimization is first given, and then a comprehensive combinatorial algorithm is proposed in this paper. Two-levels optimum method is used in the algorithm. In the first level optimization, an approximate local optimum solution $\tilde{X}$ is found by using the heuristic algorithm, relative difference quotient algorithm, with high computational efficiency and high performance demonstrated by the performance test of random samples. In the second level, a mathematical model of (-1, 0, 1) programming is established first, and then it is changed in to (0,1) programming model. The local optimum solution X^* will be from the (0, 1) programming by using the delimitative and combinatorial algorithm or the relative difference quotient algorithm. By this algorithm, the local optimum solution can be obtained certainly, and a method is provided to judge whether or not the approximate optimum solution obtained by heuristic algorithm is an optimum solution. The above comprehensive combinatorial algorithm has higher computatonal efficiency.

Key words discrete variables, structural optimization, combinatorial optimization, local optimum solution