

# 载电流夹紧杆的非线性稳定性分析\*

程昌钧<sup>1,2</sup> 杨 骁<sup>2</sup>

(1996年3月8日收到)

## 摘 要

本文研究了载电流夹紧杆在磁场作用下的非线性稳定性, 其磁场由两根无限长相互平行的刚性直导线产生. 杆的自然状态在刚性导线所在的平面内, 并且与两刚性导线等距. 首先, 在空间变形的假定下, 给出了问题的数学描述, 讨论了线性化问题和临界电流. 其次, 证明了杆的过屈曲状态总是平面的. 最后, 数值计算了分支解的全局响应, 得到了杆过屈曲状态的挠度、内力和弯矩的分布. 结果表明, 载电流杆既可发生超临界屈曲, 又可发生次临界屈曲, 其性态依赖于杆与导线间的距离; 同时, 在超临界的过屈曲状态上还存在极限点型的失稳, 这与通常的压杆失稳有着本质的区别.

**关键词** 磁弹性 分支 极限点 载电流直杆 数值方法

## 一、引 言

磁场中载电流直导线的稳定性研究不仅具有重要的理论意义, 而且有广泛的应用背景. 在这类问题中, 当电流适中时, 可以忽略导线电流产生的自场磁力, 只研究导线在外部磁场作用下的稳定性.

在专著 [1] 中用经典弹性弦模型分析了平行于导线的均布磁场中载电流导线的线性稳定性问题. 为详细分析其过屈曲性态, Wolfe, P.<sup>[2,3]</sup> 用非线性弹性弦的模型, 求得了任意电流值下, 弦的所有平衡性态, 并研究了其动态稳定性. 对同一问题, Seidman, T. I 和 Wolfe, P.<sup>[5]</sup>, Wolfe, P.<sup>[6]</sup> 利用弹性杆的 Cosserat 模型进行了理论分析和研究, 证明了经典意义下分支解的存在性, 并有无穷多个分支解.

对于平面内三根平行导线的稳定性问题, Wolfe, P 将两边导线视为刚性的, 分别利用弦模型<sup>[3]</sup> 和平面杆模型<sup>[7]</sup> 研究了中间导线的稳定性, 证明了在特征值处, 导线必发生分支, 并用奇性理论讨论了缺陷敏感性问题.

所有这些工作, 除弦模型外, 仅从理论上研究和分析了载电流直导线的稳定性, 尚未见到有关的数值结果.

本文以 Euler 杆为模型, 从理论分析和数值计算两个方面研究磁场中载电流直导线的稳

\* 国家教委博士点基金和甘肃省自然科学基金资助项目.

1 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072.

2 兰州大学力学系, 兰州 730000.

定性问题。首先，在空间变形的假定下，给出了问题的数学描述。其次，研究了线性化问题和特征值，证明了当导线电流与两边刚性导线中的电流同向时，导线的屈曲发生在导线所在的平面内；且当电流反向时，屈曲发生在垂直于导线平面的平面内。最后，利用分支解的延续算法，计算了一些情形下导线的过屈曲状态的全局响应，得到了导线的挠度，内力和弯矩的分布。本文首次发现：当电流同向时，其过屈曲状态既可是超临界的，也可是次临界的，其性态依赖于导线与刚性导线间的距离。并且，在超临界的过屈曲状态上，存在着极限点型的失稳；而当电流反向时，其过屈曲状态是超临界的，并且没有极限点型的失稳。

## 二、数学描述

设磁场  $\mathbf{B}$  中有长为  $L$ 、载电流  $I$  的直杆，其自然状态的轴线与直角坐标系  $Oxyz$  的  $Oz$  轴重合，横截面的两个惯性主轴与  $Ox$  轴， $Oy$  轴平行。

根据 Cosserat 杆模型<sup>[8]</sup>，变形后杆的构形可用杆轴线的位置矢径

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (2.1)$$

和横截面惯性主轴的单位矢量  $\mathbf{d}_1(s)$ ； $\mathbf{d}_2(s)$  来描述，这里， $s$  是变形前杆轴线的弧长参数， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为坐标系  $Oxyz$  的单位基矢量。

假定变形过程中，杆轴线不可伸长，并且横截面假设成立，则

$$\left. \begin{aligned} x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 &= 1 \\ \mathbf{d}_3(s) &= \mathbf{d}_1(s) \times \mathbf{d}_2(s), \quad \mathbf{d}_3(s) = \mathbf{r}'(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

而杆的弯曲应变为

$$u_i(s) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{d}_j' \cdot \mathbf{d}_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

其中  $u_1(s)$ ， $u_2(s)$  分别是关于轴  $\mathbf{d}_1(s)$ ， $\mathbf{d}_2(s)$  的弯曲应变，而  $u_3(s)$  是截面绕  $\mathbf{d}_3(s)$  轴的扭转应变。

为描述方便，并克服欧拉角描述所引起的极奇性，引入度量截面绕  $Oz$  轴扭转的量  $\alpha(s)$ <sup>[9]</sup>，则可得位移  $(x(s), y(s))$ ， $\alpha(s)$  与应变  $(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$  的几何关系。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x'' - \frac{x'z''}{1+z'} \\ y'' - \frac{y'z''}{1+z'} \\ \alpha' - \frac{y''x' - x''y'}{1+z'} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

又设磁场  $\mathbf{B}$  由位于  $x=0$ ， $y=\pm d$  处的两根无限长平行刚性直导线中电流  $I_0\mathbf{k}$  产生，则杆所受的电磁体力为  $\mathbf{F} = I\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{B}$ 。

记杆的  $[S, L]$  部分对  $[0, S]$  部分的作用力为  $\mathbf{N}(s)$ ，力矩为  $\mathbf{M}$ ，令

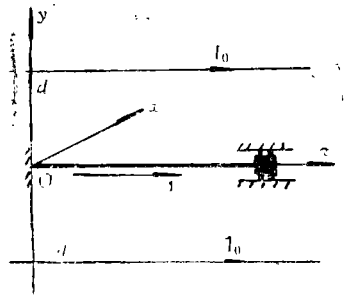


图1 载电流的夹紧杆

$$\left. \begin{aligned} N(s) &= N_1(s)\mathbf{d}_1 + N_2(s)\mathbf{d}_2 + N_3(s)\mathbf{d}_3 \\ M(s) &= M_1(s)\mathbf{d}_1 + M_2(s)\mathbf{d}_2 + M_3(s)\mathbf{d}_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

假定材料是线弹性的，则有本构关系

$$M_1 = D_1 u_1, \quad M_2 = D_2 u_2, \quad M_3 = D_3 u. \quad (2.6)$$

杆的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} N' + F &= 0 \\ M' + \mathbf{r}' \times F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

设杆的横截面为圆，并且  $s=0$  的端面为在  $\mathbf{r}=0$  处固定夹紧，而另一端  $s=L$  为沿  $Oz$  轴的可移夹紧，且不受扭矩的作用。于是，边界条件为

$$\left. \begin{aligned} x=y=z=0, \quad x'=y'=\alpha=0, \quad s=0 \\ x=y=0, \quad N \cdot \mathbf{k}=0, \quad x'=y'=M_3=0, \quad s=L \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

注意到  $D_1 = D_2 = D$ ，引入无量纲量和记号

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{s}{L}, \quad (\bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s}), \bar{z}(\bar{s})) = \frac{1}{L} (x(s), y(s), z(s)), \\ (\bar{u}_1(\bar{s}), \bar{u}_2(\bar{s})) &= L(u_1(s), u_2(s)), \quad N(\bar{s}) = \frac{L^2}{D} N_3(s), \\ \lambda &= \frac{\mu_0 I I_0 L^2}{\pi D}, \quad \bar{d} = \frac{d}{L}. \end{aligned}$$

仍用  $s, x, y, z, u_1, u_2, d$  记  $\bar{s}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{d}$ ，可得如下无量纲的边值问题

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \frac{x'y'' - x''y'}{1+z'} &= 0 \\ u_2'' - u_2 N - \lambda f_1 &= 0 \\ u_1'' - u_1 N + \lambda f_2 &= 0 \\ N' + (u_1 u_1' + u_2 u_2') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 < s < 1) \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' - \frac{x'z''}{1+z'} \\ y' - \frac{y'z''}{1+z'} \end{pmatrix} \quad (0 < s < 1) \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x=y=x'=y'=\alpha=0 & \quad (s=0) \\ x=y=x'=y'=N=0 & \quad (s=1) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

其中  $z = \int_0^s (1-x'^2-y'^2)^{\frac{1}{2}} ds$ ，而  $\lambda$  为电流参数，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{[x^2+(y+d)^2][x^2+(y-d)^2]} \\ &\cdot \begin{pmatrix} y(d^2-x^2-y^2)(p_2 \cos \alpha + p_1 \sin \alpha) - x(d^2+x^2+y^2)(p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha) \\ y(d^2-x^2-y^2)(p_1 \cos \alpha - p_2 \sin \alpha) + z(d^2+z^2+y^2)(p_1 \sin \alpha - p_2 \cos \alpha) \end{pmatrix} \\ p_1 &= 1 - \frac{x'^2}{1+z'}, \quad p_2 = \frac{x'y'}{1+z'}, \quad p_3 = 1 - \frac{y'^2}{1+z'}. \end{aligned}$$

显然, 对任意的 $\lambda$ , 边值问题(2.9)~(2.11)有平凡解

$$x(s)=y(s)=\alpha(s)=u_1(s)=u_2(s)=N(s)=0 \quad (2.12)$$

它对应于杆的自然状态, 称为未屈曲状态.

### 三、线性化问题和临界电流

边值问题(2.9)~(2.11)在平凡解(2.12)处的线性化问题为

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= 0, \quad N'_1 = 0 \\ v''_2 + \lambda \frac{x_1}{d^2} &= 0, \quad v_2 = x''_1 \\ v''_1 + \lambda \frac{y_1}{d^2} &= 0, \quad v_1 = -y''_1 \end{aligned} \right\} \quad (0 < s < 1) \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 = y_1 = x'_1 = y'_1 = \alpha_1 &= 0 \quad (s=0) \\ x_1 = y_1 = x'_1 = y'_1 = N_1 &= 0 \quad (s=1) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

此边值问题可以化为两个非耦合的特征值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 x_1}{ds^4} + \lambda \frac{x_1}{d^2} &= 0 \quad (0 < s < 1) \\ x_1 = x'_1 &= 0 \quad (s=0, 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 y_1}{ds^4} - \lambda \frac{y_1}{d^2} &= 0 \quad (0 < s < 1) \\ y_1 = y'_1 &= 0 \quad (s=0, 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

并且  $\alpha_1(s) = N_1(s) = 0, v_2 = x''_1, v_1 = -y''_1$ .

不难得到, 边值问题(3.4)只有正特征值, 且特征方程为

$$g(\mu) = \cos \mu - \frac{1}{\operatorname{ch} \mu} = 0 \quad (3.5)$$

其中  $\mu = (d^{-2}\lambda)^{\frac{1}{4}} > 0$ .

容易证明, 在 $(0, \pi)$ 中(3.5)无解, 而在 $(k\pi, (k+1)\pi) (k=1, 2, 3, \dots)$ 中, (3.5)有唯一解 $\mu_k^*$ , 并且

$$g'(\mu_k^*) \neq 0, \quad \mu_k^* \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k \rightarrow \infty)$$

相应的特征函数为

$$y_1^* = C_1 \operatorname{ch} \mu_k^* s + C_2 \operatorname{sh} \mu_k^* s + C_3 \cos \mu_k^* s + C_4 \sin \mu_k^* s \quad (3.6)$$

其中  $C_3 = -C_1, C_4 = -C_2$ , 而 $C_1, C_2$ 为齐次方程

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{ch} \mu_k^* - \cos \mu_k^*) C_1 + (\operatorname{sh} \mu_k^* - \sin \mu_k^*) C_2 &= 0 \\ (\operatorname{sh} \mu_k^* + \sin \mu_k^*) C_1 + (\operatorname{ch} \mu_k^* - \cos \mu_k^*) C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

的非零解. 由于 $\operatorname{ch} \mu_k^* - \cos \mu_k^* \neq 0$ , 所以, (3.7)只有一个线性无关的解, 即特征函数空间是一维的.

至此, 有如下结论

**定理3.1** 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \dots, \lambda_n, \dots$ 是边值问题(3.4)的特征值( $\lambda_n = d^2 \mu_n^{*4}$ ), 相应的特征函数

为 $\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s), \dots, \phi_n(s), \dots$ 。则边值问题(3.1), (3.2)的特征值为

$$\pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \pm \lambda_3, \dots, \pm \lambda_n, \dots,$$

并且当特征值为 $\lambda_n$ 时, 特征函数为

$$(x_1, y_1, \alpha_1, v_1, v_2, N_1) = (0, \phi_n, 0, -\phi_n'', 0, 0),$$

而当特征值为 $-\lambda_n$ 时, 特征函数为

$$(x_1, y_1, \alpha_1, v_1, v_2, N_1) = (\phi_n, 0, 0, 0, \phi_n'', 0).$$

表1给出了特征方程(3.5)的前六个根 $\mu_k^*$ 以及近似值 $\mu_k^a = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ 。可见,  $\mu_k^a$ 给出了 $\mu_k^*$ 的很好近似。

表1 特征方程(3.5)的根

$k$	1	2	3	4	5	6
$\mu_k^*$	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372	17.2788	20.4204
$\mu_k^a$	4.71239	7.85398	10.9956	14.1372	17.2788	20.4204

### 四、平面分支解的存在性

设 $\lambda^* = \lambda_n$ 是边值问题(3.1), (3.2)的特征值, 相应的特征函数为

$$(x_1^*, y_1^*, \alpha_1^*, v_1^*, v_2^*, N_1^*) = (0, \phi_n, 0, -\phi_n'', 0, 0) \tag{4.1}$$

并且, 
$$\int_0^1 \phi_n^2 ds = 1.$$

作变换

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \varepsilon \tilde{\alpha}, \quad x = \varepsilon \tilde{x}, \quad y = \varepsilon(\tilde{y} + y_1^*), \quad N = \varepsilon \tilde{N} \\ u_1 &= \varepsilon(\tilde{u}_1 + u_1^*), \quad u_2 = \varepsilon \tilde{u}_2, \quad \lambda = \lambda^* + \tilde{\lambda} \end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

其中  $\varepsilon$  为小参数, 定义为

$$\varepsilon = \int_0^1 y y_1^* ds \tag{4.3}$$

将变换(4.2)代入边值问题(2.9)~(2.11)中, 可得关于 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{N}, \tilde{\lambda}$ 的边值问题。此边值问题在 $\varepsilon=0$ 时有零解

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{N}, \tilde{\lambda}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{4.4}$$

且在此解处的线性化问题只有零解, 由隐函数定理知, 该边值问题在 $\varepsilon=0$ 附近有唯一解, 并且当 $\varepsilon=0$ 时, (4.4)成立。这样, 证明了边值问题(2.9)~(2.11)的平凡解(2.12)在 $\lambda=\lambda^*$ 处必发生分支, 并且分支解是唯一的。

若令 $x(s) \equiv 0$ , 则边值问题(2.9)~(2.11)变为

$$\left. \begin{aligned} u_1'' - u_1 N + \frac{\lambda y}{d^2 - y^2} &= 0 \\ N' + u_1 u_1' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 < s < 1) \tag{4.5}$$

$$\left. \begin{aligned} y'' + u_1 \sqrt{1 - y'^2} &= 0 \\ y = y' &= 0 \quad (s=0) \\ y = y' = N &= 0 \quad (s=1) \end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

且  $\alpha(s) = u_2(s) = 0$ .

此边值问题有平凡解  $(y, u_1, N, \lambda) = (0, 0, 0, \lambda)$ . 在此平凡解处的线性化问题为边值问题 (3.4), 并且  $N_1 = 0$ . 所以, 其线性化问题的特征值为  $\lambda_n$ , 相应的特征函数为  $(y_1, v_1, N_1) = (\phi_n, -\phi_n'', 0)$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{令 } y(s; \varepsilon) &= \varepsilon(\tilde{y}(s; \varepsilon) + \phi_n(s)), \quad N(s; \varepsilon) = \varepsilon\tilde{N}(s; \varepsilon) \\ u_1(s; \varepsilon) &= \varepsilon(\tilde{u}_1(s; \varepsilon) - \phi_n''(s)), \quad \lambda(\varepsilon) = \lambda_n + \tilde{\lambda}(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

其中  $\varepsilon$  为小参数, 定义为

$$\varepsilon = \int_0^1 y(s; \varepsilon) \phi_n(s) ds \quad (4.8)$$

代入 (4.5), (4.6) 和 (4.8) 中, 得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}'' + \tilde{u}_1 \sqrt{1 - (\tilde{y}' + \phi_n')^2 \varepsilon^2} + \phi_n'' (1 - \sqrt{1 - (\tilde{y}' + \phi_n')^2 \varepsilon^2}) &= 0 \\ \tilde{u}_1'' - (\tilde{u}_1 - \phi_n'') \tilde{N} \varepsilon + \frac{\lambda_n \tilde{y} + \tilde{\lambda}(\tilde{y} + \phi_n)}{d^2 - (\tilde{y} + \phi_n)^2 \varepsilon^2} + \frac{\lambda_n \phi_n (\tilde{y} + \phi_n)^2 \varepsilon^2}{d^2 [d^2 + (\tilde{y} + \phi_n)^2 \varepsilon^2]} &= 0 \quad (0 < s < 1) \\ \tilde{N}' + (\tilde{u}_1 - \phi_n'') (\tilde{u}_1' - \phi_n''') \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\int_0^1 \phi_n \tilde{y} ds = 0 \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y} = \tilde{y}' &= 0 \quad (s=0) \\ \tilde{y} = \tilde{y}' = \tilde{N} &= 0 \quad (s=1) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

同样可以证明, 边值问题 (4.9) ~ (4.11) 在解  $(\tilde{y}, \tilde{u}_1, \tilde{N}, \tilde{\lambda}, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0)$  附近有唯一解. 这样, 由分支解的唯一性知, 边值问题 (2.9) ~ (2.11) 的平凡解在  $\lambda_n$  处的分支解必具有形式

$$(x, y, \alpha, u_1, u_2, N, \lambda) = (0, y, 0, u_1, 0, N, \lambda) \quad (4.12)$$

即分支解在  $Oyz$  平面内. 同样的分析可以得到边值问题 (2.9) ~ (2.11) 在  $-\lambda_n$  处的分支解必具有形式

$$(x, y, \alpha, u_1, u_2, N, \lambda) = (x, 0, 0, 0, u_2, N, \lambda) \quad (4.13)$$

即分支解在  $Oxy$  平面内. 至此, 证明了定理

**定理 4.1** 边值问题 (2.9) ~ (2.11) 的平凡解 (2.12) 在任一特征值  $\pm \lambda_n$  处必发生分支, 分支解唯一. 并且在  $\lambda_n$  处的分支解在  $Oyz$  平面内, 而在  $-\lambda_n$  处的分支解在  $Oxz$  平面内. 即分支解总是平面的.

## 五、分支解的数值计算

由前面知, 从  $\lambda_n$  分支的分支解在  $Oyz$  平面内, 即只需求解边值问题 (4.5), (4.6). 由于此边值问题在分支点处的 Frechet 导算子奇异, 所以, 通常的数值方法不适用于此处解支的计算. 为此, 我们求解边值问题 (4.9) ~ (4.11). 令

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_1 = \tilde{y}, \quad \tilde{Y}_2 = \tilde{y}', \quad \tilde{Y}_3 = \tilde{u}_1, \quad \tilde{Y}_4 = \tilde{u}_1' \\ \tilde{Y}_5 = \tilde{N}, \quad \tilde{Y}_6 = \tilde{\lambda}, \quad \tilde{Y}_7 = \int_0^1 \phi_n \tilde{y} ds \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

记  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \tilde{Y}_4, \tilde{Y}_5, \tilde{Y}_6, \tilde{Y}_7)^T$ ,

$$\mathcal{F}(s; \bar{Y}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_2 \\ -\bar{Y}_3 \sqrt{1 - (\bar{Y}_2 + \phi_n')^2 \varepsilon^2} - \phi_n'' (1 - \sqrt{1 - (\phi_n' + \bar{Y}_2)^2 \varepsilon^2}) \\ \bar{Y}_4 \\ (\bar{Y}_3 - \phi_n'') \bar{Y}_5 \varepsilon \frac{\lambda_n \bar{Y}_1 + \bar{Y}_6 (\bar{Y}_1 + \phi_n)}{d^2 - (\bar{Y}_1 + \phi_n)^2 \varepsilon^2} - \frac{\lambda_n \phi_n (\bar{Y}_1 + \phi_n)^2 \varepsilon^2}{d^2 [d^2 + (\bar{Y}_1 + \phi_n)^2 \varepsilon^2]} \\ -(\bar{Y}_3 - \phi_n'') (\bar{Y}_4 - \phi_n'') \varepsilon \\ 0 \\ \bar{Y}_1 \phi_n \end{pmatrix},$$

则边值问题(4.9)~(4.11)可以写成标准形式

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}' &= \mathcal{F}(s; \bar{Y}, \varepsilon) \quad (0 < s < 1) \\ (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_7) &= (0, 0, 0) \quad (s=0) \\ (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_5, \bar{Y}_7) &= (0, 0, 0, 0) \quad (s=1) \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

对不同的 $\varepsilon$ , 利用数值方法求解(5.2), 则由(4.7)可得临界值 $\lambda_n$ 附近的分支解, 这样, 可完成解支的转接问题.

为了得到分支解的大范围响应, 并克服可能出现的极限点型奇性, 采用以解支曲线弧长为参数的延拓算法<sup>[13]</sup>求解边值问题(4.5), (4.6). 至此, 我们得到杆过屈曲状态的挠度, 内力和内力矩的分布.

用常微分方程的打靶法, 数值计算了从特征值 $\lambda_1$ 分支的分支解, 得到了杆过屈曲状态的最大挠度  $w_{\max} = u(-\frac{1}{2})$  以及最大弯矩  $M_{\max} = \frac{L}{D} M_1(0) = u_1(0)$  与电流参数 $\lambda$ 的特征曲线(图2, 3), 而图4给出了 $d=0.35$ 、不同 $\lambda$ 值时的杆的挠度分布. 类似地, 对从 $-\lambda_1$ 分支的在平面 $Oxy$ 内的分支解进行了数值计算, 其结果示于图5~图7中.

### 六、讨论与结果

当杆中电流 $I$ 与刚性导线中电流 $I_0$ 同向时, 即 $\lambda > 0$ 时, 杆的屈曲发生在特征值 $\lambda_1$ 处, 并且屈曲状态在 $Oyz$ 平面内. 由图2知, 这时, 过屈曲状态的性态依距离 $d$ 的不同有着本质的变化. 当 $d$ 较小时, 过屈曲状态是次临界的, 而随着 $d$ 的增大, 其状态变为超临界的. 因此, 对于次临界的过屈曲状态, 为了使结构有能力继续承载原电流, 必须增加杆的约束, 以提高临界值. 对于超临界的屈曲, 根据屈曲后仍有继续承载电流的能力, 但随着电流的提高, 将发生极限点型的失稳, 从而导致结构的失效. 当电流 $I$ 与 $I_0$ 反向时, 即 $\lambda < 0$ 时, 杆的屈曲发生

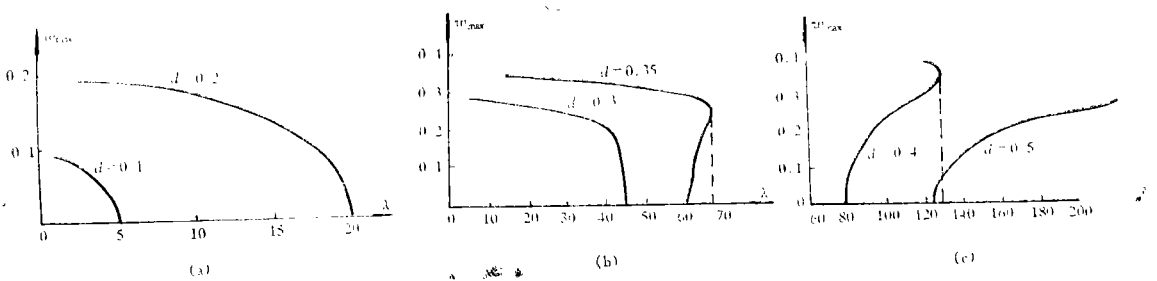


图2 从 $\lambda_1$ 处分支出去的最大挠度 $w_{\max}$ 与 $\lambda$ 的特征关系

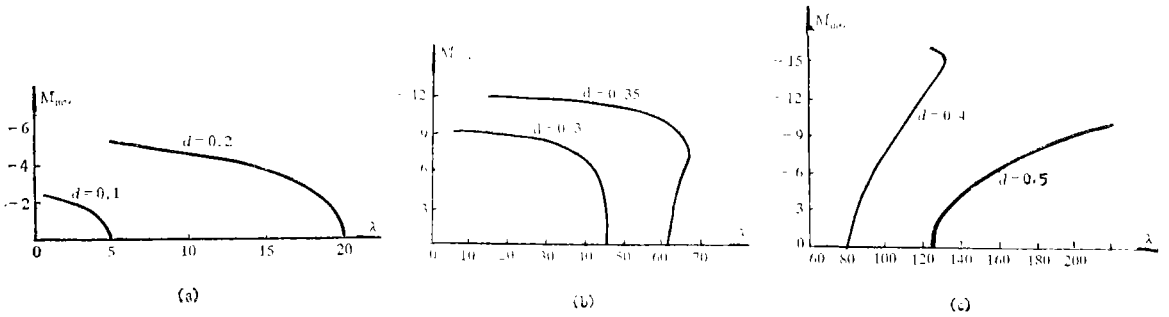


图3 从 $\lambda_1$ 处分支出去的最大弯矩 $M_{max}$ 与 $\lambda$ 的特征关系

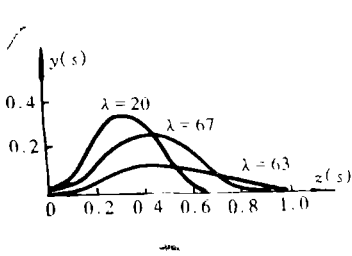


图4  $d=0.35$ 时, 从 $\lambda_1$ 分支出的挠度曲线

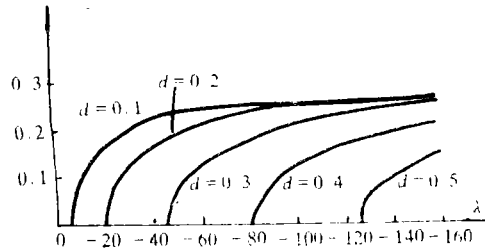


图5 从 $-\lambda_1$ 分支出的最大挠度 $w_{max}$ 与 $\lambda$ 的特征关系

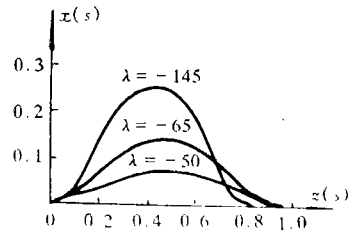
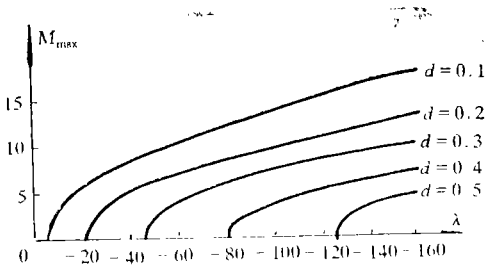


图6 从 $-\lambda_1$ 处分支出去的最大弯矩 $M_{max}$ 与 $\lambda$ 的特征关系 图7  $d=0.3$ 时, 从 $-\lambda_1$ 处分支出去的挠度曲线

在特征值 $-\lambda_1$ 处, 并且屈曲状态在 $Oxz$ 平面内。这时, 过屈曲状态是超临界的, 且没有极限点。这两种屈曲状态的差异在于: 当电流同向时, 磁体力为 $f_y = \frac{\lambda y}{d^2 - y^2}$ , 而当电流反向时, 磁体力为 $f_z = \frac{\lambda x}{d^2 + x^2}$ 。因此, 当 $y \rightarrow \pm d$ 时,  $f_y \rightarrow \infty$ 。这意味着只需要较小的电流, 亦可产生较大的磁力。从而维持平衡, 故出现了极限点型的失稳和次临界屈曲。另外, 从计算中可以看到, 与轴压杆的失稳不同, 此时杆的轴力为拉伸力, 并且有较大的变化。

参 考 文 献

[1] H. H. Woodson and J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, John Wiley and Sons, New York (1968).  
 [2] P. Wolfe, Equilibrium states of an elastic conductor in a magnetic field: a Paradigm of bifurcation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278 (1983), 377-387.



- [ 3 ] P. Wolfe, Bifurcation theory of an elastic conducting wires subjected magnetic forces, *J. Elasticity*, 23(2~3) (1990), 201—217.
- [ 4 ] T. J. Healey, Large rotating states of a conducting elastic wire in a magnetic field, subtle symmetry and multiparameter bifurcation, *J. of Elasticity*, 24 (1990), 211—227.
- [ 5 ] T. I. Seidman and P. Wolfe, Equilibrium states of an elastic conductig rod in a magnetic field, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 102(4) (1988), 307—329.
- [ 6 ] P. Wolfe, Bifurcation theory of an elastic conducting rod in a magnetic field, *Quart Mech. Appl. Math.*, 41(2) (1988), 265—279.
- [ 7 ] P. Wolfe, Bifurcation theory of a conducting rod subjected to magnetic forces, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 25(5) (1990), 597—204.
- [ 8 ] S. S. Antman, Onlinary differential equations of one dimensional nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 61 (1976), 307—393.
- [ 9 ] E. Bujano, G. Geymoat and T. Poston, Post-buckling behaviour of nonlinear hyperelastic thickrod with cross-section invariant under the dihedral group  $D_n$ , *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89 (1985), 307—388.
- [10] 朱正佑、程昌钧, 《分支问题的数值计算方法》, 兰州大学出版社, 兰州 (1989).

## Nonlinear Stability Analysis of a Clamped Rod Carrying Electric Current

Cheng Changjun

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,  
Shanghai 200072; Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou  
730000, P. R. China)

Yang Xiao

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

### Abstract

This paper is devoted to the analysis of the nonlinear stability of a clamped rod carrying electric current in the magnetic field which is produced by the current flowing in a pair of infinitely long parallel rigid wires. The natural state of the rod is in the plane of the wires and is equidistant from them. Firstly under the assumption of spatial deformation, the governing equations of the problem are derived, and the linearized problem and critical currents are discussed. Secondly, it is proved that the buckled states of the rod are always in planes. Finally, the global responses of the bifurcation problem of the rod are computed numerically and the distributions of the deflections, axial forces and bending moments are obtained. The results show that the buckled states of the rod may be either supercritical or subcritical, depending on the distance between the rod and the wires. Furthermore, it is found that there exists a limit point from the buckled state of the elastic compressive rods.

**Key words** magnetoelasticity, bifurcation, limit point, numerical method, straight rod carrying electric current.