

关于结构弯扭屈曲理论的修正

鄂国康¹

(戴世强推荐, 1995年8月1日收到)

摘 要

本文讨论和指出了目前结构弯扭屈曲理论中所存在的问题, 从而得出结论: 目前的理论限制了结构的弯扭变形过程, 使得变形过程受制于线位移与转角位移按一定的先后顺序产生. 为解决这一问题, 提出了一种描述结构实际弯扭屈曲过程的新思路, 从而导出了新的几何关系, 建立了新的势能变分方程和新的中性平衡微分方程. 实例说明了修正后的理论与原理论的不同.

关键词 弯扭屈曲 几何方程 转角 次序

一、引 言

1899年Michell首先发表了关于解决弯扭屈曲问题的文章^[1], 他考虑的是一个窄矩形截面梁的侧向屈曲问题. 后来Timoshenko对这一工作进行了扩展, 考虑了工字形截面中的翘曲作用^[2]. 继Timoshenko之后, Wagner考虑了具不对称截面或单轴对称截面结构的弯扭屈曲问题^[4], 从而形成了目前所普遍采用的一般理论^{[3], [5], [11]}. 自Wagner至今, 所有关于结构弯扭屈曲问题的研究均基于该一般理论^[6~13].

弯扭屈曲结构的位移如图1所示.

X 和 Y 轴分别表示弯扭杆件横截面上的两个主轴, Z 轴表示中心轴, 坐标原点在横截面的中心. 剪切中心为 $S(x_0, y_0)$. 弯扭杆件的横截面绕垂直于横截面的剪切中心轴的转角记

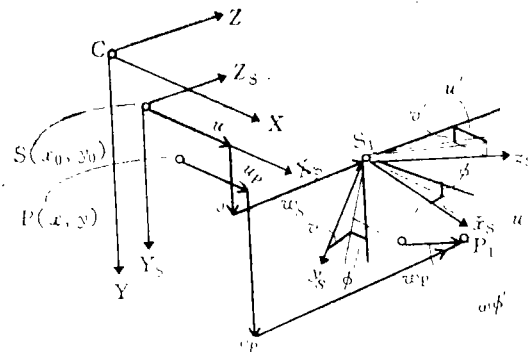


图1 位移与转角示意图

1 澳门大学科技学院, 澳门 3001*

为 ϕ 。沿 X_s 、 Y_s 和 Z_s 轴方向剪切中心的位移分别记为 u 、 v 和 w_s 。在目前普遍采用的理论中, 弯扭杆件横截面上任一点 $P(x, y)$ 的位移被表示为

$$\left. \begin{aligned} u_P &= u - \phi(y - y_0), \quad v_P = v + \phi(x - x_0) \\ w_P &= w_s - u'[x - x_0 - \phi(y - y_0)] - v'[y - y_0 + \phi(x - x_0)] + \omega\phi' \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

从上式可导出在中性轴不可压缩条件下 P 点的正应变为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= (-xu'' - yv'' + \omega\phi'') + [u'^2 + v'^2 + (x^2 + y^2)\phi'^2]/2 - x_0v'\phi' + y_0u'\phi' \\ &\quad - x(x_0\phi'^2 + \phi v'') + y(-y_0\phi'^2 + \phi u'') + (x^2 + y^2)\phi'^2/2 \end{aligned} \quad (1.2a)$$

式中

$$\omega = \frac{1}{A} \left\{ \int_A \left\{ \int_0^s \rho_0 ds \right\} t ds - \int_0^s \rho_0 ds \right\} \quad (1.2b)$$

式(1.2)中 A 是横截面面积, ρ_0 是剪切中心到薄壁杆件横截面上过中厚度点切线的距离, s 是中厚度线距离, ω 是翘曲位移, $()'$ 表示 $()$ 关于 z 的导数。

基于式(1.2a), 可导出具单轴对称截面的结构在弯矩 M_x 和轴力 N 作用下的弯扭屈曲势能变分方程如下^[11]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_L (EI_y u''^2 + EI_o \phi'^2 + GJ \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_L N [u'^2 + (r_0^2 + y_0^2) \phi'^2 + 2y_0 u' \phi'] dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_L M_x (2\phi u'' + \beta_s \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_L q_y (y_0 - y_0) \phi^2 dz + \frac{1}{2} \sum Q_y (y_0 - y_0) \phi^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中 Q_y 和 q_y 分别是沿 y 轴方向作用于梁一柱结构上的集中和分布荷载, y_0 和 y_0 分别是荷载 Q_y 和 q_y 到中心轴的距离, E 是弯曲弹性模量, G 是剪切弹性模量, I_x , I_y , J 和 I_o 分别是截面的惯性矩、惯性极矩和翘曲常数, $r_0^2 = (I_x + I_y)/A$, A 是梁一柱结构的横截面面积,

$$\beta_s = \int_A y(x^2 + y^2) dA - 2y_0$$

通过对式(1.3)进行变分运算, 可导出屈曲位置的平衡微分方程如下^[11]:

$$(EI_y u'')'' = [N(u' + y_0 \phi')] - (M_x \phi'') \quad (1.4a)$$

$$(EI_o \phi'')'' - (GJ \phi')' = [N(r_0^2 + y_0^2) \phi']' + (Ny_0 u')' - M_x u'' + (M_x \beta_s \phi')' \quad (1.4b)$$

一旦设定了位移 u 和扭转角 ϕ 的形函数, 就可由式(1.3)或式(1.4)求得屈曲临界荷载。目前的结构弯扭屈曲理论正是基于式(1.1)、(1.2)、(1.3)和(1.4)。

二、目前理论中存在的问题

在以下分析中, 假设 u 、 v 和 ϕ 为小变形量。

如果定义原剪切中心轴, 即变形前的剪切中心轴, 为横截面绕其转动角度 ϕ 的轴, 定义位移 u 、 v 分别为横截面上剪切中心沿 X_s 、 Y_s 轴方向的位移, 那么根据截面转角产生的先后次序, 横截面上任一点 $P(x, y)$ 的位移大致可用两种途径求得。第一种途径是, 横截面先绕原剪切中心轴转动 ϕ , 然后再分别绕 X_s 、 Y_s 轴转动 $-v'$ 和 u' 。第二种途径是, 横截面先绕 X_s 、 Y_s 轴分别转动 $-v'$ 和 u' , 然后再绕原剪切中心轴转动 ϕ 。第一种途径的转动次序是: ϕ , u' , v' ; 第二种途径的转动次序是: u' , v' , ϕ 。有趣的是, 不同的转动次序所导出的 $P(x, y)$ 点的位移也不同。下面分别讨论之。

1. 如果转动次序为: ϕ, u', v' , 则变形后 $P(x, y)$ 点的坐标为

$$X_P = U + T_v T_u T_\phi (X - X_0) + X_0 \quad (2.1a)$$

式中 X_P 是变形后点 P 的坐标矢量; X_0 是剪切中心在坐标系 $OXYZ$ 中的坐标矢量; T_u, T_v 和 T_ϕ 相应于转角 $u', -v'$ 和 ϕ 的坐标转换矩阵. 式 (2.1a) 用到了小变形假设. 如果仅保留到二次项, 则这些坐标转换矩阵及坐标矢量可表示为:

$$\left. \begin{aligned} X_P &= \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}, X = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, X_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_s \end{Bmatrix} \\ T_u &= \begin{Bmatrix} 1-u'^2/2 & 0 & u' \\ 0 & 1 & 0 \\ -u' & 0 & 1-u'^2/2 \end{Bmatrix}, T_v = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-v'^2/2 & v' \\ 0 & -v' & 1-v'^2/2 \end{Bmatrix} \\ T_\phi &= \begin{Bmatrix} 1-\phi^2/2 & -\phi & 0 \\ \phi & 1-\phi^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.1b)$$

在下面的讨论中, 用 $f_{..}(\varepsilon^2; u', v', \phi)$ 表示 u', v' 和 ϕ 的乘积及其高次项乘积的某一代数式.

将式 (2.1b) 代入 (2.1a) 可得出如下变形后 P 点的坐标:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x + u - \phi(y - y_0) + u'z + f_{a1}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(x - x_0) + f_{a2}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(y - y_0) \\ y_P &= y + v + \phi(x - x_0) + v'z + f_{a3}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(x - x_0) + f_{a4}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(y - y_0) \\ z_P &= z + w_s - u'[x - x_0 - \phi(y - y_0)] - v'[y - y_0 + \phi(x - x_0)] + \omega\phi' \end{aligned} \right\} \quad (2.1c)$$

这里 $z=0$. 如果 f_{a1}, f_{a2}, f_{a3} 和 f_{a4} 被略去, 式 (2.1c) 就是目前理论的基础.

2. 如果转动次序为: u', v', ϕ , 则变形后 $P(x, y)$ 点的坐标为

$$X_P = U + T_\phi T_v T_u (X - X_0) + X_0 \quad (2.2a)$$

将式 (2.1b) 代入 (2.2a) 可得变形后 P 点的坐标如下:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x + u - \phi(y - y_0) + u'z + f_{b1}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(x - x_0) + f_{b2}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(y - y_0) \\ y_P &= y + v + \phi(x - x_0) + v'z + f_{b3}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(x - x_0) + f_{b4}(\varepsilon^2; u', v', \phi)(y - y_0) \\ z_P &= z + w_s - u'(x - x_0) - v'(y - y_0) + \omega\phi' \end{aligned} \right\} \quad (2.2b)$$

式 (2.2b) 不同于式 (2.1c). $f_{a..}$ 通常不同于 $f_{b..}$.

以上似是而非的奇怪现象实际上是由目前理论对结构弯扭屈曲过程的错误描述或误解造成的.

当转动轴的定义给定之后, 不同的截面转动次序导致不同的结果, 这种现象说明, 结构的屈曲是与转动次序有关的. 换句话说, 目前的理论仅适用于某一转动次序. 按以上分析, 它仅适用于 ϕ, u', v' 或 ϕ, v', u' 这样的次序. 总之, 先产生绕原剪切中心轴的转动, 再产生绕其它轴的转动. 这不符合结构弯扭屈曲的实际行为. 实际上, 屈曲过程是与转动的产生次序无关的, 也就是说在屈曲的发生过程中各种转动是同时发生和发展的, 并在该过程中相互作用. 因为目前的理论隐含地将一个转动次序赋予了屈曲过程, 从而意味着变形量 ϕ, u', v' 或 ϕ, u, v 是在一个一个地产生, 而它们之间的相互作用没有被正确地考虑. 这些问题就是本文下面要解决的.

三、对几何方程的修正

从以上讨论可知,问题在于人们对结构弯扭屈曲过程的误解和错误描述,为了解决这样的问题,必须找到一种方法使得位移 u, v ,继而转角 u', v' 和转角 ϕ 同时发生与发展这一物理事实用数学手段描述出来,描述的结果反映在对变形后 $P(x, y)$ 点坐标的正确表达上。否则,无论如何定义 u, v 和 ϕ ,上述矛盾均无法回避。

在下面的讨论中,不再采用小变形假设,小变形假设只作为一种特殊情况。

开始解决问题之前,首先要给出 u, v 和 ϕ 的定义,然后找寻一种数学方法来描述 u', v' 和 ϕ 的发展过程,使得 u', v' 和 ϕ 同时发生与发展,从而使以后导出的结果与 u', v' 和 ϕ 的发生与发展次序无关。

横截面转角 ϕ 定义为横截面绕剪切中心轴的转角。位移 u 和 v 分别定义为横截面剪切中心沿 X_s, Y_s 轴方向的位移。在变形过程中,剪切中心在移动,从而剪切中心轴也在移动,这里定义,剪切中心轴为通过剪切中心且平行于变形前剪切中心轴的轴,记之为 z_s 。在变形过程中,原点总是在剪切中心且分别平行于 X_s, Y_s 轴的轴分别被记为 x_s, y_s 轴。在变形过程中,原点总是在截面中心且分别平行于 X, Y, Z 轴的轴被记为 x, y, z 轴。显然 x_s, y_s, z_s 和 xyz 分别构成了直角坐标系,且 $u', -v'$ 分别是横截面绕 y_s 和 x_s 轴转角的正切。 $\phi, -v'$ 和 u' 的发展分别是从0到 $\phi, 0$ 到 $-v'$ 和0到 u' 。将每一区间 $[0, \phi], [0, -v']$ 和 $[0, u']$ 分别分成 n 个子区间,每一子区间的长度分别为 $\phi/n, -v'/n$ 和 u'/n 。假设剪切中心位移 u, v 和截面转角 ϕ 同时经过 n 步达到最终值,每一步的增值分别为 $\phi/n, -v'/n$ 和 u'/n 。为了不失一般性,第一步不考虑 $\phi/n, -v'/n$ 和 u'/n 的发展顺序。在第一步之后,各转角分别从零增到了 $\phi/n, -v'/n$ 和 u'/n 。因为对较大的 n 值, $\phi/n, -v'/n$ 和 u'/n 均很小,故参照式(2.1c)或(2.2b),暂不考虑翘曲位移,第一步后 $P(x, y)$ 点的坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x_{P1} &= x + \frac{u}{n} - \frac{1}{n} \phi (y - y_0) + u' z + \frac{1}{n^2} f_1(u', v', \phi) (x - x_0) + \frac{1}{n^2} f_2(u', v', \phi) (y - y_0) \\ y_{P1} &= y + \frac{v}{n} + \frac{1}{n} \phi (x - x_0) + v' z + \frac{1}{n^2} f_3(u', v', \phi) (x - x_0) + \frac{1}{n^2} f_4(u', v', \phi) (y - y_0) \\ z_{P1} &= z + \frac{w_s}{n} - \frac{1}{n} u' [x - x_0 - \frac{\alpha}{n} \phi (y - y_0)] - \frac{1}{n} v' [y - y_0 + \frac{\alpha}{n} \phi (x - x_0)] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中 α 是反映式(2.1c)和(2.2b)差别的参数, f_1, f_2, f_3 和 f_4 是 u', v', ϕ 的乘积及其高次项乘积的代数式。任意参数 α 及 f_1, f_2, f_3 和 f_4 项的引入是为了表明式(2.1c),式(2.2b)或由其它转动次序所导出的变形后坐标表达式均可用于下面的推导,因为不同的转动次序仅能影响到二次及二次以上项的不同。式(3.1)可以用下式表示

$$X_{P1} = \frac{U}{n} + T_n (X - X_0) + X_0 = \frac{U}{n} + \left(I + \frac{1}{n} T_1 + \frac{1}{n^2} T_2 \right) (X - X_0) + X_0 \quad (3.2)$$

式中矩阵 $T_n = T(u'/n, v'/n, \phi/n)$; 矩阵 T_2 的元素是 u', v', ϕ 的乘积及其高次项乘积的代数式;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\phi & u' \\ \phi & 0 & v' \\ -u' & -v' & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$X_{P_1} - X_0 - U/n$ 是由于横截面发生转动 u'/n , $-v'/n$ 和 ϕ/n 后引起的点 $P(x, y)$ 坐标的变化, 它实际上是矩阵算子 T_n 作用于 $X - X_0$ 的结果. 第二步之后, 由于横截面转动而引起的点 $P(x, y)$ 坐标的变化, 即 $X_{P_2} - X_0 - 2U/n$, 实际上是 T_n 作用于 $T_n(X - X_0)$ 的结果, 依次类推, 可得

$$\left. \begin{aligned} X_{P_2} &= 2U/n + T_n^2(X - X_0) + X_0 \\ X_{P_3} &= 3U/n + T_n^3(X - X_0) + X_0 \\ &\dots\dots \\ X_{P_n} &= U + T_n^n(X - X_0) + X_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

u , v 和 ϕ 同时发生意味着 $n \rightarrow \infty$, 这将使屈曲过程与 u' , v' 和 ϕ , 或 u , v 和 ϕ 的发生与发展顺序无关. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} T_1 + \frac{1}{n^2} T_2 \right)^n = \exp[T_1] \quad (3.5)$$

所以在结构产生了位移 u , v , w_s 和转角 u' , v' , ϕ 之后, 点 $P(x, y)$ 的坐标为

$$X_P = U + \exp[T_1](X - X_0) + X_0 \quad (3.6)$$

对小变形情况, X_P 可近似表达为

$$X_P = U + (I + T_1 + T_1^2/2)(X - X_0) + X_0 \quad (3.7)$$

将翘屈位移 $\omega\phi'$ 引起的坐标变化引入式(3.7)并注意 $z=0$, 最后可得点 $P(x, y)$ 的位移如下:

$$\left. \begin{aligned} u_P &= x_P - x = u - \phi(y - y_0) - (\phi^2 + u'^2)(x - x_0)/2 - u'v'(y - y_0)/2 \\ v_P &= y_P - y = v + \phi(x - x_0) - u'v'(x - x_0)/2 - (\phi^2 + v'^2)(y - y_0)/2 \\ w_P &= z_P - z = w_s - u'[x - x_0 - \phi(y - y_0)/2] - v'[y - y_0 + \phi(x - x_0)/2] + \omega\phi' \\ &= w - u'(x - \phi y/2) - v'(y + \phi x/2) + \omega\phi' \end{aligned} \right\} \quad (3.8a)$$

式中 w 是截面中心的纵向位移, 它可表示为

$$w = w_s + u'(x_0 - \phi y_0/2) + v'(y_0 + \phi x_0/2) \quad (3.8b)$$

以上推导过程与转动或位移的产生及发展顺序无关, 使得变形 ϕ , u , v , u' 和 v' 同时产生和发展, 这是与结构的弯扭屈曲这一物理行为相符合的.

点 $P(x, y)$ 处的变形后单元长度可用 u_P , v_P , 和 w_P 的变化率表达如下:

$$(1 + \varepsilon_P) dz = \sqrt{(dz + w_P' dz)^2 + (u_P' dz)^2 + (v_P' dz)^2} \quad (3.9)$$

式中 ε_P 是点 $P(x, y)$ 处的正应变. 将式(3.8a)代入式(3.9)可得点 $P(x, y)$ 处正应变的表达式如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &= (\omega' - xu'' - yv'' + \omega\phi'') + [u'^2 + v'^2 + (x_0^2 + y_0^2)\phi'^2]/2 - x_0v'\phi' + y_0u'\phi' \\ &\quad - x \left[x_0\phi'^2 + \frac{1}{2}(\phi v'' - \phi'v') \right] - y \left[y_0\phi'^2 - \frac{1}{2}(\phi u'' - \phi'u') \right] + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\phi'^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

式中略去了三次及三次以上的项.

因为几何关系是独立于材料性质的, 所以式(3.8)和(3.10)实际上适用于任何材料构成

的结构弯曲问题, 如例弹性材料、塑性材料等。

四、势能变分方程的修正

结构的总势能为 $U_T=U+V$, 其中 U 是结构的应变能, V 是荷载势能, 它们可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_L \int_A (\sigma_P \varepsilon_P + \tau_P \gamma_P) dA ds \\ V &= - \int_0^L (q_y v_q + q_z w_q) dz - \sum (Q_y v_Q + Q_z w_Q - M_z v'_M) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中 Q_z 和 q_z 分别是沿 Z 轴方向作用于结构上的集中荷载和分布荷载; σ_P , τ_P 和 γ_P 分别为 P 点的正应力、剪应力和剪应变。

变形后的平衡条件要求对所有虚位移 δu , δv , δw 和 $\delta \phi$ 满足 $\delta U_T=0$, 即满足虚功原理。

对中性平衡(即屈曲)来说, 有

$$\frac{1}{2} \delta^2 U_T = \frac{1}{2} (\delta^2 U + \delta^2 V) = 0 \quad (4.2a)$$

式中 $\delta^2 U/2$ 和 $\delta^2 V/2$ 可表达为

$$\frac{1}{2} \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_L \int_A (\delta \sigma_P \delta \varepsilon_P + \delta \tau_P \delta \gamma_P + \sigma_P \delta^2 \varepsilon_P + \tau_P \delta^2 \gamma_P) dA ds \quad (4.2b)$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = - \frac{1}{2} \int_0^L (q_y \delta^2 v_q + q_z \delta^2 w_q) dz - \sum (Q_y \delta^2 v_Q + Q_z \delta^2 w_Q - M_z \delta^2 v'_M) \quad (4.2c)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_P &= \delta w' - x \delta u'' - y \delta v'' + \omega \delta \phi'' \\ \delta \gamma_P &= \rho_0 \delta \phi', \quad \delta \sigma_P = E \delta \varepsilon_P, \quad \delta \tau_P = G \delta \gamma_P \end{aligned} \right\} \quad (4.3a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 \varepsilon_P &= \delta u'^2 + \delta v'^2 + (x_0^2 + y_0^2) \delta \phi'^2 - 2x_0 \delta v' \delta \phi' + 2y_0 \delta u' \delta \phi' - x[2x_0 \delta \phi'^2 \\ &\quad + (\delta \phi \delta v'' - \delta \phi' \delta v')] - y[2y_0 \delta \phi'^2 - (\delta \phi \delta u'' - \delta \phi' \delta u')] + (x^2 + y^2) \delta \phi'^2 \\ \delta^2 \gamma_P &= 0, \quad \sigma_P = N/A + M_z y/I_z, \quad \tau_P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3b)$$

下面分两种情况讨论。

(a) 轴压柱. 对轴压杆来说, $\sigma_P = N/A$, $M_z = q_z = Q_y = 0$, 且由式(3.8a)知 $\delta^2 w_q = \delta^2 w_Q = 0$. 假设在屈曲过程中, 截面的中心应变为零, 即假设杆件不可伸缩, 从而杆件是在不变轴压 N 作用下发生屈曲. 中心不可伸缩屈曲要求式(3.10)中的 w' 与其它变形量 u , v 和

ϕ 相比为高阶小量, 故可略去由式(4.2b)所导出的项 $\frac{1}{2} \int_L EA w'^2 dz$.

如果将屈曲变形 $\{\delta u, \delta v, \delta w, \delta \phi\}$ 记为 $\{u, v, w, \phi\}$, 则将式(4.3)代入式(4.2)可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_L (EI_y u''^2 + EI_z v''^2 + GJ \phi'^2 + EI_\omega \phi''^2) dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_L N [u'^2 + v'^2 + (r_0^2 + x_0^2 + y_0^2) \phi'^2 - 2x_0 v' \phi' + 2y_0 u' \phi'] dz = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$r_x^2 = I_z/A, \quad r_y^2 = I_y/A, \quad r_0^2 = r_x^2 + r_y^2, \quad r_0^2 = \int_A \omega^2 dA$$

式(4.4)与目前理论中相应的方程式^[11]并无差别。这说明这里对几何方程的修正并不影响轴压柱的屈曲行为。

(b) 考虑轴压 N 和弯矩 M_x 作用下的单轴对称截面结构, 此时 $x_0=0$ 。从式(3.8b)可知, $\delta^2 w_q = \delta^2 w_0 = 0$ 。由式(3.8a)可知:

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 v_M &= -(x-x_0)(\delta u' \delta v'' + \delta u'' \delta v') - 2(y_M - y_0)(\delta \phi \delta \phi' + \delta u' \delta u'') \\ \delta^2 v_q &= -(x-x_0)\delta u' \delta v' - (y_q - y_0)\delta \phi^2 \\ \delta^2 v_0 &= -(x-x_0)\delta u' \delta v' - (y_0 - y_0)\delta \phi^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式中 y_M 是外载 M_x 的作用轴到中心轴的距离。

假设在屈曲过程中, 中心轴不可伸缩及 YZ 平面内的的曲率保持为零, 从而该梁一柱结构在弯矩 M_x 及不变的轴压 N 作用下发生屈曲。在此条件下, 屈曲位移 δv 和 δw 与屈曲位移 δu 和 $\delta \phi$ 相比为高阶小量。记屈曲位移 $\{\delta u, \delta v, \delta w, \delta \phi\}$ 为 $\{u, v, w, \phi\}$, 则将式(4.3)、(4.5)代入式(4.2)可导出如下中心轴不可伸缩条件下的单轴对称截面梁一柱结构的屈曲分析基本公式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_L (EI_y u''^2 + EI_o \phi'^2 + GJ \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_L N [u'^2 + (r_0^2 + y_0^2) \phi'^2 + 2y_0 u' \phi'] dz \\ & + \frac{1}{2} \int_L M_x (\phi u'' - \phi' u' + \beta_x \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_L q_y (y_q - y_0) \phi^2 dz \\ & + \frac{1}{2} \sum [Q_y (y_0 - y_0) \phi^2 + 2M_x (y_M - y_0) \phi \phi'] = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\text{式中 } \beta_x = \int_A y(x^2 + y^2) dA / I_x - 2y_0$$

式(4.6)中的第一个划线部分不同于式(1.3)中的相应划线部分。式(4.6)中的第二个划线部分是这里新增项。式(4.6)就是结构弯扭屈曲分析问题修正的势能变分方程。

五、具单轴对称截面的梁一柱结构在屈曲位置平衡微分方程的修正

具单轴对称截面的梁一柱结构在作用于剪切中心的荷载(即 $y_q = y_0 = y_M = y_0$)作用下屈曲位置的屈曲平衡微分方程可用变分运算求得, 即, 使

$$\frac{1}{2} \delta^2 U_T = \frac{1}{2} \int_L F(z, u', u'', \phi, \phi', \phi'') dz \quad (5.1)$$

取极值的 u 和 ϕ 满足

$$-\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi''} \right) = 0 \quad (5.2)$$

由式(4.2a)、(4.6)、(5.1)和(5.2)可得

$$(EI_y u'')'' = [N(u' + y_0 \phi')] - [(M_x \phi')]' + (M_x \phi'') / 2 \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} (EI_o \phi'')'' - (GJ \phi')' &= [N(r_0^2 + y_0^2) \phi']' + (N y_0 u')' \\ &\quad - [(M_x u')]' + M_x u'' / 2 + (M_x \beta_x \phi')' \end{aligned} \quad (5.3b)$$

式(5.3)就是具单轴对称截面梁一柱结构在屈曲位置修正了的平衡微分方程。式(5.3)中的划线部分不同于(1.4)式中相应的划线项。

六、算例与比较

1. 首先考虑一个悬臂梁, 其自由端分别作用一集中弯矩 M 和集中力 P , 设 $y_P=y_M=y_0=0$, 梁横截面为双轴对称. 如图2所示.

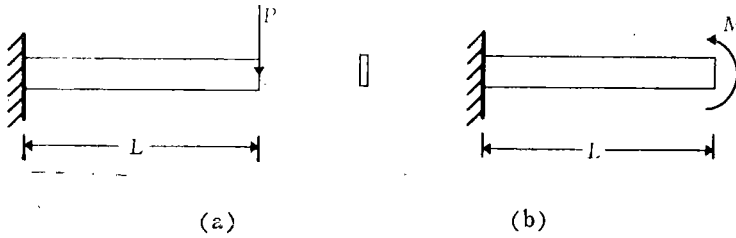


图 2

因为式(4.6)、与式(1.3)的区别仅在于划线部分, 且对双轴对称截面梁—柱结构来说 $\beta_x=0$, 所以, 如果将 u, ϕ 各采用一个形函数来近似, 则只需比较式(4.6)与式(1.3)中划线部分的积分结果即可. 对悬臂梁来说, 横向位移与扭转角可用下式近似:

$$u = u_0[1 - \cos(\pi z/2L)], \quad \phi = \phi_0[1 - \cos(\pi z/2L)]$$

式中 u_0 和 ϕ_0 分别是自由端剪切中心(这里即截面中心)的位移和截面扭转角, L 是梁的长度. 将以上两式代入式(1.3)和式(4.6)可得下列相对屈曲荷载:

$$M_{cr}/M_{cro} = 0.754, \quad P_{cr}/P_{cro} = 1.162$$

式中分子表示由本文所得方程(4.6)求得的临界屈曲荷载, 分母表示由现有(1.3)求得的临界屈曲荷载.

2. 另一个例子, 考虑一个具双轴对称截面的简支梁, 一种荷载状况是在两端各作用一弯矩 M , 另一荷载状况是在跨中作用一集中力 P . 这里仍设 $y_P=y_M=y_0=0$. 如图3所示.

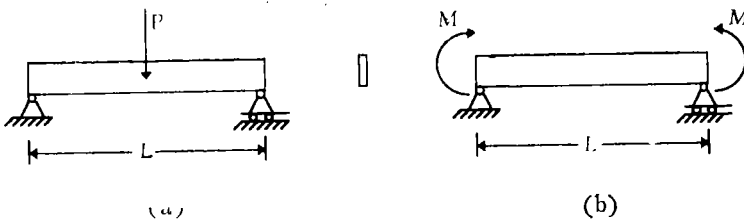


图 3

横向位移和扭转角可假设为:

$$u = u_0 \sin(\pi z/L), \quad \phi = \phi_0 \sin(\pi z/L)$$

式中 u_0 和 ϕ_0 分别是跨中截面上剪切中心(这里即截面中心)的位移和截面扭转角, L 是梁的长度. 将以上两式代入式(1.3)和式(4.6)可得下列相对屈曲荷载:

$$M_{cr}/M_{cro} = 1, \quad P_{cr}/P_{cro} = 1.203$$

式中的符号与例1中的符号有同样意义.

从以上两例可以看出, 相对于式(1.3)所得的屈曲荷载, 由式(4.6)所得的屈曲荷载会增减20%左右, 有时会保持不变.

七、结 论

1. 通过对几何方程形成过程的详尽分析, 讨论并指出了目前结构弯扭屈曲理论中所存在的问题, 从而得出结论: 目前的理论限制了结构的变形规律, 使得结构的位移和转动只能按一定的次序发生和发展, 这与实际情况不相符合。

2. 提出了用数学方法描述结构实际弯扭变形过程的新思路, 从而形成了新的几何方程并导出了结构弯扭屈曲分析的新程式。对目前的势能变分方程和平衡微分方程进行了修正, 从而得到了一组新的势能变分方程和平衡微分方程。

3. 这里得到的几何方程并未基于小变形假设, 也就是说, 几何方程(3.6)也适用于弯扭结构的大变形分析。这里的几何方程(3.6)、(3.7)和(3.8)不但可用于结构的弯扭屈曲分析, 也可用于弯扭结构其它方面的分析, 如受力分析、动力分析、弹塑性分析等。

4. 在势能变分方程中引入了新的一项, 用通常的几何方程难以将该项考虑进去。在式(4.6)中的这一项反映了由于外弯矩作用线偏离剪切中心而对总势能的影响。

5. 实例说明了用新旧方程所得临界屈曲荷载的差别。比较说明, 用新方程所得的临界屈曲荷载有时会增大, 有时会减小, 也有与旧方程所得结果相同的情况。修正的中性平衡微分方程(5.3)与原来的中性平衡微分方程(1.4)相比较可知, 如果结构的内弯矩为常数, 修正的中性平衡微分方程(5.3)就与原中性平衡微分方程相同。在此情况下, 如果假设的位移形函数正确的话, 用新旧变分方程所得的临界屈曲荷载应该相等。例2中受纯弯作用的简支梁就属这种情况。但在例1中, 对受纯弯作用的悬臂梁来说, 由新旧势能变分方程所得到的临界荷载却不相同, 由修正的势能变分方程所得的临界屈曲荷载值小于由原来的方程所得的值。这种现象是由例1中所假设的位移形函数不精确引起的。

6. 如果没有外弯矩或横向力作用于结构上, 方程(4.6)、(5.3)分别与方程(1.3) (略去与 v 有关的项)、(1.4)相一致。这说明, 修正只涉及到与弯矩和横向力有关的项。

7. 这里提出的思路和方法同样适用于曲梁的侧向稳定性分析和弯扭受力分析。不难将这里的结果进行推广用于修正曲梁的侧向稳定性分析和弯扭受力分析理论。

作者感谢上海市应用数学和力学研究所戴世强教授在百忙之中对本文的审阅。

参 考 文 献

- [1] A. G. M. Michell, Elastic stability of long beams under transverse forces, *Philosophical Magazine*, 48 (1899), 298—309.
- [2] S. P. Timoshenko, Theory of bending, torsion, and buckling of thin-walled members of open cross-section, in *Collected Papers of Stephen P. Timoshenko*, McGraw-Hill, New York (1953), 559—609.
- [3] S. P. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York (1961).
- [4] H. Wagner, Torsion and buckling of open cross-sections, *NACA Technical Memorandum*, (807) (1936).
- [5] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York (1952).
- [6] R. S. Barsoum and R. H. Gallagher, Finite element analysis of torsional and

- torsional-flexural stability problems, *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, (2) (1970), 335—352.
- [7] Y. B. Yang and S. R. Kuo, Static stability of curved thin-walled beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 112(8) (1986), 821—841.
- [8] N. S. Trahair and J. P. Papangelis, Flexural-torsional buckling of monosymmetric arches, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 113(10) (1987), 2271—2288.
- [9] Y. B. Yang and S. R. Kuo, Use of straight-beam approach to study buckling of curved beams, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 117(7) (1991), 1963—1978.
- [10] S. R. Kuo and Y. B. Yang, New theory on buckling of curved beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 117(8) (1991), 1698—1717.
- [11] N. S. Trahair, *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, CRC Press Inc. (1993).
- [12] Y. L. Pi and N. S. Trahair, Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns-theory, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 120(7) (1994), 2041—2061.
- [13] Y. L. Pi and N. S. Trahair, Nonlinear in elastic analysis of steel beam-columns applications, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 120(7) (1994), 2062—2085.

Modification in the Theory on Flexural-Torsional Buckling of Structures

E Guokang

(FST, University of Macau, P. O. Box 3001, Macau)

Abstract

In this paper, the problems existing in the present theory on flexural-torsional buckling of structures are discussed, and the buckling procedure is found to be restricted to certain development order of displacements and rotations by the present theory. A fresh idea is, therefore, proposed for the mathematical description of actual flexural-torsional buckling procedure of structures. New geometric equations are formulated and a set of new potential variational equation and neutral equilibrium equations are got for the flexural-torsional buckling analysis of structures. Examples are given to detect the numerical difference between the modified theory and the present accepted theory.

Key words flexural-torsional buckling, geometric equation, rotations, order