应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

带空洞损伤的古典压力容器问题

扶名福[1] 盛冬发[1] 李相麟[1]

（何福保推荐，1995年12月18日收到，1997年3月21日收到修改稿）

摘　　要

本文根据微弹性结构线性理论研究了带空洞损伤的压力容器问题．解答是准静态的，其应力场为古典弹性力学关于球体对称压力容流问题应力解答，位移场和损伤场具有由于考虑损伤而表现出体积粘弹性特点．

关键词　空洞损伤　微弹性结构　压力容器

一、前　　言

压力容器内表面承受较大压力，材料内部的损伤可能会造成灾难性的事故，所以对压力容器损伤的研究一直十分活跃．1982年4月，IUTAM举办了一次"压力容器非弹性分析"专业会议，1983年，Cowin 和 Nunziato研究了空洞材料的线弹性理论[1]，得到了把体积百分比作为一个动态变量的线弹性本构方程，同年，Puri和Cowin应用这一理论分析了带空洞线弹性材料压力容器问题，得到了应力场、位移场和体积百分比改变场[2]，作者认为材料空洞可以作为一种损伤，分析了这种损伤场的分布情况，得到了一些不同的结论．

二、理 论 总 结

在带空洞材料线性理论中，独立的动态变量是相对于参考构形的位移场$u_i(\boldsymbol{x},\ t)$和损伤场$D(\boldsymbol{x},\ t)$．微元体应变张量$E_{ij}(\boldsymbol{x},\ t)$由位移场$u_i$决定

$$E_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \tag{2.1}$$

逗号后面的拉丁字母表示对指定坐标的偏微分．带空洞损伤材料运动方程由文[3]有

线动量守恒方程

$$\rho \ddot{u}_i=T_{ij,j}+\rho b_i \tag{2.2}$$

力的平衡方程

$$-\rho k\ddot{D}=h_{i,i}+g+l \tag{2.3}$$

这里T_{ij}是对称张量，b_i是体积力向量，h_i是平衡应力向量，k是平衡惯性力，g是内平衡体力，l是外平衡体力．

---

1 南昌大学工程力学研究所，南昌 330029

根据微弹性结构理论[4]，通过简化推导，可以得到带空洞损伤材料的线性理论的应力场T_{ij}，平衡应力向量h_i，内平衡体积力g相对于应变场E_{ij}，损伤场D，其随时间变化率$\dot{D}$及其梯度$D_{,i}$的关系为

$$T_{ij}=\lambda\delta_{ij}E_{kk}+2\mu E_{ij}-\beta(D-D_R)\delta_{ij} \tag{2.4}$$

$$h_i=-\alpha D_{,i} \tag{2.5}$$

$$g=\omega\dot{D}+\xi(D-D_R)-\beta E_{kk} \tag{2.6}$$

系数λ，μ，α，β，ξ和ω依赖于D_R，D_R是初始空洞损伤。把方程(2.4)代入(2.2)式，并且令$\boldsymbol{u}_i=0$，$b_i=0$可得：

$$(\lambda\delta_{ij}E_{kk}+2\mu E_{ij}-\beta(D-D_R)\delta_{ij})_{,j}=0 \tag{2.7}$$

写成张量形式为

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}-\beta\nabla D=0 \tag{2.8}$$

把方程(2.5)、(2.6)代入方程(2.3)，且并令$\ddot{D}=0$，$l=0$，有

$$-\alpha D_{,ii}+\omega\dot{D}+\xi(D-D_R)-\beta E_{kk}=0 \tag{2.9}$$

写成标量形式为

$$-\alpha\nabla^2 D+\omega\dot{D}+\xi(D-D_R)-\beta\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2.10}$$

以上两个方程(2.8)和(2.10)，方程(2.8)是矢量方程，方程(2.10)是标量方程，共表示4个方程，其中有4个未知数，即$u_i(i=1, 2, 3)$和D。u_i的边界条件和古典弹性力学相同，D的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla D=0 \tag{2.11}$$

这里$\boldsymbol{n}$是边界的外法线。

三、问题求解

首先引入记号P。

$$P=\partial/\partial r \tag{3.1}$$

这样体积膨胀（应变）Δ为

$$\Delta=E_{kk}=\left(P+\frac{2}{r}\right)u \tag{3.2}$$

u是位移矢量沿半径方向的分量。这样，可将(2.8)和(2.10)式改写为如下形式

$$(\lambda+2\mu)P\Delta-\beta PD=0 \tag{3.3}$$

$$-\alpha P_*D+\omega\dot{D}+\xi(D-D_R)-\beta\Delta=0 \tag{3.4}$$

这里任意函数φ的P_*定义为

$$P_*\varphi=\frac{1}{r^2}P(r^2P\varphi) \tag{3.5}$$

这个问题可归结为求解方程(3.3)和(3.4)中的Δ和D。

由方程(2.11)可得D的边界条件

$$(PD)_{r=r_1}=0,\quad (PD)_{r=r_2}=0 \tag{3.6}$$

这里r_1，r_2分别为球的内外半径。D的初始条件为

$$D(r, 0)=D_R \tag{3.7}$$

既然问题的解答在时间域上是半无限的，而且问题是线性的，我们自然可以应用Laplace

变换，对(3.3)、(3.4)式进行Laplace变换有

$$(\lambda+2\mu)P\bar{\Delta}-\beta P\bar{D}=0 \tag{3.8}$$

$$-\alpha P_*\bar{D}+\omega(s\bar{D}-D_R)+\xi\left(\bar{D}-\frac{1}{s}D_R\right)-\beta\bar{\Delta}=0 \tag{3.9}$$

这里引入了初始条件(3.7)。对式(3.8)进行积分得到

$$\bar{\Delta}=\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\bar{D}+\bar{A} \tag{3.10}$$

这里$\bar{A}$是关于t的任意函数，把方程(3.10)代入方程(3.9)，得到关于$\bar{D}$的方程

$$P_*\bar{D}-q^2\bar{D}=-\frac{\beta}{\alpha}\bar{A}-\frac{\omega}{\alpha}D_R-\frac{\xi}{\alpha}\frac{1}{s}D_R \tag{3.11}$$

这里

$$q^2=\frac{\omega}{\alpha}(s+k),\quad k=\frac{1}{\omega}\left(\xi-\frac{\beta^2}{\lambda+2\mu}\right)\geqslant 0 \tag{3.12}$$

微分方程(3.11)的解为

$$\bar{D}=\frac{1}{\sqrt{r}}(C_1I_{1/2}(qr)+C_2K_{1/2}(qr))+\frac{1}{\alpha q^2}\left(\beta\bar{A}+\omega D_R+\frac{\xi}{s}D_R\right) \tag{3.13}$$

这里$I_{1/2}$，$K_{1/2}$是贝塞尔函数，既然D_R不是r的函数，边界条件(3.7)的 Laplace 变 换可得$C_1=C_2=0$，这样

$$\bar{D}=\frac{1}{\alpha q^2}\left[\beta\bar{A}+\omega D_R+\frac{1}{s}\xi D_R\right] \tag{3.14}$$

代入式(3.10)可得

$$\bar{\Delta}=\frac{\beta}{\alpha q^2(\lambda+2\mu)}\left[\beta\bar{A}+\omega D_R+\frac{1}{s}\xi D_R\right]+\bar{A} \tag{3.15}$$

这表明$\bar{\Delta}$并不是r的函数，对(3.2)进行Laplace变换，得

$$\bar{\Delta}=\left(P+\frac{2}{r}\right)\bar{u} \tag{3.16}$$

$\bar{u}$是半径方向位移分量的变换形式，解得

$$\bar{u}=\frac{1}{3}\bar{\Delta}r+\frac{\bar{B}}{r^2} \tag{3.17}$$

$\bar{\Delta}$由式(3.15)给出。$\bar{B}$是时间的任意函数。为了确定任意函数$\bar{A}$和$\bar{B}$，要用到应力边界条件的变换形式，即

$$(\bar{T}_{rr})_{r=r_1}=-\bar{P}_1,\quad (\bar{T}_{rr})_{r=r_2}=-\bar{P}_2 \tag{3.18}$$

对方程(2.4)进行Laplace变换，有

$$\bar{T}_{rr}=\lambda\bar{\Delta}+2\mu P\bar{u}-\beta\left(\bar{D}-\frac{1}{s}D_R\right) \tag{3.19}$$

把$\bar{\Delta}$表达式(3.15)，$\bar{u}$表达式(3.17)和$\bar{D}$的表达式(3.14)代入上式，可得

$$\bar{T}_{rr}=-\frac{4\mu\beta^2}{3(\lambda+2\mu)\alpha q^2}\bar{A}+\frac{3\lambda+2\mu}{3}\bar{A}-\frac{4\mu}{r^3}\bar{B}+fD_R \tag{3.20}$$

其中

$$f=\frac{\beta}{s}-\frac{4\mu\omega\beta}{3\alpha q^2(\lambda+2\mu)}-\frac{4\mu\beta\xi}{3\alpha q^2(\lambda+2\mu)s} \tag{3.21}$$

将$\bar{T}_{rr}$的表达式代入应力边界条件，有

$$-\frac{4\mu\beta^2}{3(\lambda+2\mu)\alpha q^2}\bar{A}+\frac{3\lambda+2\mu}{3}\bar{A}-\frac{4\mu}{r_1^3}\bar{B}+fD_R=-\bar{P}_1 \tag{3.22}$$

$$-\frac{4\mu\beta^2}{3(\lambda+2\mu)\alpha q^2}\bar{A}+\frac{3\lambda+2\mu}{3}\bar{A}-\frac{4\mu}{r_2^3}\bar{B}+fD_R=-\bar{P}_2 \tag{3.23}$$

联立求解(3.22)和(3.23)得

$$\bar{A}=\frac{3}{3\lambda+2\mu}\frac{s+k}{s+k_1}\left[\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}-fD_R\right] \tag{3.24}$$

$$\bar{B}=\frac{(\bar{P}_1-\bar{P}_2)r_1^3r_2^3}{4\mu(r_2^3-r_1^3)} \tag{3.25}$$

其中

$$k_1=\frac{1}{\omega}\left(\xi-\frac{3\beta^2}{3\lambda+2\mu}\right) \tag{3.26}$$

把$\bar{A}$的表达式代入(3.14)式

$$\bar{D}=\frac{1}{\alpha q^2}\left[\beta\bar{A}+\omega D_R+\frac{1}{s}\xi D_R\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2}\left[\frac{3\beta}{3\lambda+2\mu}\frac{s+k}{s+k_1}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}r_2^3}{r_2^3-r_1^3}+\frac{s+k}{s}\omega D_R\right]$$

$$=\frac{3\beta}{\omega(3\lambda+2\mu)(s+k_1)}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}+\frac{1}{s}D_R \tag{3.27}$$

对(3.27)式进行Laplace逆变换

$$D=D_R+\frac{3\beta}{\omega(3\lambda+2\mu)}\int_0^t\frac{P_1(\tau)r_1^3-P_2(\tau)r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\exp[-k_1(t-\tau)]d\tau \tag{3.28}$$

把$\bar{A}$的表达式代入(3.15)式得

$$\bar{\Delta}=\frac{\beta}{\alpha q^2(\lambda+2\mu)}\left[\beta\bar{A}+\omega D_R+\frac{1}{s}\xi D_R\right]+\bar{A}$$

$$=\frac{3}{3\lambda+2\mu}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}+\frac{9\beta^2}{\omega(3\lambda+2\mu)^2(s+k_1)}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3} \tag{3.29}$$

将(3.29)式和(3.25)式代入式(3.17)得

$$\bar{u}=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}r+\frac{3\beta^2}{\omega(3\lambda+2\mu)^2(s+k_1)}\frac{\bar{P}_1r_1^3-\bar{P}_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}r$$

$$+\frac{(\bar{P}_1-\bar{P}_2)r_1^3r_2^3}{4\mu(r_2^3-r_1^3)}\frac{1}{r^2} \tag{3.30}$$

对式(3.30)进行Laplace逆变换得

$$u=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{P_1r_1^3-P_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\right)r+\frac{(P_1-P_2)r_1^3r_2^3}{4\mu(r_2^3-r_1^3)}\frac{1}{r^2}$$

$$+\frac{3\beta^2}{\omega(3\lambda+2\mu)^2}\int_0^t\frac{P_1(\tau)r_1^3-P_2(\tau)r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\exp[-k_1(t-\tau)]rd\tau \tag{3.31}$$

令

$$u^{CE}=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{P_1r_1^3-P_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}r+\frac{(P_1-P_2)r_1^3r_2^3}{4\mu(r_2^3-r_1^3)}\frac{1}{r^2} \tag{3.32}$$

则有(3.31)成为

$$u=u^{CE}+\frac{3\beta^2}{\omega(3\lambda+2\mu)^2}\int_0^t\frac{P_1(\tau)r_1^3-P_2(\tau)r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\exp[-k_1(t-\tau)]rd\tau \tag{3.33}$$

把式(3.24)和(3.25)式代入到(3.20)式，有

$$\bar{T}_{rr}=-\bar{P}_1\frac{r_1^3}{r^3}\frac{r_2^3-r^3}{r_2^3-r_1^3}-\bar{P}_2\frac{r_2^3}{r^3}\frac{r^3-r_1^3}{r_2^3-r_1^3} \tag{3.34}$$

对式(3.34)进行Laplace逆变换得

$$T_{rr}=-P_1\frac{r_1^3}{r^3}\frac{r_2^3-r^3}{r_2^3-r_1^3}-P_2\frac{r_2^3}{r^3}\frac{r^3-r_1^3}{r_2^3-r_1^3} \tag{3.35}$$

这和古典弹性力学对球对称压力容器问题的应力解答相同.

当$P_1(\tau)$和$P_2(\tau)$不随时间而变时，可以对(3.28)式和(3.33)式进行化简，分别为

$$D=D_R+\frac{3\beta}{\omega(3\lambda+2\mu)k_1}\frac{P_1r_1^3-P_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}(1-\exp[-k_1t]) \tag{3.36}$$

$$u=u^{CE}+\frac{\beta}{3\lambda+2\mu}(D-D_R)r \tag{3.37}$$

而分析知u^{CE}是古典弹性力学关于相同问题沿半径方向位移分量的解答.

四、结　　论

利用带空洞损伤线弹性材料本构方程，得到带空洞的线弹性材料压力容器问题的完整解答. 位移可以通过对古典弹性力学位移解答修正而得到，并且通过分析得到损伤对半径方向位移分量的影响. 损伤场呈现粘性性质. 并且可知，当$P_1r_1^3=P_2r_2^3$时对损伤不会因为时间而增大. 应力场沿半径方向分量是古典弹性力学解答. 这些与实际情况是相吻合的.

参 考 文 献

[1] S. C. Cowin and J. W. Nunziato, Linear elastic materials with voids, *J. Elasticity*, 13 (1983), 125—147.

[2] S. C. Cowin and P. Puri, The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids, *J. Elasticity*, 13 (1983), 157—163.

[3] 盛冬发、扶名福、李相麟，带空洞损伤的梁的纯弯曲，南昌大学学报（工科版），16(2) (1996), 1—9.

[4] R. D. Mindlin, Microstructure in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16 (1964), 51—78.

The Classical Pressure Vessel Problem for Void Damage Materials

Fu Mingfu Sheng Dongfa Li Xianglin

(*Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang* 330029, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the classical pressure vessel problem for void damage materials is studied from the theory of microstructure in linear elasticity. The solutions are quasi-static. The stress distribution is predicted by isotropic linear elasticity. The displacement and damange fields exhibit a volumetric viscoelasticity induced by considering material damage.

Key words void damage, elastic microstructure, pressure vessel