

两个垂直圆柱在水波中的水动力相互作用*

周显初¹ 王冬娇² 章梓雄²

(1996年4月2日收到)

摘 要

基于线性势流理论研究了两个垂直圆柱在水波中的水动力相互作用。两个圆柱中的一个固定在底部, 另一个铰接在底部且可以在入射波方向以小振幅振动。本文研究了绕射波和辐射波, 运用加法定理得到了每个圆柱表面速度势的简单的解析表达式, 用级数形式显式表示了圆柱上的波浪激励力和力矩及振动圆柱的附加质量和辐射阻尼系数。级数的系数由代数方程组的解决定。给出了一些数值例子以说明诸如间距、圆柱的相对大小、入射角等各种参数对一阶力、定常二阶力、附加质量和辐射阻尼系数以及振动圆柱的响应等的影响。

关键词 波浪激励力 定常二阶力 附加质量 辐射阻尼 铰接圆柱 两个垂直圆柱

一、序 言

随着大的离岸结构的建造, 由几个物体引起的波浪绕射和辐射问题变得日益重要。已经有人用柱状的几个部件和腿来建造或建议建造大的离岸平台、波能萃取装置、大的储油设施和离岸的浮动机场^[1]。因此, 为了作出正确而有效的理论预测, 需要研究在流体中几个固体物体之间的相互作用, 如离岸结构和浮动冰块之间的水动力相互作用、两艘船舶之间的碰撞, 最简单的多半是两个圆柱之间的相互作用。

为了考虑几个物体在入射波中的相互作用, 不但需要考虑每个物体的绕射而且需要考虑由别的物体引起的多重散射。每个物体的绕射波和辐射波可以影响别的物体, 同时也可以被别的物体反射, 这个过程是继续不断的。原则上这类问题可以用一些可靠的数值方法求解^[2]。然而当物体数目增多时, 计算是麻烦的, 所以希望能有某些解析的方法以简化计算。

我们将采用的方法由Záviska^[3]提出, 而由Spring和Monkmeyer^[4]在水波中重新发现。在这个方法中, 直接矩阵法被用来同时求解符合边界条件的每一个物体周围的波分量的振幅。Ohkusu^[5]把圆柱阵列声学辐射的二维散射应用到由三个垂直圆柱构成的结构物。后来, Simon^[6]发展了平面波近似(或大间隔近似), 并把它们应用于作起伏运动的轴对称物体。Kagemoto和Yue^[7]把矩阵法和多重散射的特征结合起来, 发展了相互作用理论去解更完全的问题, 他们根据每个单个物体在代数学方面的绕射特征得到了波浪力、水动力

* 中国科学院和香港大学研究和会议批准委员会资助课题

1 中国科学院力学研究所, 北京 100080

2 香港大学机械工程系, 香港

系数和二阶慢飘力。Fang和Kim^[8]得到了连体船平行前进时经得起海上风浪的特性，他们用二维积分方程方法考虑了柱形海洋中自由浮动的柱子之间的水动力相互作用。Linton和Evans^[9]简化了速度势的表达式，他们全部都是处理固定的均匀垂直柱子的绕射，并没有考虑辐射波。最近，Kim^[10]把绕射理论推广到辐射问题，计算了位于正方形4个角上的同样直径的4个圆柱的附加质量和阻尼系数。另一方面，Landweber, Chwang和Guo^[11]建立了一个无旋流模型，求解了关于二个物体表面上源汇分布的积分方程，决定了随时间变化的附加质量，从Lagrange型运动方程得到了作用在物体上的力，但是没有引入波浪。

本文将考虑入射波和两个圆柱之间的相互作用，其中一个圆柱固定在底部，另一个铰接在海底且能在波的方向振动，无论是绕射波还是辐射波都被考虑了。在第二节我们用加法定理建立了正确的波浪速度势的相互作用理论，给出了每个圆柱表面上速度势的简单的解析表达式。在第三节，用两个圆柱上压力的积分得到了波浪激励力和力矩，决定了振动圆柱的附加质量和阻尼系数。在第四节给出了一些数值的例子，讨论了诸如间隔距离，柱子的相对大小、入射角等各种参数对波浪激励力、慢飘力、附加质量和阻尼系数的影响。原则上这里提供的方法可以用来求解 N 个物体的问题，推广方法没有困难，但是冗繁，唯一的改变是总的速度势为所有 N 个物体的速度势的总和而不是两个物体。

二、方程的建立

本文考虑穿越自由表面的两个圆柱在不可压缩无粘流体中的无旋运动。在 z 轴铅垂向上的笛卡儿坐标系中，自由表面位于 $z=0$ ，液体的底面是 $z=-h$ 。半径为 a_1 的柱子固定在底部，半径为 a_2 的柱2铰接在底部且能在 x 方向振动， x 方向为入射波方向。两个圆柱的运动可以在两个柱坐标系 (r_i, θ_i, z) ($i=1, 2$)中描述(图1)，坐标系的原点 O_1 和 O_2 在 $z=0$ 平面上，其坐标分别为 $(x_1, y_1, 0)$ 和 $(x_2, y_2, 0)$ 。

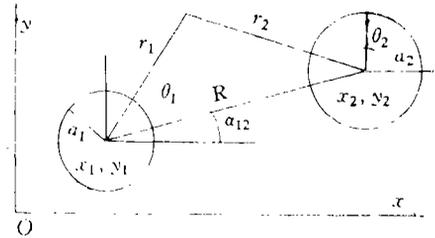


图1 两个圆柱的坐标系

速度势 $\Phi(x, y, z, t)$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1)$$

Φ 的线性边界条件是

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z = 0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 上} \quad (2.2)$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{在 } z=-h \text{ 上} \quad (2.3)$$

$$\Phi_n = 0 \quad \text{在 } C_1; r_1 = a_1 \text{ 上} \quad (2.4)$$

$$\Phi_n = \frac{d\Psi}{dt} (z+h) \cos\theta_2 \quad \text{在 } C_2; r_2 = a_2 \text{ 上} \quad (2.5)$$

其中 Ψ 是柱2与 z 轴的小的角位移，在线性理论中方程(2.5)可以在静平衡位置 $\Psi=0$ 的柱2的表面满足。速度势 Φ 也应该满足无穷远处的辐射条件。

我们假定所有运动是具有角频率 ω 的时间谐波，于是 Φ 可以表示为

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (2.6)$$

其中

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (2.7)$$

k 是波数, g 是重力常数. 入射波的空间速度势 ϕ_I 可以表示为

$$\phi_I = -\frac{igA}{\omega} f_0(z) e^{ikz} = -\frac{igA}{\omega} I_{ji} \exp[ikr_j \cos\theta_j] f_0(z) \quad (2.8)$$

其中 $I_{ji} = \exp[ikx_j]$ 是柱 j 的位相因子, A 表示入射波的振幅, (x_j, y_j) 是柱 j 的截面中心的坐标, 且

$$f_0(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.9)$$

方程(2.8)可以写成

$$\phi_I = -\frac{igA}{\omega} I_{ji} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr_j) \exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j\right)\right] f_0(z) \quad (j=1,2) \quad (2.10)$$

其中 $J_n(kr_j)$ 是第一类 n 阶贝塞尔函数, 变量为 kr_j .

由入射波引起的绕射波势的一般形式由下式给出

$$\phi_{dj} = -\frac{igA}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nj} Z_{nj} H_n(kr_j) \exp[in\theta_j] f_0(z) \quad (j=1,2) \quad (2.11)$$

其中 $H_n(kr_j) = H_n^{(1)}(kr_j)$ 是第一类 n 阶Hankel函数, A_{nj} 是待定的未知系数,

$$Z_{nj} = \frac{J'_n(ka_j)}{H'_n(ka_j)} \quad (2.12)$$

撇号记作对变量 ka_j 的导数.

柱2的振动引起的辐射势为

$$\begin{aligned} \phi_{rj} = i\omega\Psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_{n0j} Z_{nj} H_n(kr_j) f_0(z) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nmj} X_{nmj} K_n(kmr_j) f_m(z) \right] \exp[in\theta_j] \quad (j=1,2) \quad (2.13) \end{aligned}$$

其中 Ψ 是振动圆柱倾覆运动的振幅,

$$\Psi = \psi e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

$$X_{nmj} = \frac{I'_n(kma_j)}{K'_n(kma_j)} \quad (2.15)$$

$I_n(kma_j)$ 是第一类修正的贝塞尔函数, $K_n(kmr_j)$ 是第二类修正的贝塞尔函数, k_m 是下述方程的解

$$\omega^2 + gk_m \tan(kmh) = 0 \quad (2.16)$$

$$f_m(z) = \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos(kmh)} \quad (2.17)$$

B_{n0j} 和 B_{nmj} 是待定的未知系数.

总的速度势是

$$\phi = \phi_I + \sum_{j=1}^2 (\phi_{dj} + \phi_{rj}) \quad (2.18)$$

代入(2.6)式后, 速度势 Φ 满足基本方程(2.1)、边界条件(2.2)和(2.3)以及在无穷远处的辐射条件, (2.18)式中所有未知系数用边界条件(2.4)和(2.5)决定. 唯一的困难是方程(2.18)

是用两个柱坐标系表示的。应用贝塞尔函数的Graf加法定理^[12]，可得

$$H_n(kr_1) \exp[in(\theta_1 - \alpha_{12})] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{n+l}(kR) J_l(kr_2) \exp[il(\pi + \alpha_{12} - \theta_2)] \quad (2.19)$$

$$K_n(kr_1) \exp[in(\theta_1 - \alpha_{12})] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} K_{n+l}(kR) I_l(kr_2) \exp[il(\pi + \alpha_{12} - \theta_2)] \quad (2.20)$$

于是速度势可用坐标系 (r_j, θ_j, z) 表示

$$\begin{aligned} \phi(r_j, \theta_j, z) = & -\frac{igA}{\omega} I_{j,i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr_j) \exp\left[in\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j\right)\right] f_0(z) \\ & -\frac{igA}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(z) \left[\exp[in\theta_j] A_{n_j} Z_{n_j} H_n(kr_j) \right. \\ & + \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{n_l} Z_{n_l} H_{n+l}(kR) J_l(kr_j) \exp[il(\pi - \theta_j)] \exp[i(n+l)\alpha_{ij}] \left. \right] \\ & + i\omega\psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_{n_0j} Z_{n_j} H_n(kr_j) f_0(z) \exp[in\theta_j] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} B_{nmj} X_{nmj} K_n(kmr_j) f_m(z) \exp[in\theta_j] \\ & + \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{n_0i} Z_{n_l} H_{n+l}(kR) J_l(kr_j) \exp[il(\pi - \theta_j)] \exp[i(n+l)\alpha_{ij}] f_0(z) \\ & + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm_i} X_{nm_i} K_{n+l}(k_mR) I_l(k_mr_j) \exp[il(\pi - \theta_j)] \exp[i(n+l)\alpha_{ij}] f_m(z)] \end{aligned} \quad (i \neq j, i=1, 2, j=1, 2) \quad (2.21)$$

其中

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \alpha_{ij} = \arctan\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)$$

方程(2.21)对 $r_j < R$ 有效，所以这是一个在柱 j 附近有效的表示式。在(2.21)式中用 $-l$ 代替 l ，把(2.21)式代入边界条件(2.4)和(2.5)，利用 $\cos n\theta$ ， $\sin n\theta$ 和 $f_n(z)$ 的正交性，可得

$$I_{j,i} \exp\left[il\frac{\pi}{2}\right] + A_{l_j} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_l} Z_{n_l} H_{n-l}(kR) \exp[i(n-l)\alpha_{ij}] = 0, \quad -\infty < l < \infty, \quad i \neq j, \quad j=1, 2 \quad (2.22)$$

$$B_{l_01} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n_02} Z_{n_2} H_{n-l}(kR) \exp[i(n-l)\alpha_{21}] = 0, \quad -\infty < l < \infty \quad (2.23a)$$

$$B_{l_02} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n_01} Z_{n_1} H_{n-l}(kR) \exp[i(n-l)\alpha_{12}] = \begin{cases} 0, & l \neq \pm 1, -\infty < l < \infty \\ \pm C_{10/2}, & l = \pm 1 \end{cases} \quad (2.23b)$$

$$B_{l_{m1}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nm2} X_{nm2} K_{n-l}(k_m R) \exp[i l \pi] \exp[i(n-l) \alpha_{21}] = 0, \quad -\infty < l < \infty, \quad 1 \leq m < \infty \quad (2.24a)$$

$$B_{l_{m2}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nm1} X_{nm1} K_{n-l}(k_m R) \exp[i(n-l) \alpha_{12}] \exp[i l \pi] = \begin{cases} 0, & l \neq \pm 1, \quad -\infty < l < \infty \\ C_{1m}/2, & l = \pm 1, \quad 1 \leq m < \infty \end{cases} \quad (2.24b)$$

其中

$$C_{10} = \frac{-2 \cosh kh (kh \sinh kh - \cosh kh + 1)}{k^2 J_1'(ka_2) (\sinh kh \cosh kh + kh)} \quad (2.25a)$$

$$C_{1m} = \frac{-2 \cos k_m h (k_m h \sin k_m h + \cos k_m h - 1)}{k_m^2 I_1'(k_m a_2) (\sin k_m h \cos k_m h + k_m h)} \quad (2.25b)$$

(A_{l1}, A_{l2}) , $(B_{l_{01}}, B_{l_{02}})$ 和 $(B_{l_{m1}}, B_{l_{m2}})$ 分别由线性方程组(2.22)、(2.23)和(2.24)完全决定。不幸的是它们是一个无穷系统。为了求他们的值, (2.22)和(2.23)式被截断为含 $2(2L+1)$ 个未知数的 $2(2L+1)$ 个方程组, (2.24)式被截断为含 $2M(2L+1)$ 个未知数的 $2M(2L+1)$ 个方程组。

为了简化速度势的表示式, 交换求和次序, 用 $-l$ 代换 l , 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{ni} Z_{ni} H_{n-l}(kR) J_l(kr_j) \exp[i l (\pi - \theta_j)] \exp[i(n+l) \alpha_{ij}] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{ni} Z_{ni} H_{n-l}(kR) \exp[i(n-l) \alpha_{ij}] \right] \exp[i l \theta_j] J_l(kr_j) \quad (2.26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm1} X_{nm1} K_{n+l}(k_m R) I_l(k_m r_j) \exp[-i l (\pi - \theta_j)] \exp[i(n+l) \alpha_{ij}] f_m(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nm1} X_{nm1} K_{n-l}(k_m R) \exp[i(n-l) \alpha_{ij}] \exp[i l \theta_j] \right] \cdot \exp[i l \pi] I_l(k_m r_j) f_m(z) \quad (2.27)$$

利用方程(2.22)~(2.24), $\phi(r_j, \theta_j, z)$ 可简化为

$$\begin{aligned} \phi(r_j, \theta_j, z) = & \frac{igA}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nj} [Z_{nj} H_n(kr_j) - J_n(kr_j)] f_0(z) \exp[in\theta_j] \\ & + i\omega\psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n0j} [Z_{nj} H_n(kr_j) - J_n(kr_j)] f_0(z) \exp[in\theta_j] \\ & + i\omega\psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nmj} [X_{nmj} K_n(k_m r_j) - I_n(k_m r_j)] f_m(z) \exp[in\theta_j] \\ & + i\omega\psi \delta_{j2} [C_{10} J_1(kr_j) f_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m} I_1(k_m r_j) f_m(z)] \cos\theta_2 \quad (2.28) \end{aligned}$$

其中 $\delta_{12}=0$, $\delta_{22}=1$. 作为特例, 第 j 个柱子上的速度势变为

$$\begin{aligned} \phi(a_j, \theta_j, z) = & -\frac{2gA}{\pi\omega ka_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_{nj}}{H'_n(ka_j)} f_0(z) \exp[in\theta_j] \\ & + i\omega\psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{-2i}{\pi ka_j} \frac{B_{n0j}}{H'_n(ka_j)} f_0(z) \exp[in\theta_j] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{nmj} f_m(z)}{k_m a_j K'_n(k_m a_j)} \exp[in\theta_j] \right] \\ & + i\omega\psi \delta_{j2} \left[C_{10} J_1(ka_j) f_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{1m} I_1(k_m a_j) f_m(z) \right] \cos\theta_j \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中利用了贝塞尔函数的下述Wronskian关系式^[12]

$$\begin{aligned} J'_n(ka_j) H_n(ka_j) - H'_n(ka_j) J_n(ka_j) \\ = -i [J_{n+1}(ka_j) Y_n(ka_j) - J_n(ka_j) Y_{n+1}(ka_j)] = -\frac{2i}{\pi ka_j} \end{aligned}$$

$$I'_n(k_m a_j) K_n(k_m a_j) - I_n(k_m a_j) K'_n(k_m a_j) = \frac{1}{k_m a_j}$$

对于单个固定圆柱的情况, 可设柱心为原点且 $\Psi=0$. 由方程(2.22)~(2.24) 得到 $A_{n1} = -i^n$, $B_{n01} = B_{nm1} = 0$. 方程(2.29) 化简到 [13] 的结果. 对于单个铰接圆柱, 把原点移到柱轴, 有 $A_{n2} = -i^n$, $B_{102} = C_{10}/2$, $B_{1m2} = C_{1m}/2$, $B_{n02} = B_{nm2} = 0 (n \neq 1)$, 我们得到 [14] 的结果. 如果 $\Psi=0$, 两个圆柱都固定, $B_{nm1} = B_{nm2} = 0$, 方程(2.22) 和 [9] 的相同.

三、力和力矩

在柱面上积分入射和绕射波诱导的压力得到第 j 个柱上的一阶的水平波浪激励力 $\text{Re}(f_{xj} e^{-i\omega t})$, $\text{Re}(f_{yj} e^{-i\omega t})$ 和倾覆力矩 $\text{Re}(M_{yj} e^{-i\omega t})$,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f_{xj} \\ f_{yj} \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 -\rho i\omega \left(\phi_I + \sum_{j=1}^2 \phi_{dj} \right) \begin{Bmatrix} \cos\theta_j \\ \sin\theta_j \end{Bmatrix} a_j dz d\theta_j \\ = \frac{2i\rho g A \tanh kh}{k^2 H'_1(ka_j)} (A_{1j} \mp A_{-1j}) \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} M_{yj} = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 -\rho i\omega \left(\phi_I + \sum_{j=1}^2 \phi_{dj} \right) \cos\theta_j a_j (z+h) dz d\theta_j \\ = \frac{2i\rho g A}{k H'_1(ka_j)} (A_{1j} - A_{-1j}) \frac{k h \sinh kh - \cosh kh + 1}{k^2 \cosh kh} \end{aligned} \quad (3.1b)$$

由辐射引起的力 $\text{Re}(f_{rxj} e^{-i\omega t})$, $\text{Re}(f_{ryj} e^{-i\omega t})$ 和力矩 $\text{Re}(M_{ryj} e^{-i\omega t})$ 可表示为

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f_{rxj} \\ f_{ryj} \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 -\rho i\omega \sum_{j=1}^2 \phi_{rj} \begin{Bmatrix} \cos\theta_j \\ \sin\theta_j \end{Bmatrix} a_j dz d\theta_j \\ = -\frac{2i\rho\omega^2 \psi \tanh kh}{k^2 H'_1(ka_j)} (B_{10j} \mp B_{-10j}) \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho\omega^2 \psi \pi \tan k_m h}{k_m^2 K'_1(k_m a_j)} (B_{1mj} \pm B_{-1mj}) \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta_{j2}\rho\omega^2\pi a_j\psi\left[\frac{\tanh kh}{k}C_{10}J_1(ka_j)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tan k_m h}{k_m}C_{1m}I_1(k_m a_j)\right]\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
& =-\omega^2\begin{Bmatrix} \bar{A}_{1\psi j} \\ \bar{A}_{2\psi j} \end{Bmatrix}\psi-i\omega\begin{Bmatrix} \bar{B}_{1\psi j} \\ \bar{B}_{2\psi j} \end{Bmatrix}\psi
\end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned}
M_{ryj} & =\int_0^{2\pi}\int_{-h}^0-\rho i\omega\sum_{j=1}^2\phi_{rj}\cos\theta_j a_j(z+h)dzd\theta_j \\
& =\left[-\frac{2i\rho\omega^2\psi}{kH'_1(ka_j)}(B_{10j}-B_{-10j})+\rho\omega^2 a_j\delta_{j2}\psi\pi C_{10}J_1(ka_j)\right]\frac{khsinhkh-\coshkh+1}{k^2\coshkh} \\
& \quad +\left[\rho\omega^2\psi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\pi(B_{1mj}+B_{-1mj})}{k_m K'_1(k_m a_j)}+\rho\omega^2 a_j\psi\delta_{j2}\pi C_{1m}I_1(k_m a_j)\right] \\
& \quad \cdot\frac{k_m h\sinh k_m h+\cos k_m h-1}{k_m^2\cos k_m h} \\
& =-\omega^2\bar{A}_{5\psi j}\psi-i\omega\bar{B}_{5\psi j}\psi
\end{aligned} \quad (3.2b)$$

其中 $\bar{A}_{k\psi j}$, $\bar{B}_{k\psi j}$ 分别是柱2俯仰运动的附加质量和辐射阻尼系数。

柱2用铰链固定在底部某点,由于柱子的浮力它在静水中保持铅垂向上。柱2倾覆运动的线性方程可写为

$$I\ddot{\Psi}+C\Psi=(M_{y2}+M_{ry2})e^{-i\omega t} \quad (3.3)$$

其中 I 为柱2绕铰接点的惯性矩, M_{y2} 是波诱导的柱2的俯仰力矩, M_{ry2} 是辐射引起的柱2的水动力矩,刚度系数 C 由作用在柱2的浮心和重心上的浮力和重力的力矩平衡而得到,它由下式给出

$$C=\frac{1}{2}\rho g\pi a_2^2 h^2-M_2 g C_g \quad (3.4)$$

在本文的计算中 $M_2/\rho\pi a_2^2 h=0.5$, $C_g=0.5h$ 。

上述方程对小的 Ψ 有效,可用频域分析求解。在柱2的俯仰运动响应被决定之后,我们便可计算二阶力。事实上,全部的力为

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} & =-\int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} a_j\{-\rho g z+\varepsilon(p^{(1)}+\delta_{j2}\rho g a_j\cos\theta_j\Psi^{(1)})+\varepsilon^2[p^{(2)} \\
& \quad +\delta_{j2}(z+h)\Psi^{(1)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}-\delta_{j2}a_j\cos\theta_j\Psi^{(1)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}+\delta_{j2}\rho g a_j\cos\theta_j\Psi^{(2)} \\
& \quad +\delta_{j2}\frac{\rho g}{2}(z+h)(\Psi^{(1)})^2]\}\begin{Bmatrix} \cos\theta_j \\ \sin\theta_j \end{Bmatrix}dzd\theta_j+O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \quad (3.5a)$$

其中

$$z_1=-h+\delta_{j2}\varepsilon a_j\cos\theta_j\Psi^{(1)}+\delta_{j2}\varepsilon^2 a_j\cos\theta_j\Psi^{(2)}+O(\varepsilon^3)$$

$$z_2=\varepsilon(\xi^{(1)}+\delta_{j2}a_j\cos\theta_j\Psi^{(1)})+O(\varepsilon^2)$$

$$= \varepsilon\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\Big|_{z=0}+\delta_j a_j\cos\theta_j\Psi^{(1)}\right)+O(\varepsilon^2)$$

上标(1)和(2)分别记作一阶和二阶。

$$\begin{aligned}
 M_{y_j} = & - \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} a_j \{ -\rho g z + \varepsilon (p^{(1)} + \delta_{j2} \rho g a_j \cos \theta_j \Psi^{(1)}) + \varepsilon^2 [p^{(2)} \\
 & + \delta_{j2} (z+h) \Psi^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - \delta_{j2} a_j \cos \theta_j \Psi^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + \delta_{j2} \rho g a_j \cos \theta_j \Psi^{(2)} \\
 & + \delta_{j2} \frac{\rho g}{2} (2z+h) (\Psi^{(1)})^2] \} \cos \theta_j (z+h) dz d\theta_j + O(\varepsilon^3) \quad (3.5b)
 \end{aligned}$$

下面可知, 求平均飘移力和力矩并不需要二阶势。

按照[14], 铰接圆柱的二阶力为

$$\begin{aligned}
 F_{z_j}^{(2)} = & \rho a_j \int_0^{2\pi} \left[\int_{-h}^0 \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + (z+h) \Psi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r_j \partial t} \cos \theta_j - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{a_j \partial \theta_j \partial t} \sin \theta_j \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - a_j \cos \theta_j \Psi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi^{(1)}|^2 \right] dz - \frac{1}{2} g \zeta_r^{(1)2} \right. \\
 & \left. - a_j \Psi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=-h} \cos \theta_j \right] \cos \theta_j d\theta_j \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

其中

$$\zeta_r = \eta_r e^{-i\omega t} = \frac{i\omega}{g} \Phi + \delta_{j2} \Psi a_j \cos \theta_j$$

对于平均二阶力(时均力), 上式变为

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{z_j}^{(2)} \\ \bar{F}_{y_j}^{(2)} \end{array} \right\} = & \frac{1}{4} \rho a_j \int_0^{2\pi} \left\{ -g \eta_r \eta_r^* + \int_{-h}^0 \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* dz - \delta_{j2} 2i\omega \psi^* \int_{-h}^0 \left[(z+h) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r_j} \cos \theta_j \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \phi}{a_j \partial \theta_j} \sin \theta_j \right) - a_j \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos \theta_j \right] dz - \delta_{j2} 2i\omega a_j \psi^* \phi \Big|_{z=-h} \cos \theta_j \right\} \\
 & \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{array} \right\} d\theta_j \quad (3.7a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{y_j}^{(2)} = & \frac{1}{4} \rho a_j \int_0^{2\pi} \cos \theta_j d\theta_j \left\{ -g \eta_r \eta_r^* h + \int_{-h}^0 \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* (z+h) dz - \delta_{j2} 2i\omega \psi^* \right. \\
 & \left. \cdot \int_{-h}^0 \left[(z+h)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r_j} \cos \theta_j - \frac{\partial \phi}{a_j \partial \theta_j} \sin \theta_j \right) - a_j \frac{\partial \phi}{\partial z} (z+h) \cos \theta_j \right] dz \right\} \quad (3.7b)
 \end{aligned}$$

其中上标*记作复共轭, 上标(1)在上式中已经被省略了

四、结果的讨论

这一节展示一些数值结果以说明各种参数对力、附加质量、辐射阻尼系数和系统响应等的影响。除非另有说明, 本研究所含参数值为 $R=8\text{m}$, $a_1=a_2=2\text{m}$, $k=0.2/\text{m}$, $h=8\text{m}$ 。为了估计我们的计算的准确性, 我们计算了二个例子。它们分别是由[15]和[14]给出的绕射问题的波浪激励力和辐射问题的慢飘力。我们的结果与他们的结果完全一致。 $M=L=8$ 对我们的计算已经足够精确。在下面的叙述中, 水平的波浪激励力和慢飘力分别由 $\rho g A a_2 h$ 和 $\rho g A^2 a_2$ 无量纲化, 柱2倾覆运动引起的无量纲的附加质量和辐射阻尼系数 $a_{i\psi_j}$ 和 $b_{i\psi_j}$ 定义为

$$a_{1\psi j} = \frac{\bar{A}_{1\psi j}}{\rho\pi a_j^2 h^2/2}, \quad a_{5\psi j} = \frac{\bar{A}_{5\psi j}}{\rho\pi a_j^2 h^3/2}, \quad (j=1, 2) \quad (4.1a)$$

$$b_{1\psi j} = \frac{\bar{B}_{1\psi j}}{(\pi/2)\rho a_j^2 h^2 \sqrt{g/h}}, \quad b_{5\psi j} = \frac{\bar{B}_{5\psi j}}{(\pi/2)\rho a_j^2 h^3 \sqrt{g/h}}, \quad (j=1, 2) \quad (4.1b)$$

其中 $\bar{A}_{i\psi j}$, $\bar{B}_{i\psi j}$ 分别由 (3.2a)、(3.2b) 定义。

x 方向波浪激励力对入射角 α_{12} 的依赖关系显示于图 2。从图 2 可注意到波浪激励力关于 $\alpha_{12}=\pi$ 是对称的。因为两个圆柱半径相等，按物理直觉 $|f_{x1}(\alpha_{12})| = |f_{x2}(\pi-\alpha_{12})|$ 。值得注意的是波浪激励力的最大值不在 $\alpha_{12}=0$ 或 $\pi/2$ ，而是在它们之间的某个角度。垂直于波浪方向的波浪力分量与平行于波浪方向的力相比在任何入射角 α_{12} 都是小的，因此它们在计算波浪激励力的数值时可以忽略。附加质量和辐射阻尼系数对入射角的关系示于图 3。由图 3 可知，当入射角 $\alpha_{12}=\pi/2$ 时，附加质量有最小值而辐射阻尼系数有最大值。

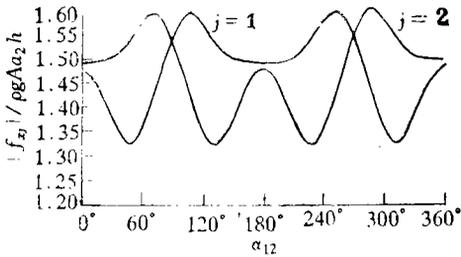


图2 x 方向的波浪激励力与入射角 α_{12} 的关系曲线

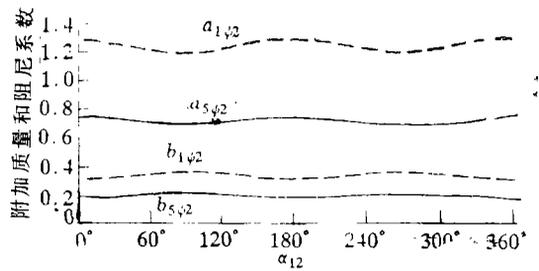


图3 铰接圆柱的附加质量和阻尼系数随入射角 α_{12} 的变化

波浪激励力随无量纲间隔距离 kR 的变化示于图 4。在零入射角情况，作用在固定圆柱（柱 1）上的波浪激励力随 kR 振动的振幅大于铰接圆柱（柱 2）的振幅，当间隔距离增大时振幅减少，当 kR 趋于无穷大时波浪激励力趋向于单个圆柱的值。

尽管图 5 显示，零入射角时铰接圆柱的附加质量和辐射阻尼系数随间隔距离 kR 而振动，但振幅很小，然而 $\alpha_{12}=\pi/2$ 时，它们几乎是常数，当两个圆柱变得较近时，它们迅速增加。所以，附加质量和辐射阻尼几乎独立于间隔距离 kR ，这就是为什么 [6] 建立的平面波近似（或大间隔近似）能够适用于正常间隔情况的原因。从图 6 可知，当 kR 较大时铰接圆柱的响应几乎不变，对于小的 kR ， $\alpha_{12}=0$ 时，由于前面圆柱的阴影的影响，铰接圆柱的响应迅速减少；而 $\alpha_{12}=\pi/2$ 时，由于两个圆柱间的相互作用，铰接圆柱的响应增大。

当圆柱增大时，波浪激励力增大，直到 $ka=0.5$ 附近达到最大值，而不是像单个圆柱那样在 $ka=1$ 附近（图 7）。然后随着 ka 的进一步增加，波浪力减少，当 $\alpha_{12}=0$ 时，前面固定柱波浪力的振幅大于后面铰接圆柱的振幅。如图 8 所示，当 $ka>1$ 时，慢飘力增加较快，铰接圆柱的响应在 $ka=0.2$ 附近出现共振（图 9），此时应考虑粘性的影响。

显然，当柱子尺寸增大时作用在固定柱上的波浪力增加。然而当相对尺寸 a_1/a_2 增大时，

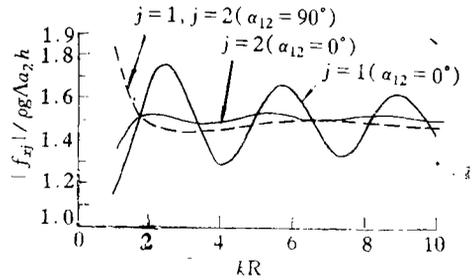


图4 波浪激励力与分离距离 kR 的关系曲线

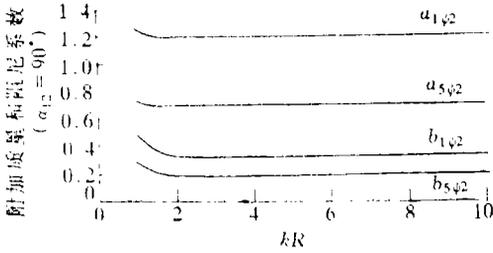
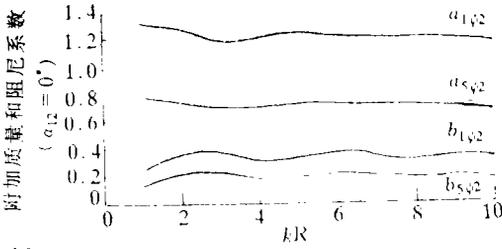


图5 铰接圆柱的附加质量和阻尼系数随分离距离kR的变化

若 $\alpha_{12}=0$ ，如图10所示，由于前柱增大的尾流作用在后柱上的波浪激励力减少；若 $\alpha_{12}=\pi/2$ ，作用在铰接柱上的波浪激励力缓慢增加。因为两圆柱中心线之间的距离是固定的，当固定圆柱的半径变大时，两圆柱之间的间隙变小，因而两圆柱之间的相互作用变得强烈，垂直于波浪方向的波浪激励力和二阶慢飘力可能已经不可忽略了。

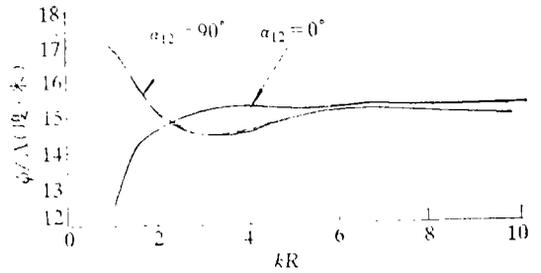


图6 铰接圆柱的响应($\psi \sim kR$)

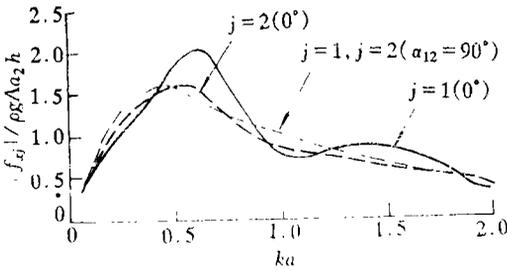


图7 波浪激励力随圆柱大小的变化

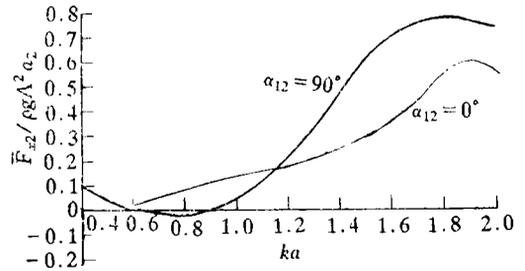


图8 铰接圆柱的漂移力

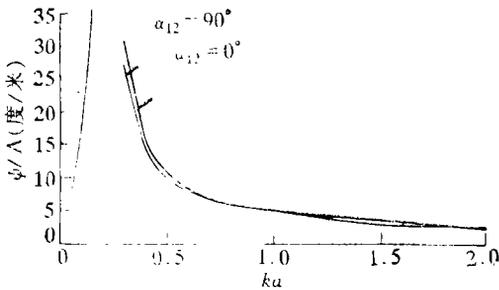


图9 铰接圆柱的响应($\psi \sim ka$)

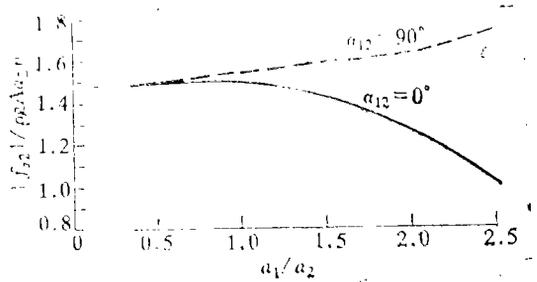


图10 铰接圆柱的波浪激励力随半径比的变化

五、结 论

按照上述结果,作用在柱上的波浪激励力的数值依赖于入射角,即入射波方向和两个圆柱中心连线的夹角。与平行于波浪方向的力相比,垂直于波浪方向的波浪力是很小的。最大的波浪力在某一入射角出现,既不是零,也不是直角。波浪激励力也依赖于两个圆柱的间隔。入射角为零时,作用在前面固定圆柱上的波浪力比作用在后面铰接柱上的波浪力更大的振幅振动,而间隔距离增大时振幅减少。对于大间隔距离的情况,作用在二个柱子上的波浪力都趋近于单个柱子的波浪力。如果前柱增大,在零入射角时,由于前柱增大的尾迹,作用在后柱上的波浪力减少;如果入射角是 90° ,则铰接柱上的波浪力缓慢增加。

考虑了铰接圆柱对应于波浪方向的波浪力和倾覆力矩的附加质量和辐射阻尼。当入射角为 90° 时附加质量有最小值而辐射阻尼系数有最大值。在零入射角时辐射阻尼系数和附加质量随分离间隔而振动,而当 $\alpha=\pi/2$ 时他们几乎独立于间隔距离。铰接圆柱在某一波长会出现共振。

参 考 文 献

- [1] S. Ando, Y. Okawa and I. Ueno, *Feasibility Study of a Floating Offshore Airport*, Rep. Ship. Res. Inst. Suppl., 4, Tokyo (1983).
- [2] C. C. Mei, Numerical methods in water-wave diffraction and radiation, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10 (1978), 393—416.
- [3] F. Záviska, Über die beugung elektromagnetischer wellen an parallelen, unendlich Langen kreiszylindern, *Annln. Phys.*, 40 (1913), 1013—1056.
- [4] B. H. Spring and P. L. Monkmeier, Interaction of plane waves with vertical cylinders, *Proc. 14th Intl. Conf. on Coastal Engineering*, Chap. 107 (1974), 1828—1845.
- [5] M. Ohkusu, Hydrodynamic forces on multiple cylinders in waves, *Proc. Intl. Symp. on Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves*, London, Paper, 12 (1974), 107—112.
- [6] M. J. Simon, Multiple scattering in arrays of axisymmetric wave-energy devices, Part 1. A matrix method using a plane-wave approximation, *J. Fluid Mech.*, 120 (1982), 1—25.
- [7] H. Kagemoto and D. K. P. Yue, Interactions among multiple three-dimensional bodies in water waves: an exact algebraic method, *J. Fluid Mech.*, 166 (1986), 189—209.
- [8] M. C. Fang and C. H. Kim, Hydrodynamically coupled motions of two ships advancing in oblique waves, *J. Ship Res.*, 30(3) (1986), 159—171.
- [9] C. M. Linton and D. V. Evans, The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders, *J. Fluid Mech.*, 125 (1990), 549—569.
- [10] M. H. Kim, Interaction of waves with N vertical cylinders, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 119(6) (1993), 671—689.
- [11] L. Landweber, A. T. Chwang and Z. Guo, Interaction between two bodies translating in an inviscid fluid, *J. Ship Res.*, 35 (1991), 1—8.

- [12] M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Government Printing Office, Washington (1964).
- [13] R. C. McCamy and R. A. Fuchs, Wave forces on a pile: a diffraction theory, *Tech. Memo.*, No.69, U. S. Army Board, U. S. Army Corp. of Eng. (1954).
- [14] K. R. Drake, R. E. Taylor and T. Matsui, Drift of an articulated cylinder in regular waves, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **394** (1984), 363—385.
- [15] P. McIver and D. V. Evans, Approximation of wave forces on cylinder arrays, *Applied Ocean Res.*, **6** (1984), 101—107.

Hydrodynamic Interaction between Two Vertical Cylinders in Water Waves

Zhou Xianchu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China*)

Wang Dongjiao Allen T. Chwang

(*Department of Mechanical Engineering, Hong Kong University, Hong Kong*)

Abstract

The hydrodynamic interaction between two vertical cylinders in water waves is investigated based on the linearized potential flow theory. One of the two cylinders is fixed at the bottom while the other is articulated at the bottom and oscillates with small amplitudes in the direction of the incident wave. Both the diffracted wave and the radiation wave are studied in the present paper. A simple analytical expression for the velocity potential on the surface of each cylinder is obtained by means of Graf's addition theorem. The wave-excited forces and moments on the cylinders, the added masses and the radiation damping coefficients of the oscillating cylinder are all expressed explicitly in series form. The coefficients of the series are determined by solving algebraic equations. Several numerical examples are given to illustrate the effects of various parameters, such as the separation distance, the relative size of the cylinders, and the incident angle, on the first-order and steady second-order forces, the added masses and radiation-damping coefficients as well as the response of the oscillating cylinder.

Key words wave-excited force, added masses, radiation damping, drift force, articulated cylinder, two vertical cylinders