应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 有限变形极性弹性介质的各型动力学方程组*

戴 天 民[1]

（1996年4月8日收到）

**摘　要**

本文从Dluzewski提出的以欧拉角为角坐标的建议和推导出的Cauchy型动力学方程组出发，又引进若干有关变形几何学和动力学的新定义并推导出有限变形极性弹性介质的Boussinesq型、Kirchhoff型、Signorini型和Новожилов型动力学方程组.

**关键词**　有限变形　极性弹性介质　动力学方程组

## 一、引　言

郭仲衡在其专著［1］中共列出有限变形弹性理论中的5种动量方程，即Cauchy，Boussinesq，Kirchhoff，Signorini和Новожилов动量方程.1993年Dluzewski[2]提出以欧拉角为有向空间中的角坐标的建议并用一个本构关系代替惯性守恒定律，从向研究了极性弹性介质的有限变形问题，其中包括Cauchy型动力学方程组.

本文采用文献[2]中以欧拉角为角坐标的建议和从Cauchy型动力学方程组出发，又引进若干有关变形几何学和动力学的新定义并系统地推导出有限变形极性弹性介质的Boussinesq型，Kirchhoff型、Signorini型和Новожилов型动力学方程组. 为方便起见，本文采用[2]的术语和[1]的张量记法.

下面列出本文要用到[2]中的几个定义，其中$\mathbf{e}_i(\mathbf{E}_I)$和$\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{E}_\Theta)$以及$x^i(X^I)$和$\varphi^\alpha(\Phi^\Theta)$分别为曲线坐标系和角坐标系的基矢量和坐标分量.

1．变形梯度$\mathbf{F}$和角变形梯度$\mathscr{Z}$

$$\mathbf{F}=x^i{}_{,I}\mathbf{e}_i\mathbf{E}^I,\quad \mathscr{Z}=\varphi^\alpha{}_{,I}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{E}^I \tag{1.1a,b}$$

2．变形梯度$\mathbf{F}$和角度形梯度$\mathscr{Z}$的"极分解"

$$\mathbf{F}=\mathbf{Q}\cdot\mathscr{C},\quad \mathscr{Z}=\mathbf{Q}\cdot\Gamma \tag{1.2a,b}$$

$$\mathscr{C}=\mathscr{C}_0+\mathscr{E},\quad \Gamma=\Gamma_0+\mathscr{Q} \tag{1.3a,b}$$

$$\mathscr{C}_0{}^I{}_J=X^I{}_{,J}=\delta^I{}_J,\quad \Gamma_0{}^\Theta{}_J=\Phi^\Theta{}_{,J} \tag{1.4a,b}$$

3．面力$\mathbf{t}_{(n)}$和面力偶$\mathbf{m}_{(n)}$

$$\mathbf{t}_{(n)}=t^{ij}n_j\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{m}_{(n)}=m^{\alpha j}n_j\mathbf{e}_\alpha \tag{1.5a,b}$$

* 国家自然科学基金和辽宁省科研基金资助课题

1 辽宁大学数学应用中心，沈阳 110036

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}=\mathbf{t}\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{m}_{(\mathbf{n})}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} \tag{1.6a,b}$$

## 二、若干新定义

为达到本文的目的，首先需要引进下列若干新定义。

1． 转换体力矢量$\mathbf{B}$和转换体力偶矢量$\mathscr{L}$

$$\mathbf{B}=\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{f}=X^I{}_{,i}f^I\mathbf{E}_I,\quad \mathscr{L}=\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}\cdot\mathbf{l}=\Phi^I{}_{,a}l^a\mathbf{E}_I \tag{2.1a,b}$$

2． 转换加速度矢量$\dot{\mathbf{V}}$和转换自旋矢量$\dot{\mathscr{K}}$

$$\dot{\mathbf{V}}=\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\dot{\mathbf{v}}=X^I{}_{,i}\dot{v}^i\mathbf{E}_I,\quad \dot{\mathscr{K}}=\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}\cdot\dot{\mathbf{k}}=\Phi^I{}_{,a}\dot{k}^a\mathbf{E}_I \tag{2.2a,b}$$

3． Piola型应力张量$\boldsymbol{\tau}$和偶应力张量$\boldsymbol{\mu}$

由[1]知

$$\mathbf{t}\cdot d\mathbf{s}=(\mathscr{J}\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*)\cdot d\mathbf{S}=\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.3a}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\tau^{iI}\mathbf{e}_i\mathbf{E}_I,\quad \tau^{iI}=\mathscr{J}t^{ij}X^I{}_{,j} \tag{2.4a}$$

我们定义

$$\mathbf{m}\cdot d\mathbf{s}=(\mathscr{J}\mathbf{m}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*)\cdot d\mathbf{S}=\boldsymbol{\mu}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.3b}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\mu^{aI}\mathbf{e}_a\mathbf{E}_I,\quad \mu^{aI}=\mathscr{J}m^{aj}X^I{}_{,j} \tag{2.4b}$$

4． Kirchhoff型应力张量$\mathbf{T}$和偶应力张量$\mathbf{M}$

由[1]知

$$\mathbf{T}=\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\boldsymbol{\tau}=\mathscr{J}\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*=T^{IJ}\mathbf{E}_I\mathbf{E}_J \tag{2.5a}$$

$$T^{IJ}=\mathscr{J}X^I{}_{,i}t^{ij}X^J{}_{,j} \tag{2.6a}$$

我们定义

$$\mathbf{M}=\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}\cdot\boldsymbol{\mu}=\mathscr{J}\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}\cdot\mathbf{m}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*=M^{IJ}\mathbf{E}_I\mathbf{E}_J \tag{2.5b}$$

$$M^{IJ}=\mathscr{J}\Phi^I{}_{,a}m^{aj}X^J{}_{,j} \tag{2.6b}$$

5． Green型应变张量$\mathbf{G}$和角应变张量$\underset{\sim}{\mathscr{G}}$

$$\mathbf{G}=\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F}=x^i{}_{,I}x^j{}_{,J}g_{ij}\mathbf{E}^I\mathbf{E}^J \tag{2.7a}$$

$$\underset{\sim}{\mathscr{G}}=\underset{\sim}{\mathscr{F}}{}^*\cdot\underset{\sim}{\mathscr{F}}=\varphi^a{}_{,I}\varphi^\beta{}_{,J}g_{a\beta}\mathbf{E}^I\mathbf{E}^J \tag{2.7b}$$

$$\mathbf{G}=(\mathbf{Q}\cdot\underset{\sim}{\mathscr{C}})^*\cdot(\mathbf{Q}\cdot\underset{\sim}{\mathscr{C}})=\underset{\sim}{\mathscr{C}}{}^*\cdot\underset{\sim}{\mathscr{C}} \tag{2.8a}$$

$$\underset{\sim}{\mathscr{G}}=(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma})^*\cdot(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma})=\boldsymbol{\Gamma}^*\cdot\boldsymbol{\Gamma} \tag{2.8b}$$

$$\overset{-1}{\mathbf{G}}=\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*=X^I{}_{,i}X^J{}_{,j}g^{ij}\mathbf{E}_I\mathbf{E}_J \tag{2.9a}$$

$$\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{G}}}=\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}\cdot\overset{-1}{\underset{\sim}{\mathscr{F}}}{}^*=\Phi^I{}_{,a}\Phi^J{}_{,\beta}g^{a\beta}\mathbf{E}_I\mathbf{E}_J \tag{2.9b}$$

6． Lagrange型应变张量$\mathbf{E}$和角应变张量$\underset{\sim}{\mathscr{E}}$

$$\mathbf{E}=(\mathbf{G}-\mathbf{G}_0)/2,\quad \mathbf{G}_0=\underset{\sim}{\mathscr{C}}{}^*\cdot\underset{\sim}{\mathscr{C}}=\mathbf{I} \tag{2.10a}$$

$$\underset{\sim}{\mathscr{E}}=(\underset{\sim}{\mathscr{G}}-\underset{\sim}{\mathscr{G}}_0)/2,\quad \underset{\sim}{\mathscr{G}}_0=\boldsymbol{\Gamma}_0{}^*\cdot\boldsymbol{\Gamma}_0=\underset{\sim}{\mathscr{I}} \tag{2.10b}$$

## 三、各型动力学方程组

1. Cauchy型动力学方程组

Dluzewski由下列动量和动量矩平衡定律

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho \mathbf{v} dv = \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} ds + \int_v \rho \mathbf{f} dv \tag{3.1a}$$

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})dv = \int_s (\mathbf{x}\times\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}+\mathbf{m}_{(\mathbf{n})})ds + \int_v \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f}+\mathbf{l})dv \tag{3.1b}$$

推导出Cauchy型动力学方程组

$$t^{ij}{}_{;j}+\rho f^i=\rho\dot{v}^i \tag{3.2a}$$

$$m^{aj}{}_{;j}-\epsilon^a{}_{ij}t^{ij}+\rho l^a=\rho\dot{k}^a \tag{3.2b}$$

或写成不变性形式

$$\mathbf{t}\cdot\nabla+\rho\mathbf{f}=\rho\dot{\mathbf{v}} \tag{3.3a}$$

$$\mathbf{m}\cdot\nabla-\underset{\sim}{\epsilon}:\mathbf{t}+\rho\mathbf{l}=\rho\dot{\mathbf{k}} \tag{3.3b}$$

2. Boussinesq型动力学方程组

考虑到$\rho dv=\rho_0 dV$和式(2.3)，则由式(3.1a)和式(3.1b)可得

$$\tau^{iI}{}_{:I}+\rho_0 f^i=\rho_0\dot{v}^i \tag{3.4a}$$

$$\mu^{aI}{}_{:I}+\epsilon^a{}_{ij}x^i{}_{,I}\tau^{jI}+\rho_0 l^a=\rho_0\dot{k}^a \tag{3.4b}$$

或

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\square+\rho_0\mathbf{f}=\rho_0\dot{\mathbf{v}} \tag{3.5a}$$

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\square+\underset{\sim}{\epsilon}:\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}^*+\rho_0\mathbf{l}=\rho_0\dot{\mathbf{k}} \tag{3.5b}$$

我们称式(3.4)或式(3.5)为Boussinesq型动力学方程组.

3. Kirchhoff型动力学方程组

把$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$和$\boldsymbol{\mu}=\mathscr{F}\cdot\mathbf{M}$代入式(3.5)或(3.4)，则得Kirchhoff型动力学方程组

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\square+\rho_0\mathbf{f}=\rho_0\dot{\mathbf{v}} \tag{3.6a}$$

$$(\mathscr{F}\cdot\mathbf{M})\cdot\square+\underset{\sim}{\epsilon}:\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{F}^*+\rho_0\mathbf{l}=\rho_0\dot{\mathbf{k}} \tag{3.6b}$$

或

$$(x^i{}_{,I}T^{IJ})_{:J}+\rho_0 f^i=\rho_0\dot{v}^i \tag{3.7a}$$

$$(\varphi^a{}_{I}M^{IJ})_{:J}+\epsilon^a{}_{ij}x^i{}_{:I}T^{JI}x^j{}_{,J}+\rho_0 l^a=\rho_0\dot{k}^a \tag{3.7b}$$

由于

$$\mathbf{F}=g^i{}_K x^K{}_{,I}\mathbf{e}_i\mathbf{E}^I=\mathbf{g}\cdot(\mathbf{X}+\mathbf{u})\nabla \tag{3.8a}$$

$$\mathscr{F}=g^a{}_\Sigma\varphi^\Sigma{}_{,I}\mathbf{e}_a\mathbf{E}^I=\mathbf{g}\cdot(\boldsymbol{\Phi}+\mathbf{Y})\nabla \tag{3.8b}$$

这里$g^i{}_K$和$g^a{}_\Sigma$以及$\mathbf{u}$和$\mathbf{Y}$分别为曲线坐标系和角坐标系中的转移张量以及位移和角位移矢量，于是式(3.6)或(3.7)可写成下列形式:

$$[(\mathscr{E}_0+\mathbf{u}\nabla)\cdot\mathbf{T}]\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}=\rho_0\dot{\mathbf{v}} \tag{3.9a}$$

$$[(\boldsymbol{\Gamma}_0+\mathbf{Y}\nabla)\cdot\mathbf{M}]\cdot\nabla+\underset{\sim}{\epsilon}:(\mathbf{I}+\mathbf{u}\nabla)\cdot\mathbf{T}^*\cdot(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u})+\rho_0\mathbf{l}=\rho_0\dot{\mathbf{k}} \tag{3.9b}$$

或

$$[(\delta^N{}_I+u^N{}_{,I})T^{IJ}]_{;J}+\rho_0 f^N=\rho_0\dot{v}^N \tag{3.10a}$$

$$[(\Phi^{\Theta}{}_{,I}+\gamma^{\Theta}{}_{,I})M^{IJ}]_{;J}+\epsilon^{\Theta}{}_{PQ}(\delta^{P}{}_{I}+u^{P}{}_{,I})T^{JI}(\delta^{Q}{}_{J}+u^{Q}{}_{,J})+\rho_0 l^{\Theta}=\rho_0\dot{k}^{\Theta} \tag{3.10b}$$

式(3.9)或(3.10)是Kirchhoff型动力学方程组的另一种形式。

4. Signorini型动力学方程组

对式(3.6a)和(3.6b)两侧分别从左方点积$\mathbf{F}^*$和$\mathscr{X}^*$并考虑到(2.7a)和(2.7b)以及下列关系式

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\square=\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}\cdot\nabla)+(\mathbf{F}\square):\mathbf{T} \tag{3.11a}$$

$$(\mathscr{X}\cdot\mathbf{M})\cdot\square=\mathscr{X}\cdot(\mathbf{M}\cdot\nabla)\cdot(\mathscr{X}\square):\mathbf{M} \tag{3.11b}$$

则有

$$\mathbf{G}\cdot(\mathbf{T}\cdot\nabla)+\mathbf{F}^*\cdot(\mathbf{F}\square):\mathbf{T}+\rho_0\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{f}=\rho_0\mathbf{F}^*\cdot\dot{\mathbf{v}} \tag{3.12a}$$

$$\mathscr{G}\cdot(\mathbf{M}\cdot\nabla)+\mathscr{X}^*\cdot(\mathscr{X}\square):\mathbf{M}+\mathscr{X}^*\cdot\epsilon:\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{F}^*+\rho_0\cdot\mathscr{X}^*\mathbf{l}=\rho_0\mathscr{X}^*\cdot\dot{\mathbf{k}} \tag{3.12b}$$

由于应力张量$\mathbf{T}$和偶应力张量$\mathbf{M}$均为非对称的，这里把它们分别分解为对称部分$\mathbf{T}_s$和$\mathbf{M}_s$，以及反对称部分 $\mathbf{T}_a$ 和 $\mathbf{M}_a$，即$\mathbf{T}=\mathbf{T}_s+\mathbf{T}_a$ 及 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_s+\mathbf{M}_a$，于是由式（3.12）可推导出下列Signorini型动力学方程组：

$$\mathbf{G}\cdot(\mathbf{T}\cdot\nabla)+(\mathbf{G}\nabla):\mathbf{T}-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{G}):\mathbf{T}_s-[(\square\mathbf{F}^*)\cdot\mathbf{F}]_a:\mathbf{T}_a+\rho_0\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{f}=\rho_0\mathbf{F}^*\cdot\dot{\mathbf{v}} \tag{3.13a}$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}\cdot(\mathbf{M}\cdot\nabla)+(\mathscr{G}\nabla):\mathbf{M}-\frac{1}{2}(\nabla\mathscr{G}):\mathbf{M}_s\\&\quad-[(\square\mathscr{X}^*)\cdot\mathscr{X}]_a:\mathbf{M}_a+\mathscr{X}^*\cdot\epsilon:\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{F}^*+\rho_0\mathscr{X}^*\cdot\mathbf{l}\\&=\rho_0\mathscr{X}^*\cdot\dot{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{3.13b}$$

或

$$(G_{NI}T^{IJ})_{;J}-\frac{1}{2}G_{IJ;N}T_s^{IJ}-(x^i{}_{,NI}x_{i,J})_a T_a^{IJ}+\rho_0 f_i x^i{}_{,N}=\rho_0\dot{v}_i x^i{}_{,N} \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}&(\mathscr{G}_{NI}M^{IJ})_{;J}-\frac{1}{2}\mathscr{G}_{IJ;N}M_s^{IJ}-(\varphi^a{}_{,NI}\varphi_{a,J})_a T_a^{IJ}\\&\quad+\varphi^a{}_{,N}\epsilon_{aij}x^i{}_{,I}T^{JI}x^j{}_{,J}+\rho_0 l_a\varphi^a{}_{,N}\\&=\rho_0\dot{k}_a\varphi^a{}_{,N}\end{aligned} \tag{3.14b}$$

由于$\mathbf{G}=2\mathbf{E}+\mathbf{I}$和$\mathscr{G}=2\mathscr{E}+\mathscr{G}_0$，所以式(3.13)或(3.14)也可用Lagrange型应变张量$\mathbf{E}$和偶应变张量$\mathscr{E}$表示。

5. Новожилов型动力学方程组

对式(3.6a)和（3.6b）两侧分别从左方点积$\overset{-1}{\mathbf{F}}$和$\overset{-1}{\mathscr{X}}$并考虑到（2.1)，(2.2)，(2.9）和(3.11)，则可推导出下列Новожилов型动力学方程组如下：

$$(\mathbf{T}\cdot\nabla)+\overset{-1}{\mathbf{G}}\cdot\left\{(\mathbf{G}\nabla)\cdot\mathbf{T}-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{G}):\mathbf{T}_s-[(\square\mathbf{F}^*)\cdot\mathbf{F}]_a:\mathbf{T}_a\right\}+\rho_0\mathbf{B}=\rho_0\dot{\mathbf{V}} \tag{3.15a}$$

$$(\mathbf{M}\cdot\nabla)+\overset{-1}{\mathscr{G}}\cdot\left\{(\mathscr{G}\nabla)\cdot\mathbf{M}-\frac{1}{2}(\nabla\mathscr{G}):\mathbf{M}_s-[(\square\mathscr{X}^*)\cdot\mathscr{X}]_a:\mathbf{M}_a\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\overset{-1}{\mathscr{Z}}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}:\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{F}^*+\rho_0\mathscr{L} \\
&=\rho_0\dot{\mathscr{K}} \qquad (3.15\text{b})
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&T^{NI}{}_{;I}+\overset{-1}{G}{}^{NI}\left\{G_{IJ;P}T^{JP}-\frac{1}{2}G_{JP;I}\underset{s}{T}{}^{IP}-(x^i{}_{,IJ}x_{i,P})_a\underset{a}{T}{}^{IP}\right\}+\rho_0B^N \\
&=\rho_0\dot{V}^N \qquad (3.16\text{a}) \\
&M^{NI}{}_{;I}+\overset{-1}{\mathscr{G}}{}^{NI}\left\{\mathscr{G}_{IJ;P}M^{JP}-\frac{1}{2}\mathscr{G}_{JP;I}\underset{s}{M}{}^{IP}-(\varphi^a{}_{,IJ}\varphi_{a,P})_a\underset{a}{M}{}^{IP}\right\} \\
&\quad+\Phi^N{}_{,a}\epsilon^a{}_{ij}x^i{}_{,I}T^{JI}x^j{}_{,J}+\rho_0\mathscr{L}^N \\
&=\rho_0\dot{\mathscr{K}}^N \qquad (3.16\text{b})
\end{aligned}
$$

至此，我们已系统地推导出有限变形极性弹性介质的各型动力学方程组。

## 四、结　语

由于采用了以欧拉角为角坐标的建议并提出有关变形几何学和动力学的若干新定义，所以本文很顺利而且很自然地推导出与有限变形弹性介质的 5 种动量方程组相对应的有限变形极性弹性介质的 Cauchy 型，Boussinesq 型，Kirchhoff 型，Signorini 型和 Новожилов 型动力学方程组。否则的话，若想用其它极性连续统理论的思路来达到本文的目的将会是相当复杂的。

## 参 考 文 献


[1] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社，北京 (1980)。

[2] P. H. Dluzewski, Finite deformations of polar elastic media, *Int. J. Solids Structures*, 30(16) (1993), 2277—2285.


# Dynamical Equations of Various Types for Finite Deformable Polar Elastic Media


Dai Tianmin

*(Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)*



**Abstract**

In the present paper, some additional new definitions on the kinematics and dynamics are introduced, and the dynamical equations of Boussinesq type, Kirchhoff type, Signorini type and Nowozilov type for finite deformable polar elastic media are systematically derived from the consideration of Euler angles as angular coordinates and the dynamical equations of Cauchy type presented by Dluzewski.



**Key words** finite deformable, polar elastic media, dynamical equations