

叠层连续开口圆柱壳的精确解*

范家让¹ 盛宏玉¹

(何福保推荐, 1996年10月7日收到)

摘 要

抛弃任何有关位移和应力模式的假设, 引入 δ -函数, 对正交异性连续开口圆柱壳建立状态方程。给出薄的、中厚的和强厚的叠层连续开口圆柱壳静力问题的统一的精确解。数值结果和SAP5解进行了对比。

关键词 叠层连续开口圆柱壳 正交异性体 状态方程 精确解

一、引 言

当今各家板壳理论, 诸如 Reissner 理论、Kirchhoff-Love 理论和 Ambartsu myan 理论等, 都引入一些假设, 例如, 假设力学量是某一坐标变量的多项式。本文稍迟将证明各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式, 若采用多项式假设, 必导致基本方程之间的互不相容, 且不能包含全部弹性常数。这正是当今各家理论的误差根源, 特别是对较厚的板壳而言。对强厚度板壳各家理论全部失效。

Soldatos 和 Hadjigeorgiou^[6] 抛弃关于应力和变形模式的初始假设, 提出逐次近似法, 对单层各向同性圆柱壳和条板的自由振动问题给出了三维解。Hawkes 和 Soldatos^[4] 将上述方法推广至正交异性正交铺设的叠层圆筒的三维轴对称振动问题。类似的方法还被 Bhimaraddi^[1] 提出, 并研究了双曲率扁壳的自由振动问题。在这些文章中, 厚壳被假想地分割成 N 个子壳, 其目的是把变系数微分方程简化成较简单易解的形式。但这样一来, 需处理在层间和假想层间出现的大量未知量。这一弊端被范家让等^[2,3] 所克服, 他们发展了状态空间理论, 分析了强厚度叠层圆柱壳和双曲率壳, 给出静力、动力和稳定问题的精确解。不论层数多少, 只需求解三个未知量。

上述研究仅限于筒支边问题。对具有非筒支边的强厚度板壳要给出解析解是非常困难的, 以致于并无其它文献可供参考。本文通过单位脉冲函数和 δ -函数的引入, 对薄的、中厚的和强厚的叠层连续开口圆柱壳的静力问题给出精确解析解。

* 国家自然科学基金资助项目。

1 合肥工业大学, 合肥 230009.

二、正交异性连续开口圆柱壳的状态方程

图1(a)所示为一 K 跨正交异性连续开口圆柱壳,坐标轴沿弹性主方向,沿 x 方向,两端边界固支或简支,中间支座简支,沿 θ 方向,两端边界简支,切取任一跨 i ,该跨除在壳顶面受法向荷载 $q_i(x, \theta)$ 外,并受被移去部分的纵向作用力 $P_i^{(0)}(\theta, r)$ 和 $P_i^{(l)}(\theta, r)$ (图1(b)). i 跨四边简支,承受荷载 $q_i(x, \theta)$, $P_i^{(0)}$ 和 $P_i^{(l)}$ 作用,作用于边界 $x_i=0, l_i$ 的纵向力 $P_i^{(0)}$ 和 $P_i^{(l)}$ 将由边界条件和连续条件来确定.为了建立 i 跨的状态方程,引入如下的单位脉冲函数:

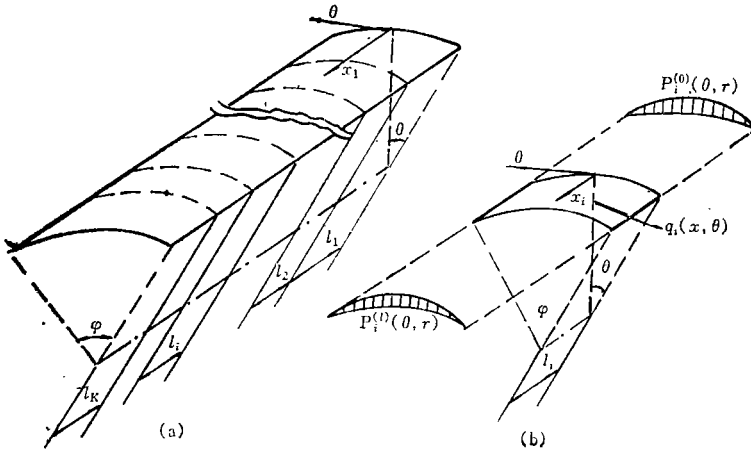


图1 正交异性连续开口圆柱壳

$$H(x_i) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } x_i=0 \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } x_i \neq 0 \text{ 时}) \end{cases}; \quad H(x_i - l_i) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } x_i=l_i \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } x_i \neq l_i \text{ 时}) \end{cases} \quad (x_i \in [0, l_i]) \quad (2.1)$$

由上面的定义得

$$\frac{dH(x_i)}{dx_i} = -\delta(x_i) = \begin{cases} -\infty & (\text{当 } x_i=0 \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } x_i \neq 0 \text{ 时}) \end{cases};$$

$$\frac{dH(x_i - l_i)}{dx_i} = \delta(x_i - l_i) = \begin{cases} \infty & (\text{当 } x_i=l_i \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } x_i \neq l_i \text{ 时}) \end{cases} \quad (2.2)$$

式中的 $\delta(x_i)$ 和 $\delta(x_i - l_i)$ 为Dirac函数.

参看图2, i 跨的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

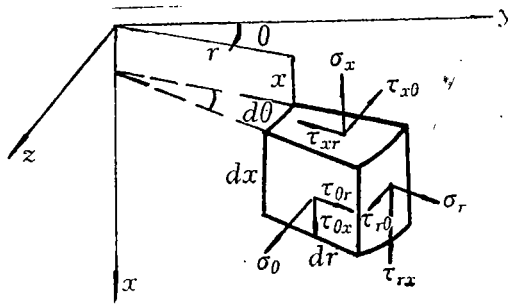


图2 柱坐标系中的壳体单元

令:

$$(\sigma_x)_i = (\bar{\sigma}_x)_i + H(x_i)P_i^{(0)}(\theta, r) + H(x_i - l_i)P_i^{(l)}(\theta, r) \quad (2.4)$$

把(2.4)式代入(2.3)式, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} &= \delta(x_i)P_i^{(0)} - \delta(x_i - l_i)P_i^{(l)} \\ \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

将(2.5)式中的 $\delta(x_i)P_i^{(0)} - \delta(x_i - l_i)P_i^{(l)}$ 设想为体积力, 则x方向的正应力场为 $\bar{\sigma}_x$.

将应变-位移关系代入正交异性体的应力-应变关系, 得

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{x\theta} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial x_i} \\ \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{pmatrix}_i \quad (2.6)$$

式中 U, V, W 分别是沿 x, θ 和 r 方向的位移. 记 $\alpha = \partial/\partial x_i, \beta = \partial/\partial \theta, \sigma = \sigma_r, X = \tau_{rx}, \Theta = \tau_{r\theta}$, 从(2.5)式和(2.6)式中消去 $\bar{\sigma}_x, \sigma_\theta$ 和 $\tau_{x\theta}$, 有 (见[2])

$$\frac{\partial}{\partial r} [U \ V \ \sigma \ X \ \Theta \ W]_i^T = \bar{D}_i(r) [U \ V \ \sigma \ X \ \Theta \ W]_i^T + \bar{B}_i \quad (2.7)$$

其中

$$\bar{D}_i(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\alpha \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{1}{r}\beta \\ \frac{C_3}{r}\alpha & \frac{C_4}{r^2}\beta & -\frac{C_5+1}{r} & -\alpha & -\frac{1}{r}\beta & \frac{C_4}{r^2} \\ -C_2\alpha^2 - \frac{C_6}{r^2}\beta^2 & -\frac{C_3+C_6}{r}\alpha\beta & C_1\alpha & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\alpha \\ -\frac{C_3+C_6}{r}\alpha\beta & -C_6\alpha^2 - \frac{C_4}{r^2}\beta^2 & \frac{C_5}{r}\beta & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4}{r^2}\beta \\ C_1\alpha & \frac{C_6}{r}\beta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\bar{B}_i = [0 \ 0 \ 0 \ \delta(x_i)P_i^{(0)} - \delta(x_i - l_i)P_i^{(1)} \ 0 \ 0]^T \quad (2.9)$$

式中 $C_1 = -C_{11}/C_{33}$, $C_2 = C_{11} - C_{12}^2/C_{33}$, $C_3 = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}$, $C_4 = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}$, $C_5 = -C_{23}/C_{33}$, $C_6 = C_{66}$, $C_7 = \frac{1}{C_{33}}$, $C_8 = \frac{1}{C_{55}}$, $C_9 = \frac{1}{C_{44}}$. 被消去的几个应力分量可写成 ([2]):

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{z\theta} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_2\alpha & \frac{C_3}{r}\beta & -C_1 & \frac{C_3}{r} \\ C_1\alpha & \frac{C_4}{r}\beta & -C_5 & \frac{C_4}{r} \\ \frac{C_6}{r}\beta & C_6\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} U \\ V \\ \sigma \\ W \end{bmatrix}_i \quad (2.10)$$

令

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_m \sum_n U_{mn}(r) \cos \frac{m\pi x_i}{l_i} \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi}, & V &= \sum_m \sum_n V_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x_i}{l_i} \cos \frac{n\pi\theta}{\varphi} \\ \sigma &= \sum_m \sum_n \sigma_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x_i}{l_i} \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi}, & X &= \sum_m \sum_n X_{mn}(r) \cos \frac{m\pi x_i}{l_i} \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \\ \Theta &= \sum_m \sum_n \Theta_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x_i}{l_i} \cos \frac{n\pi\theta}{\varphi}, & W &= \sum_m \sum_n W_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x_i}{l_i} \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

因 δ -函数有如下性质

$$\int_0^{l_i} \delta(x_i) f(x_i) dx_i = f(0), \quad \int_0^{l_i} \delta(x_i - l_i) f(x_i) dx_i = f(l_i) \quad (2.12)$$

将其展成余弦级数后, 有

$$\delta(x_i) = \frac{1}{l_i} + \frac{2}{l_i} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x_i}{l_i}, \quad \delta(x_i - l_i) = \frac{1}{l_i} + \frac{2}{l_i} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos \frac{m\pi x_i}{l_i} \quad (2.13)$$

于是可取

$$\delta(x_i)P_i^{(0)}(\theta, r) = \left(\frac{1}{l_i} + \frac{2}{l_i} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x_i}{l_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_{ni}^{(0)}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \quad (2.14a)$$

$$\delta(x_i - l_i)P_i^{(l)}(\theta, r) = \left(\frac{1}{l_i} + \frac{2}{l_i} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos \frac{m\pi x_i}{l_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_{ni}^{(l)}(r) \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \quad (2.14b)$$

把(2.11)和(2.14)式代入(2.7)式, 对每对 $m-n$, 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]_i^T \\ & = \mathbf{D}_i(r) [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]_i^T + \{\mathbf{B}_{mn}(r)\}_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

式中

$$\mathbf{D}_i(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\xi \\ 0 & \frac{i}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{\eta}{r} \\ -\frac{C_3}{r}\xi & -\frac{C_4}{r^2}\eta & -\frac{C_6+1}{r} & \xi & \frac{\eta}{r} & \frac{C_4}{r^2} \\ C_2\xi^2 + \frac{C_6}{r^2}\eta^2 & \frac{C_3+C_6}{r}\xi\eta & C_1\xi & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\xi \\ \frac{C_5+C_6}{r}\xi\eta & C_6\xi^2 + \frac{C_4}{r^2}\eta^2 & \frac{C_5}{r}\eta & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4}{r^2}\eta \\ -C_1\eta & -\frac{C_6}{r}\eta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_6}{r} \end{bmatrix}_i \quad (2.16)$$

$$\xi = \frac{m\pi}{l_i}, \quad \eta = \frac{n\pi}{\varphi} \quad (2.17)$$

$$\{\mathbf{B}_{mn}(r)\}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l_i} (P_{ni}^{(0)}(r) - (-1)^m P_{ni}^{(l)}(r)) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (m \neq 0) \quad (2.18a)$$

$$\{\mathbf{B}_{mn}(r)\}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_i} (P_{ni}^{(0)}(r) - P_{ni}^{(l)}(r)) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (m = 0) \quad (2.18b)$$

方程(2.15)叫变系数非齐次状态方程。根据方程(2.15)并考虑(2.16)~(2.18)式可证明各力学量不可能是坐标 r 的多项式。例如, 若 $U_{mn}(r)$, $\sigma_{mn}(r)$, $\Theta_{mn}(r)$ 是变量 r 的 l 次多项式, 由方程(2.15)的第2, 4, 6三行可见, $V_{mn}(r)$, $X_{mn}(r)$ 和 $W_{mn}(r)$ 应是 r 的 $l+1$ 次多项式。若如此, 考察同一方程的其余三行可见, $U_{mn}(r)$, $\sigma_{mn}(r)$, $\Theta_{mn}(r)$ 又将是 r 的 $l+2$ 次多项式, 从而与原设矛盾。

三、具有正交异性层的叠层连续开口圆柱壳状态方程的解

图3(a)所示为一由 p 层正交异性材料构成的连续开口圆柱壳, 图3(b)是其中第 j 层($j=1, 2, \dots, p$)放大图。将 j 层分成 k_j 个薄层, 薄层厚度均为 $d_j = h_j/k_j$, 各薄层的中间半径分别用 $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jk_j}$ 表示。

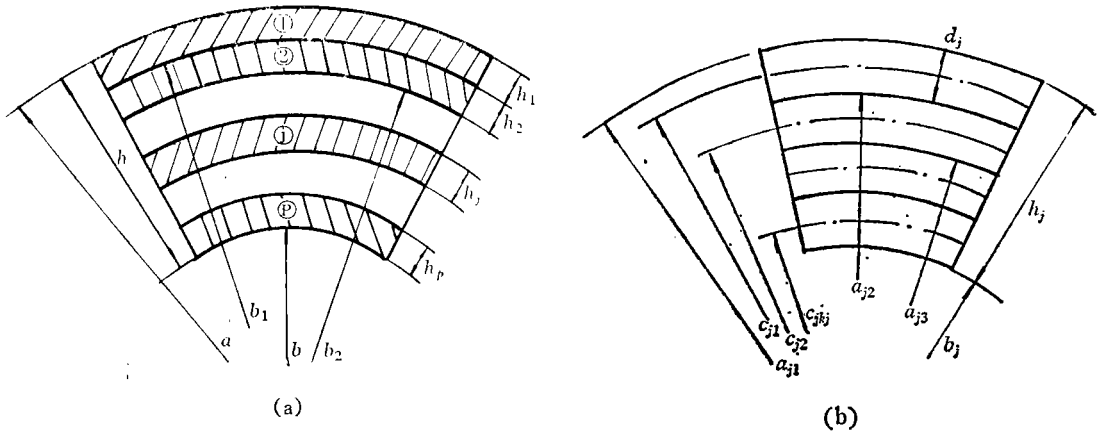


图3 具有正交异性层的叠层连续开口圆柱壳

现对第一个薄层建立其状态方程。因在薄层内 r 变化不大，用 C_{j1} 代替矩阵(2.16)中的变量 r ，当不致引起较大的误差。这样，其状态方程可由(2.15)式得到：

$$\frac{d}{dr} [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]_{i,j1}^T = \mathbf{D}_{i,j1} [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]_{i,j1}^T + \mathbf{B}_{i,j1}(r) \quad (3.1)$$

矩阵中的脚码 $ij1$ 表示所讨论的问题属于 i 跨 j 层中的第一个薄层。矩阵 $\mathbf{D}_{i,j1}$ 是常元素矩阵，它是用 C_{j1} 置换矩阵(2.16)中的 r 得到的。为方便起见，脚码 i 可上下移动，这样，列阵 $\mathbf{B}_{i,j1}(r)$ 可写成

$$\mathbf{B}_{j1}^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l_i} (P_{nj1}^{(i,0)}(r) - (-1)^m P_{nj1}^{(i,l)}(r)) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (m \neq 0) \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B}_{j1}^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_i} (P_{nj1}^{(i,0)}(r) - P_{nj1}^{(i,l)}(r)) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (m=0) \quad (3.2b)$$

若叠层壳各层都很薄，仅需分别用每层的平均半径代换矩阵(2.16)中的 r 。当某些层较厚时，通过计算若发现随着 k_j 值的增加，要求的有效数字几乎不变，便可认为相应此时 k_j 值所得的结果是在满足精度要求意义下的精确值。必须指出，绝对精确的事物是不存在的，重要的事情不是误差，而是误差是否可控。因此，只要薄层充分薄，有理由认为 $P_{nj1}^{(i,0)}(r)$ 和 $P_{nj1}^{(i,l)}(r)$ 在薄层内是线性分布的，即有

$$P_{nj1}^{(i,0)}(r) = A_{nj1}^{(i,0)} + \frac{A_{nj1}^{(i,0)} - A_{nj2}^{(i,0)}}{d_j} (r - a_{j1}),$$

$$P_{nj1}^{(i,l)}(r) = A_{nj1}^{(i,l)} + \frac{A_{nj1}^{(i,l)} - A_{nj2}^{(i,l)}}{d_j} (r - a_{j1}) \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}] \quad (3.3)$$

此处， $A_{nj1}^{(i,0)}$ ， $A_{nj2}^{(i,0)}$ ， $A_{nj1}^{(i,l)}$ ， $A_{nj2}^{(i,l)}$ 是线性函数的端点值，它们应由边界条件和连续条件来确定。

方程(3.1)的解是 ([5], p173, 196)

$$\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(r) = \mathbf{G}_{j1}^{(i)}(r - a_{j1}) \mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) + \mathbf{C}_{j1}^{(i)}(r - a_{j1}) \quad (r \in [a_{j1}, a_{j2}]) \quad (3.4)$$

式中 $\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(r) = [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]_{i,j1}^T \quad (3.5a)$

$$\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) = [U_{mn}(a_{j1}) \quad V_{mn}(a_{j1}) \quad \sigma_{mn}(a_{j1}) \quad X_{mn}(a_{j1}) \quad \Theta_{mn}(a_{j1}) \quad W_{mn}(a_{j1})]_{i,j1}^T \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{G}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1}) = \exp[\mathbf{D}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1})] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{C}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1}) = \int_{a_{j1}}^r \exp[\mathbf{D}_{j1}^{(i)}(r-\tau)] \cdot \mathbf{B}_{j1}^{(i)}(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

为了计算 $\mathbf{G}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1})$ 和 $\mathbf{C}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1})$, 需考虑矩阵 $\mathbf{D}_{j1}^{(i)}$ 的特征值. 令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ 是特征方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_{j1}^{(i)}| = 0$ (\mathbf{I} 是单位阵)的根, 而 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_6$ 分别是特征矢量, 则由线性代数知必存在一个矩阵 $\mathbf{P}_{ij1} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_6]_{ij1}$ 及其逆阵 \mathbf{P}_{ij1}^{-1} 能将 $\mathbf{D}_{j1}^{(i)}$ 变换成对角阵, 并有

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1}) &= \exp[\mathbf{D}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1})] \\ &= \mathbf{P}_{ij1} \cdot \begin{bmatrix} \exp[\lambda_1(r-a_{j1})] & & & & & \\ & \exp[\lambda_2(r-a_{j1})] & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \exp[\lambda_6(r-a_{j1})] & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{j11} \cdot \mathbf{P}_{ij1}^{-1} \quad (3.8) \end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{j1}^{(i)}(r-a_{j1}) &= \int_{a_{j1}}^r \mathbf{P}_{ij1} \cdot \begin{bmatrix} \exp[\lambda_1(r-\tau)] & & & & & \\ & \exp[\lambda_2(r-\tau)] & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \exp[\lambda_6(r-\tau)] & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{j11} \cdot \mathbf{P}_{ij1}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{j1}^{(i)}(\tau) d\tau \quad (3.9) \end{aligned}$$

在(3.4)式中令 $r=a_{j2}$, 考虑到 $a_{j2}-a_{j1}=-d_j$, 有

$$\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j1}^{(i)}(-d_j) \mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) + \mathbf{C}_{j1}^{(i)}(-d_j) \quad (3.10)$$

对第二个薄层进行类似计算, 得

$$\mathbf{R}_{j2}^{(i)}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j2}^{(i)}(-d_j) \mathbf{R}_{j2}^{(i)}(a_{j2}) + \mathbf{C}_{j2}^{(i)}(-d_j) \quad (3.11)$$

值得注意的是(3.10)式中的 $\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j2})$ 是第一个薄层下表面的力学量, 而(3.11)式中的 $\mathbf{R}_{j2}^{(i)}(a_{j2})$ 是第二个薄层上表面的力学量, 该二组量应相等. 考虑(3.10)和(3.11)两式后, 有

$$\mathbf{R}_{j2}^{(i)}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j2}^{(i)}(-d_j) \mathbf{G}_{j1}^{(i)}(-d_j) \mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) + \mathbf{G}_{j2}^{(i)}(-d_j) \mathbf{C}_{j1}^{(i)}(-d_j) + \mathbf{C}_{j2}^{(i)}(-d_j) \quad (3.12)$$

依次类推, 可将第 k_j 个薄层底面和第一个薄层顶面之间的力学量用下式联系起来:

$$\mathbf{R}_{jk_j}^{(i)}(b_j) = \mathbf{E}_{jk_j}^{(i)} \mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) + \bar{\mathbf{E}}_{jk_j}^{(i)} \quad (3.13)$$

其中

$$\mathbf{E}_{jk_j}^{(i)} = \mathbf{G}_{jk_j}^{(i)} \mathbf{G}_{jk_j-1}^{(i)} \dots \mathbf{G}_{j2}^{(i)} \mathbf{G}_{j1}^{(i)} \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{jk_j}^{(i)} = \mathbf{G}_{jk_j}^{(i)} (\mathbf{G}_{jk_j-1}^{(i)} \dots \mathbf{G}_{j2}^{(i)} \mathbf{C}_{j1}^{(i)} + \mathbf{G}_{jk_j-1}^{(i)} \dots \mathbf{G}_{j3}^{(i)} \mathbf{C}_{j2}^{(i)} + \dots + \mathbf{C}_{jk_j-1}^{(i)}) + \mathbf{C}_{jk_j}^{(i)} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{G}_{j_s}^{(i)} = \mathbf{G}_{j_s}^{(i)}(-d_j), \quad \mathbf{C}_{j_s}^{(i)} = \mathbf{C}_{j_s}^{(i)}(-d_j) \quad (s=1, 2, \dots, k_j) \quad (3.16)$$

事实上, (3.13)式对图3(a)中各层均成立. 当 $j=1, 2$ 时, 分别有

$$\mathbf{R}_{1k_1}^{(i)}(b_1) = \mathbf{E}_{1k_1}^{(i)} \mathbf{R}_{11}^{(i)}(a_{11}) + \bar{\mathbf{E}}_{1k_1}^{(i)}, \quad \mathbf{R}_{2k_2}^{(i)}(b_2) = \mathbf{E}_{2k_2}^{(i)} \mathbf{R}_{21}^{(i)}(a_{21}) + \bar{\mathbf{E}}_{2k_2}^{(i)} \quad (3.17)$$

由图3(a)可见, $a_{11}=a$, $a_{21}=b_1$, a 和 b_1 是第1, 2两层上表面半径. 根据第1, 2两层间应力和位移的连续条件, 有

$$R_{1k_1}^{(i)}(b_1) = R_{21}^{(i)}(a_{21}) = R_{21}^{(i)}(b_1) \quad (3.18)$$

将(3.17)式的前式代入后式, 并考虑(3.18)式, 得

$$R_{2k_2}^{(i)}(b_2) = E_{2k_2}^{(i)} E_{1k_1}^{(i)} R_{11}^{(i)}(a) + E_{2k_2}^{(i)} \bar{E}_{1k_1}^{(i)} \bar{E} + \bar{E}_{2k_2}^{(i)} \quad (3.19)$$

逐层类推, 可将整个叠层壳顶面和底面之间的力学量通过下式联系起来

$$R_{pk_p}^{(i)}(b) = \Pi^{(i)} R_{11}^{(i)}(a) + \bar{\Pi}^{(i)} \quad (3.20)$$

其中
$$\Pi^{(i)} = \prod_{j=p}^1 E_{jk_j}^{(i)} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{(i)} = & E_{pk_p}^{(i)} (E_{p-1, k_{p-1}}^{(i)} \cdots E_{2k_2}^{(i)} \bar{E}_{1k_1}^{(i)} + E_{p-1, k_{p-1}}^{(i)} \cdots E_{3k_3}^{(i)} \bar{E}_{2k_2}^{(i)} + \cdots + \bar{E}_{p-1, k_{p-1}}^{(i)}) \\ & + \bar{E}_{pk_p}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.20)式中的 $R_{11}^{(i)}(a)$ 叫 i 跨初始值. $\Pi^{(i)}$ 是 (6×6) 常元素矩阵, $\bar{\Pi}^{(i)}$ 是 (6×1) 列阵, 含待定系数 $A_{nj_s}^{(i, a)}$ 和 $A_{nj_s}^{(i, l)}$ (见(3.3)式). 通常作用在壳顶面和底面的荷载是预先给定的, 所以, (3.20)式是一组代数方程, 含顶面和底面6个位移分量和边界力. 当法向压强 $q_i(x, \theta) = q = \text{const}$ 时, 把 q 按(2.11)式中的 p -级数形式展开, 得 $\sigma_{mn}(a) = -16q/(mn\pi^2)$, ($m=1, 3, 5, \dots$). 此时有 $X_{mn}(a) = \Theta_{mn}(a) = X_{mn}(b) = \Theta_{mn}(b) = \sigma_{mn}(b) = 0$. 取矩阵方程(3.20)的第3、4、5三行, 得

$$\begin{Bmatrix} U_{mn}(a) \\ V_{mn}(a) \\ W_{mn}(a) \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}_i^{-1} \left(\frac{16q}{mn\pi^2} \begin{Bmatrix} \Pi_{33} \\ \Pi_{43} \\ \Pi_{53} \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_3 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{Bmatrix}_i \right) \quad (3.23)$$

利用边界条件和连续条件, 列阵 $[\bar{\Pi}_3 \ \bar{\Pi}_4 \ \bar{\Pi}_5]^T$ 可求. 于是, 由(3.23)式可解出 $[U_{mn}(a) \ V_{mn}(a) \ W_{mn}(a)]^T$, 从而初始值 $R_{11}^{(i)}(a)$ 已知. $R_{11}^{(i)}(a)$ 求出后, 利用(3.4)式并令 $j=1$ 可计算第一层中第一个薄层力学量. 第一个薄层下表面力学量求出后, 又可作为第二个薄层初始值, 显然, 第二个薄层力学量可求. 依次类推, 第一层力学量处处可求. 同理, 整个叠层壳可解.

四、边界条件和连续条件

由(2.10)和(2.11)式可见, 简支边 ($\theta=0, \varphi$) 的边界条件已满足, 即有 $W^{(i)} = U^{(i)} = \sigma_\theta^{(i)} = 0$ ($i=1, 2, \dots, K$).

考虑 x 方向的边界条件, 有

$$P_j^{(i, 0)} = 0 \text{ (如 } x_1=0 \text{ 处简支); } P_j^{(K, l)} = 0 \text{ (如 } x_K=l_K \text{ 处简支)} \quad (4.1)$$

$$U_j^{(1)}|_{x_1=0} = 0 \text{ (如 } x_1=0 \text{ 处固支); } U_j^{(K)}|_{x_K=l_K} = 0 \text{ (如 } x_K=l_K \text{ 处固支)} \quad (4.2)$$

由(2.10)和(2.11)式可见, 在 $x_1=0$ 和 $x_K=l_K$ 处, 边界条件 $W^{(i)} = V^{(i)} = \bar{\sigma}_x^{(i)} = 0$ ($i=1, K$) 已满足. x 方向的连续条件是

$$P_j^{(i, l)} = P_j^{(i+1, 0)} \quad (i=1, 2, \dots, K-1) \quad (4.3)$$

$$U_j^{(i)}|_{x_i=l_i} = U_j^{(i+1)}|_{x_{i+1}=0} \quad (i=1, 2, \dots, K-1) \quad (4.4)$$

关于情况(4.1), (4.3)式对每层有 $K-1$ 个未知力, 而(4.4)式给出 $K-1$ 个条件方程. 关于情况(4.2), 对每层有 $K+1$ 个未知量, (4.2)和(4.4)式恰好给出 $K+1$ 个方程. 为了满足(4.2)和(4.4)式, 由(2.11)式知必须有

$$\sum_n \left[\sum_m U_{mn}^{(i)}(r) \right]_j \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} = 0, \quad \sum_n \left[\sum_m (-1)^m U_{mn}^{(K)}(r) \right]_j \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} = 0 \quad (4.5)$$

$$\sum_n \left[\sum_m (-1)^m U_{mn}^{(i)}(r) \right]_j \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} = \sum_n \left[\sum_m U_{mn}^{(i+1)}(r) \right]_j \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} \quad (4.6)$$

以上二式对任意 θ 均成立, 故有

$$\sum_m [U_{mn}^{(i)}(r)]_j = 0, \quad \sum_m (-1)^m [U_{mn}^{(K)}(r)]_j = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum_m (-1)^m [U_{mn}^{(i)}(r)]_j = \sum_m [U_{mn}^{(i+1)}(r)]_j \quad (4.8)$$

为了建立 $U_{mn}^{(i)}(r)$ 表达式, 需将 j 层内任一薄层 k 的力学量用初始值表示. 仿照 (3.13) 式的推导过程, j 层内第 k 个薄层力学量可用 j 层上表面力学量表示:

$$\mathbf{R}_{jk}^{(i)}(r) = \mathbf{E}_{jk}^{(i)}(r) \mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) + \bar{\mathbf{E}}_{jk}^{(i)}(r) \quad (4.9)$$

式中
$$\mathbf{E}_{jk}^{(i)}(r) = \mathbf{G}_{jk}^{(i)}(r - a_{jk}) \mathbf{G}_{j,k-1}^{(i)} \cdots \mathbf{G}_{j2}^{(i)} \mathbf{G}_{j1}^{(i)} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{jk}^{(i)}(r) = & \mathbf{G}_{jk}^{(i)}(r - a_{jk}) (\mathbf{G}_{j,k-1}^{(i)} \cdots \mathbf{G}_{j2}^{(i)} \mathbf{C}_{j1}^{(i)} + \mathbf{G}_{j,k-1}^{(i)} \cdots \mathbf{G}_{j3}^{(i)} \mathbf{C}_{j2}^{(i)} + \cdots + \mathbf{C}_{j,k-1}^{(i)}) \\ & + \mathbf{C}_{jk}^{(i)}(r - a_{jk}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{G}_{js}^{(i)} = \mathbf{G}_{js}^{(i)}(-d_j), \quad \mathbf{C}_{js}^{(i)} = \mathbf{C}_{js}^{(i)}(-d_j) \quad (s=1, 2, \dots, K-1) \quad (4.12)$$

再仿照(3.20)式的推导, j 层 ($j > 1$) 顶面力学量可用初始值表示如下:

$$\mathbf{R}_{j1}^{(i)}(a_{j1}) = \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{j-1}^{(i)} \mathbf{R}_{11}^{(i)}(a) + \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{j-1}^{(i)} \quad (j > 1) \quad (4.13)$$

式中
$$\bar{\boldsymbol{\Pi}}_{j-1}^{(i)} = \mathbf{E}_{j-1,k_{j-1}}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_{j-2,k_{j-2}}^{(i)} \cdots \mathbf{E}_{2k_2}^{(i)} \cdot \mathbf{E}_{1k_1}^{(i)} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{j-1}^{(i)} = & \mathbf{E}_{j-1,k_{j-1}}^{(i)} (\mathbf{E}_{j-2,k_{j-2}}^{(i)} \cdots \mathbf{E}_{2k_2}^{(i)} \bar{\mathbf{E}}_{1k_1}^{(i)} + \mathbf{E}_{j-2,k_{j-2}}^{(i)} \cdots \mathbf{E}_{3k_3}^{(i)} \bar{\mathbf{E}}_{2k_2}^{(i)} \\ & + \cdots + \bar{\mathbf{E}}_{j-2,k_{j-2}}^{(i)}) + \bar{\mathbf{E}}_{j-1,k_{j-1}}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

把(4.13)式代入(4.9)式, 得

$$\mathbf{R}_{jk}^{(i)}(r) = \boldsymbol{\Pi}_{jk}^{(i)}(r) \mathbf{R}_{11}^{(i)}(a) + \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{jk}^{(i)}(r) \quad (j > 1) \quad (4.16)$$

式中
$$\boldsymbol{\Pi}_{jk}^{(i)}(r) = \mathbf{E}_{jk}^{(i)}(r) \boldsymbol{\Pi}_{j-1}^{(i)}, \quad \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{jk}^{(i)} = \mathbf{E}_{jk}^{(i)}(r) \bar{\boldsymbol{\Pi}}_{j-1}^{(i)} + \bar{\mathbf{E}}_{jk}^{(i)}(r) \quad (4.17)$$

(4.16)式给出了 j 层内第 k 个薄层的力学量和初始值之间的关系.

当 $j=1$ 时, (4.16)式应由(4.9)式代替并令 $j=1$. 如果叠层壳的顶面受法向均布压强 q 作用, 取矩阵方程(4.16)的第一行, 得

$$\begin{aligned} [U_{mn}^{(i)}(r)]_{jk} = & [\boldsymbol{\Pi}_{11}^{(i)}(r) \quad \boldsymbol{\Pi}_{12}^{(i)}(r) \quad \boldsymbol{\Pi}_{16}^{(i)}(r)]_{jk} \begin{Bmatrix} U_{mn}(a) \\ V_{mn}(a) \\ W_{mn}(a) \end{Bmatrix}_i \\ & - \frac{16q}{m\pi^2} [\boldsymbol{\Pi}_{13}^{(i)}(r)]_{jk} + [\bar{\boldsymbol{\Pi}}_1^{(i)}(r)]_{jk} \end{aligned} \quad (4.18)$$

将(3.23)式代入(4.18)式, 有

$$[U_{mn}^{(i)}(r)]_{jk} = [\Pi_{11}^{(i)}(r) \quad \Pi_{12}^{(i)}(r) \quad \Pi_{16}^{(i)}(r)]_{jk} \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}_i^{-1} \cdot \left(\frac{16q}{mn\pi^2} \begin{Bmatrix} \Pi_{33} \\ \Pi_{43} \\ \Pi_{53} \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_3 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{Bmatrix}_i \right) - \frac{16q}{mn\pi^2} [\Pi_{13}^{(i)}(r)]_{jk} + [\bar{\Pi}_1^{(i)}(r)]_{jk}$$

$$(m=0, 1, 2, \dots; n=1, 3, 5, \dots; j=1, 2, \dots, p; i=1, 2, \dots, K; k=1, 2, \dots, k_j) \quad (4.19)$$

当 $m=0, 2, 4, \dots$ 时, 荷载项应为零。

对于每对 $m-n$, 在(4.19)式中令 $r=a_{jk}$ 和 b_j (见图3), 并将它代入(4.7)和(4.8)式, 便得到关于 $A_{nj_k}^{(1)j_0}$ 和 $A_{nj_k}^{(i)j_1}$ ($i=1, 2, \dots, K$) 的 $K+1$ 个方程。令 $j=1, 2, \dots, p$ 和 $k=1, 2, \dots, k_j$, 总共有 $(k_1+k_2+\dots+k_p+p)(K+1)$ 个方程可用来求解相同数目的未知量。于是初始值可利用(3.23)式求得, 全壳可解。

需强调指出, 沿 r 方向的边界仅有有限点固定会引起一定误差。然而, 因是薄层, 故误差不大且可控。迄今未见任何一种理论或方法能将全部边界固定。

五、算 例

下面给出的算例是用4倍精度在计算机SIEMENS/7570C上进行的。表中 I_1, I_2, I_3 分别是上、中、下层被分割的薄层数。

算例 两跨三层连续圆柱壳 (图1, $l_1=l_2=l$) 顶面受法向均布压强 q 作用, $\theta=0, \varphi$ 两边简支, $x=0, 2l$ 两边分别固支和简支。壳体上下两层材料相同, 每层都有如下的弹性常数比:

$$C_{12}/C_{11}=0.246269, C_{13}/C_{11}=0.0831715,$$

$$C_{22}/C_{11}=0.543103, C_{23}/C_{11}=0.115017,$$

$$C_{35}/C_{11}=0.530172, C_{44}/C_{11}=0.266810,$$

$$C_{55}/C_{11}=0.159914, C_{66}/C_{11}=0.262931,$$

$$C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}=5.$$

$C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别是上、中两层材料的 C_{11} 值。当 $C_{11}^{(1)}=C_{11}^{(2)}=C_{11}$ 时, 该叠层壳蜕化为单层壳。壳体具有如下的几何参数:

$$h_1=h_3=0.1h, h_2=0.8h, S=l=R_0$$

S 和 R_0 分别表示中面弧长和半径。

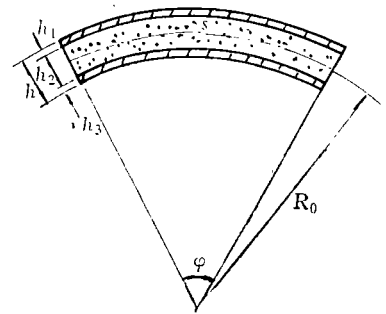


图4 三层连续圆柱壳

表 1 不同分层情况下三层连续开口壳的应力和挠度

r	h/R_0	$I_1 \quad I_2 \quad I_3$	$WC_{11}^{(2)}/(qh)$	$WC_{11}^{(2)}/(qh)$	σ_x/q	σ_x/q	σ_x/q
			$x_1=\frac{l}{2}, \theta=\frac{\varphi}{2}$	$x_2=\frac{l}{2}, \theta=\frac{\varphi}{2}$	$x_1=0, \theta=\frac{\varphi}{2}$	$x_1=\frac{l}{2}, \theta=\frac{\varphi}{2}$	$x_2=\frac{l}{2}, \theta=\frac{\varphi}{2}$
$R_0+0.5h$	0.6	3 12 3	-1.9008	-1.9632	16.7907	-2.8063	-3.0848
		4 14 4	-1.9017	-1.9631	18.5418	-2.7826	-3.0433
		4 15 4	-1.9016	-1.9627	18.5384	-2.7830	-3.0409

表 2

 h/R_0 取不同比值时三层连续开口壳的应力

h/R_0	0.2		0.4		0.6	
	本文解 $I_1=I_3=3$ $I_2=10$	SAP5	本文解 $I_1=I_3=4$ $I_2=12$	SAP5	本文解 $I_1=I_3=4$ $I_2=14$	SAP5
$\sigma_x/q(x_1=1/2, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	-10.867	-10.820	-3.912	-3.533	-2.783	-2.649
外层内表面	-7.206	-8.672	-1.688	-2.464	-0.580	-1.048
中层外表面	-1.543	-1.810	-0.447	-0.599	-0.229	-0.339
中层内表面	0.783	0.527	0.046	-0.079	-0.083	-0.172
内层外表面	3.884	2.608	0.201	-0.230	-0.418	-0.568
内层内表面	7.731	6.081	2.866	2.445	1.756	1.534
$\sigma_\theta/q(x_1=1/2, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	-10.044	-12.908	-4.188	-5.706	-2.716	-3.951
外层内表面	-8.190	-11.407	-3.087	-4.830	-1.807	-2.975
中层外表面	-1.778	-2.364	-0.768	-1.083	-0.517	-0.738
中层内表面	0.577	0.267	0.348	0.219	0.163	0.081
内层外表面	2.843	1.301	1.699	1.273	0.812	0.722
内层内表面	5.178	3.863	3.677	3.431	2.629	2.523
$\sigma_z/q(x_1=0, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	53.719	19.100	25.222	8.705	18.542	7.367
外层内表面	-16.602	5.680	-12.720	-2.500	-9.967	-3.682
中层外表面	-3.320	1.136	-2.544	-0.500	-1.994	-0.736
中层内表面	2.572	-0.772	1.695	0.530	0.957	0.452
内层外表面	12.861	-3.861	8.475	2.651	4.786	2.259
内层内表面	-42.355	-16.490	-13.332	-5.081	-5.749	-2.311
$\tau_{rx}/q(x_1=0, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	0.000	-10.093	0.000	-5.013	0.000	-3.726
外层内表面	-2.457	-10.021	-1.369	-4.906	-1.015	-3.565
中层外表面	-2.457	-2.004	-1.369	-0.981	-1.015	-0.713
中层内表面	-1.895	-1.726	-0.805	-0.606	-0.429	-0.279
内层外表面	-1.895	-8.632	-0.805	-3.032	-0.429	-1.395
内层内表面	0.000	-8.628	0.000	-2.983	0.000	-1.343
$\sigma_x/q(x_2=1/2, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	-13.801	-14.400	-4.562	-4.369	-3.043	-2.960
外层内表面	-9.862	-11.530	-2.326	-3.058	-0.959	-1.340
中层外表面	-2.071	-2.387	-0.574	-0.717	-0.304	-0.398
中层内表面	0.998	0.733	0.063	-0.063	-0.105	-0.199
内层外表面	4.950	3.571	0.283	-0.171	-0.527	-0.699
内层内表面	9.069	7.684	2.979	2.692	1.676	1.508
$\sigma_\theta/q(x_2=1/2, \theta=\varphi/2)$						
外层外表面	-11.156	-14.960	-4.305	-5.981	-2.773	-4.110
外层内表面	-9.108	-12.938	-3.173	-5.020	-1.878	-3.106
中层外表面	-1.959	-2.677	-0.785	-1.120	-0.530	-0.764
中层内表面	0.724	0.369	0.375	0.240	0.178	0.090
内层外表面	3.565	1.742	1.829	1.361	0.882	0.773
内层内表面	6.158	4.771	3.871	3.657	2.764	2.685

表 3 h/R_0 取不同比值时单层连续开口壳的位移

h/R_0	0.1		0.2	
	本文解 $I_2=I_3=2$ $I_2=8$	SAP5	本文解 $I_1=I_3=3$ $I_2=10$	SAP5
$WC_{11}/(qh)$ ($x_1=1/2, \theta=\varphi/2$) $r=R_0+0.5h$ $r=R_0-0.5h$	-252.254	-233.710	-33.061	-32.172
	-253.492	-234.913	-32.675	-32.100
$WC_{11}/(qh)$ ($x_2=1/2, \theta=\varphi/2$) $r=R_0+0.5h$ $r=R_0-0.5h$	-335.102	-317.645	-40.476	-39.842
	-336.921	-319.686	-40.222	-39.924
$VC_{11}/(qh)$ ($x_1=1/2, \theta=0$) $r=R_0+0.5h$ $r=R_0+0.4h$ $r=R_0-0.4h$ $r=R_0-0.5h$	-13.107	-10.111	1.966	1.801
	-22.509	-18.132	-0.497	-0.418
	-91.877	-78.190	-15.378	-14.585
	-101.049	-86.090	-17.513	-16.643

注：本表结果是用三层壳的程序计算的，即令 $C_{11}^{(1)} = C_{11}^{(2)} = C_{11}$ 。

数值结果示于表1、表2和表3，级数取项为 $m=0, 1, 2, \dots, 122, n=1, 3, 5, \dots, 29$ 。由表1可见，分层法收敛速度很快。若取相应于 $I_1=I_3=4, I_2=14$ 的结果作为本问题的解，误差很小。表2和表3中列有利用SAP5的三维有限元解，考虑对称性，对 $1/2$ 壳采用16节点24个等参元。

表2给出不同比值 h/R_0 下的三层连续开口圆柱壳的应力。与SAP5解对比可见，在壳的内点处有限元解误差不大，但在边界 ($x_1=0$) 点，差异明显，有时甚至连应力的正、负号都改变了。此外，SAP5算得的 $x_1=0$ 处的 τ_{rz} 值是错的，因它们在顶面和底面不为零，且不足层间连续条件。所有这些可解释如下：

(1) 通常有限元计算边界应力时精度较差。

(2) 给定的算例第1、3两层很薄，单元三个方向尺寸差别较大，在此情况下，有限元不能给出较满意的结果。

(3) 精确解在边界上固定点数远多于SAP5解，所以边界上的最大应力值也远大于SAP5解。如都只固定5点，计算发现，精确解算得的 $x_1=0$ 处的 σ_z 的最大值减小到约为SAP5解的2倍。

当 $C_{11}^{(1)} = C_{11}^{(2)} = C_{11}$ 时，三层壳蜕化为单层壳，两种方法算得的位移值差别不大，见表3。

六、结 论

本文对薄的，中厚的和强厚的叠层连续开口圆柱壳给出统一的解析解。物理概念清晰。克服了诸家板壳理论由于基本方程间的互不相容而引起的种种矛盾和限制的缺点。数值结果表明，分层法具有收敛快、精度高，误差可控等特点。本文解满足层间应力和位移的连续条件，而通常的有限元解却难做到这点。

参 考 文 献

- [1] A. Bhimaraddi, Free vibration analysis of doubly curved shallow shells on rectangular planform using three-dimensional elasticity theory, *Int. J. Solids Structures*, 27(7) (1991), 897—913.
- [2] Fan Jiarang and Zhang Juyong, Exact solutions for thick laminated shells, *Science in China (Series A)*, 35(11) (1992), 1343—1355.
- [3] Fan Jiarang and Zhang Juyong, Analytical solutions for thick doubly curved laminated shells, *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, 118(7) (1992), 1338—1356.
- [4] T. D. Hawkes and K. P. Soldatos, Three-dimensional axisymmetric vibrations of orthotropic and cross-ply laminated hollow cylinders, *AIAA J.*, 30(4) (1992), 1089—1098.
- [5] B. Richard, *Introduction to Matrix Analysis* (Second Edition), McGraw-Hill Book Company (1970).
- [6] K. P. Soldatos and V. P. Hadjigeorgiou, Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels, *J. Sound and Vib.*, 137(3) (1990), 369—384.

Exact Solution for Laminated Continuous Open Cylindrical Shells

Fan Jiarang Sheng Hongyu

(Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. Chian)

Abstract

Discarding any assumptions about displacement models and stress distribution and introducing δ -function into the present study, the state equation for the continuous orthropic open cylindrical shells is established. An identical exact solution is presented for the statics of thin, moderately thick and thick laminated continuous open cylindrical shells. Numerical results are obtained and compared with those calculated using SAP5.

Key words laminated continuous open cylindrical shell, orthotropy, state equation, exact solution