

半平面压电体的Green函数及其应用*

刘金喜¹ 王彪¹ 杜善义¹

(1996年7月29日收到)

摘 要

本文研究半平面压电体在线力、电荷和位错作用下的弹性场和电场, 即 Green 函数。基于各向异性弹性力学中的Stroh方法和解析延拓理论, 推导了 Green 函数的封闭形式的解。作为解的应用, 分析了含半无限裂纹的无限大压电介质的机电耦合场, 给出了应力和电位移强度因子的解析表达式。

关键词 半平面压电体 Green 函数 半无限裂纹 应力强度因子 电位移强度因子

一、引 言

研究压电材料耦合场方程的基本解, 即Green函数, 具有重要的理论意义和应用价值。关于压电介质的基本解, 最近的工作包括: 文献[1,2]用Fourier变换技术分别得到了简化后的横观各向同性和各向同性压电介质的基本解; 本文作者^[3]用平面波分解法推导了一般各向异性压电介质的基本解; 文[4]使用状态空间法研究了横观各向同性半平面压电体在边界上作用集中力和点电荷的弹性场和电场; 文[5]通过Stroh方法求解了半平面压电体的接触问题。对于半平面压电体内作用有线力、电荷和位错的电弹耦合场, 尚未见文献报导。

本文使用各向异性弹性力学中的Stroh方法和解析延拓理论, 推导了半平面压电体在线力、电荷和位错作用下的 Green 函数。作为解的直接应用, 给出了含半无限裂纹压电材料的 Green 函数, 分析了裂纹尖端的应力和电位移场, 得到了应力和电位移强度因子的解析表达式。

二、压电材料的基本方程

在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下, 线性压电材料的基本方程为

1. 本构方程

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \gamma_{mn} - e_{nij} E_n, \quad D_i = e_{imn} \gamma_{mn} + \epsilon_{in} E_n \quad (2.1)$$

式中 σ_{ij} , γ_{ij} , D_i 和 E_i 分别为应力、应变、电位移和电场; C_{ijmn} , e_{nij} 和 ϵ_{in} 分别为材料的

* 国家自然科学基金资助项目。

1 哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001.

弹性、压电和介电常数.

2. 梯度方程

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.2)$$

其中, 下角逗号表示关于坐标的偏导数, u 和 φ 分别为弹性位移和电势.

3. 平衡方程

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (2.3)$$

式中忽略了体力 and 自由电荷.

鉴于弹性变量和电变量之间的相似性, 等同的处理它们在压电边值问题的分析中是方便的. 为此, 引入下面的表示形式^[6]

$$U_M = \begin{cases} u_m & (M=1,2,3) \\ \varphi & (M=4) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \gamma_{mn} & (M=1,2,3) \\ -E_n & (M=4) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & (J=1,2,3) \\ D_i & (J=4) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn} & (J, M=1,2,3) \\ e_{nij} & (M=4, J=1,2,3) \\ e_{imn} & (J=4, M=1,2,3) \\ -\varepsilon_{in} & (J, M=4) \end{cases} \quad (2.7)$$

需要说明的是: U_M , Z_{Mn} , Σ_{iJ} 和 E_{iJMn} 不是张量, 不服从张量的坐标变换律.

由(2.4)~(2.7)式, 本构关系(2.1)和平衡方程(2.3)可表示为

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn} = E_{iJMn} U_{M,n} \quad (2.8)$$

$$E_{iJMn} U_{M,ni} = 0 \quad (2.9)$$

三、压电介质的Stroh列式

对于压电介质的二维变形问题, 场变量仅是 x_1 和 x_2 的函数, 广义位移 $U^T = [u_1, u_2, u_3, \varphi]$ 和广义应力函数 $\Phi^T = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4]$ 为^[7]

$$\left. \begin{aligned} U &= \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^4 \{ a_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) + \bar{a}_{\alpha} \overline{f(z_{\alpha})} \} = 2\operatorname{Re}[Af(z)] \\ \Phi &= \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^4 \{ b_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) + \bar{b}_{\alpha} \overline{f(z_{\alpha})} \} = 2\operatorname{Re}[Bf(z)] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中 Re 表示复数的实部, 一横表示共轭, 上标 T 代表矩阵的转置. $f^T(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_2), f_4(z_4)]$ 为广义复变量 $z_{\alpha} = x_1 + p_{\alpha}x_2$ 的任意函数, 由给定问题的边界条件确

定, 带有正虚部的复常数 p_a , 复矩阵 A 和 B 由压电介质的材料常数 E_{iJMn} 确定.

从平衡方程(2.9), 得到应力和电位移场为

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, D_1]^T = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\Phi_{,2} \\ \Sigma_2 &= [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2]^T = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Phi_{,1} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

矩阵 A 和 B 满足下面的正交关系

$$\left[\begin{array}{cc} A^T & B^T \\ \bar{A}^T & \bar{B}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} B & \bar{B} \\ A & \bar{A} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \quad (3.3)$$

和封闭关系

$$\left. \begin{aligned} AB^T + \bar{A}\bar{B}^T &= I = BA^T + \bar{B}\bar{A}^T \\ AA^T + \bar{A}\bar{A}^T &= 0 = BB^T + \bar{B}\bar{B}^T \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式中 I 是单位阵. 方程(3.4)隐含着

$$AA^T = -iH/2, \quad BB^T = iL/2, \quad AB^T = (I - iS)/2 \quad (3.5)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$. H , L 和 S 为实矩阵, 而且 H 和 L 是对称、正定的, 它们可以通过下面的积分确定

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_1(\theta) d\theta \\ H &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_2(\theta) d\theta \\ L &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_3(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_1(\theta) &= -T^{-1}(\theta)R^T(\theta), \quad N_2(\theta) = T^{-1}(\theta) \\ N_3(\theta) &= R(\theta)T^{-1}(\theta)R^T(\theta) - Q(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$Q_{JM}(\theta) = E_{iJMn}\eta_i\eta_n, \quad R_{JM}(\theta) = E_{iJMn}\eta_i\xi_n, \quad T_{JM}(\theta) = E_{iJMn}\xi_i\xi_n \quad (3.8)$$

$$\eta^T = [\cos\theta, \sin\theta, 0], \quad \xi^T = [-\sin\theta, \cos\theta, 0] \quad (3.9)$$

四、半平面压电介质的Green函数

研究图1所示的压电半平面, $x_2=0$ 上面力和自由电荷为零, 在点 $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, 沿 x_3 轴作用有均匀的线力、线电荷 $f^T = [f_1, f_2, f_3, \lambda]$ 和广义位错 $b^T = [b_1, b_2, b_3, \Delta\varphi]$, 其中 λ 表示电荷, $\Delta\varphi$ 为滑移面的电势 φ 的间断值^[8]. 该问题的解为确定满足下列条件

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= Bf(z) + \bar{B}\bar{F}(z) \quad (\text{沿 } x_2=0) \\ \oint_C d\Phi &= f \\ \oint_C \cdot dU &= b \\ \Sigma_{ij} &\rightarrow 0 \quad (|X| \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (C \text{ 为绕 } X^* \text{ 的任一闭合曲线}) \quad (4.1a \sim c)$$

的一般解(3.1)中的函数 $f(z)$.

基于绕动的概念, 设函数 $f_\alpha(z_\alpha)$ 为

$$f_\alpha(z_\alpha) = q_{\alpha 0} \ln(z_\alpha - z_\alpha^*) + g_\alpha(z_\alpha) \quad (\alpha=1,2,3,4, \text{对}\alpha \text{不求和}) \quad (4.2)$$

式中 $z_\alpha^* = x_1^* + p_\alpha x_2^*$; $q_{\alpha 0} \ln(z_\alpha - z_\alpha^*)$ 为无限大压电介质在 \hat{f} 和 $\hat{\delta}$ 作用下的奇异解, $q_{\alpha 0}$ 为待定复常数; $g_\alpha(z_\alpha)$ 为非奇异的绕动解.

根据(4.1a), 我们得到

$$B_{ik} [q_{k0} \ln(x_1 - z_k^*) + g_k(x_1)] + \bar{B}_{ik} \cdot [q_{k0} \ln(x_1 - \bar{z}_k^*) + \bar{g}_k(x_1)] = 0 \quad (4.3)$$

移项整理得

$$\bar{B}_{ik} \bar{q}_{k0} \ln(x_1 - \bar{z}_k^*) + B_{ik} g_k(x_1) = -B_{ik} q_{k0} \ln(x_1 - z_k^*) - \bar{B}_{ik} \bar{g}_k(x_1) \quad (4.4)$$

上式左边为上半平面的解析函数, 而右边为下半平面的解析函数, 由解析延拓理论, 存在全平面解析函数

$$F(z) = \begin{cases} B_{ik} g_k(z) + \bar{B}_{ik} \bar{q}_{k0} \ln(z - \bar{z}_k^*) & (z \in S^+) \\ -\bar{B}_{ik} \bar{g}_k(z) - B_{ik} q_{k0} \ln(z - z_k^*) & (z \in S^-) \end{cases} \quad (4.5)$$

式中 S^+ 和 S^- 分别表示上半平面和下半平面. 由Liouville定理, 得

$$B_{ik} g_k(z) + \bar{B}_{ik} \bar{q}_{k0} \ln(z - \bar{z}_k^*) = 0 \quad (4.6)$$

解此方程, 并取 $z = z_\alpha$ ($\alpha=1,2,3,4$), 得到

$$g_\alpha(z_\alpha) = -B_{\alpha i}^{-1} \bar{B}_{ik} \bar{q}_{k0} \ln(z_\alpha - \bar{z}_k^*) \quad (4.7)$$

表示成矩阵形式为

$$g(z) = - \sum_{k=1}^4 \langle \ln(z_\alpha - \bar{z}_k^*) \rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{q}_0 \quad (4.8)$$

式中 $g^T(z) = [g_1(z_1), g_2(z_2), g_3(z_3), g_4(z_4)]$, $q_0^T = [q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40}]$

$$I_1 = \text{diag}[1, 0, 0, 0], \quad I_2 = \text{diag}[0, 1, 0, 0],$$

$$I_3 = \text{diag}[0, 0, 1, 0], \quad I_4 = \text{diag}[0, 0, 0, 1] \quad (4.9)$$

$$\langle \ln(z_\alpha - \bar{z}_k^*) \rangle = \text{diag}[\ln(z_1 - \bar{z}_1^*), \ln(z_2 - \bar{z}_2^*), \ln(z_3 - \bar{z}_3^*), \ln(z_4 - \bar{z}_4^*)] \quad (4.10)$$

为了确定待定常数, 使用条件(4.1b)有

$$\begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ B & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\bar{q}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{f} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

应用正交关系(3.3), 从上式解出 q_0 为

$$q_0 = (A^T \hat{f} + B^T \hat{\delta}) / 2\pi i = h / 2\pi i \quad (4.12)$$

联合(3.1)、(4.2)、(4.8)和(4.12), 半平面压电介质的Green函数为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A \langle \ln(z_\alpha - z_\alpha^*) \rangle h + \sum_{k=1}^4 A \langle \ln(z_\alpha - \bar{z}_k^*) \rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \\ \Phi &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B \langle \ln(z_\alpha - z_\alpha^*) \rangle h + \sum_{k=1}^4 B \langle \ln(z_\alpha - \bar{z}_k^*) \rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

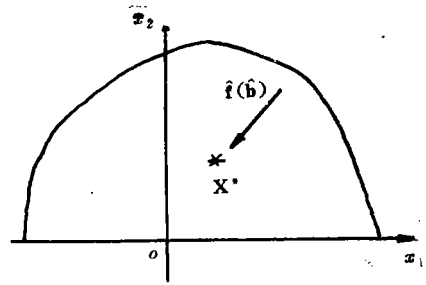


图1 半平面压电介质

式中 Im 表示取复数的虚部。

由(3.2)得到半平面压电介质的应力和电位移场为

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B \left\langle \frac{p_a}{z_a - z_a^*} \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 B \left\langle \frac{p_a}{z_a - \bar{z}_k^*} \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \\ \Sigma_2 &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B \left\langle \frac{1}{z_a - z_a^*} \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 B \left\langle \frac{1}{z_a - \bar{z}_k^*} \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

上式表明条件(4.1c)已经满足。

五、压电介质中的半无限裂纹问题

含半无限裂纹的压电体如图2所示，在点 $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ 作用广义载荷 \hat{f} 和位错 \hat{b} ，裂纹面上面力和自由电荷为零。此问题可由上节的结果求解如下：

由于映射函数

$$z = \xi^2 \quad (5.1)$$

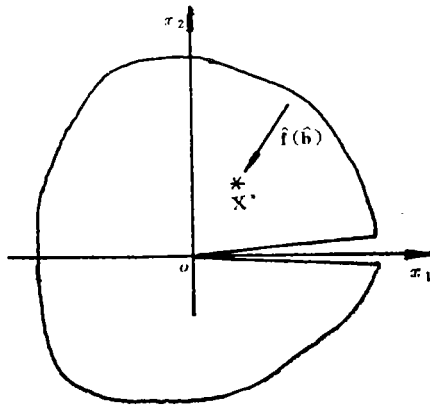


图2 含半无限裂纹的压电介质

将含裂纹的 z 平面保角映射为 ξ 平面的上半平面，所以令(4.13)中的 z_a, z_a^* 和 \bar{z}_k^* 分别为 $\sqrt{z_a}, \sqrt{z_a^*}$ 和 $\sqrt{\bar{z}_k^*}$ ，我们便得到含裂纹压电体的Green函数为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ A \left\langle \ln(\sqrt{z_a} - \sqrt{z_a^*}) \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 A \left\langle \ln(\sqrt{z_a} - \sqrt{\bar{z}_k^*}) \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \\ \Phi &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ B \left\langle \ln(\sqrt{z_a} - \sqrt{z_a^*}) \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 B \left\langle \ln(\sqrt{z_a} - \sqrt{\bar{z}_k^*}) \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

压电体中的应力和电位移场为

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ B \left\langle \frac{p_a}{\sqrt{z_a}(\sqrt{z_a} - \sqrt{z_a^*})} \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 B \left\langle \frac{p_a}{\sqrt{z_a}(\sqrt{z_a} - \sqrt{\bar{z}_k^*})} \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\}$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ B \left\langle \frac{1}{\sqrt{z_a}(\sqrt{z_a} - \sqrt{z_a^*})} \right\rangle h + \sum_{k=1}^4 B \left\langle \frac{1}{\sqrt{z_a}(\sqrt{z_a} - \sqrt{z_k^*})} \right\rangle B^{-1} \bar{B} I_k \bar{h} \right\} \quad (5.3)$$

上式表明裂纹尖端的应力和电位移场是奇异的，奇异性的幅度可以用应力和电位移强度因子所表征。与弹性问题相似，其值为

$$\begin{aligned} K &= [K_I, K_{II}, K_{III}, K_D]^T \\ &= \lim_{\substack{x_2 \rightarrow 0 \\ x_1 \rightarrow 0}} \sqrt{-2\pi x_1} \Sigma_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ 2B \left\langle \frac{1}{\sqrt{z_a^*}} \right\rangle A^T \right\} f + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2B \left\langle \frac{1}{\sqrt{z_a^*}} \right\rangle B^T \right\} \delta \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

式中 K_D 为电位移强度因子。

如果位错 δ 不存在且力和电荷 f 作用在裂纹表面 $z_a^* = x_0$ 时，应力和电位移强度因子为

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0}} f \quad (5.5)$$

上式说明：在某些情况下，应力和电位移强度因子与材料特性无关。

六、结 论

本文应用各向异性弹性力学中的 Stroh 方法和解析延拓理论，得到了半平面压电介质和含半无限裂纹无限大压电介质 Green 函数的封闭解；分析了裂纹尖端的电弹耦合场的特征。其线力和线电荷解可用作边界元法的基本解结合数值技术分析复杂的机电耦合问题；位错解可以用于研究计入耦合效应的位错—边界相互作用问题。

文中研究的是自由边界问题，当 $x_2 = 0$ 或裂纹面上给定 $U^T = [u_1, u_2, u_3, \varphi] = 0$ 时，即刚性边界条件时，只要修改(4.8)式中的 $g(z)$ 为

$$g(z) = - \sum_{k=1}^4 \langle \ln(z_a - \bar{z}_k^*) \rangle A^{-1} \bar{A} I_k \bar{q}_0 \quad (6.1)$$

便可得到相应问题的 Green 函数和刚性裂纹的尖端场。

参 考 文 献

- [1] J. S. Lee and L. Z. Jiang, A boundary integral formulation and 2-D fundamental solutions for piezoelectric media, *Mech. Res. Commun.*, 21(1) (1994), 47-54.
- [2] 孟庆元、杜善义，压电介质二维边界积分方程中的基本解，*固体力学学报*, 16(1) (1995), 90-94.
- [3] 刘金喜、王彪、杜善义，二维各向异性压电介质机电耦合场的基本解，*应用数学和力学*, 18(10) (1997), 885-891.
- [4] H. A. Sosa and M. A. Castro, On concentrated loads at the boundary of a piezoelectric half-plane, *J. Mech. Phys. Solids*, 42(7) (1994), 1105-1122.
- [5] H. Fan, K. Y. Sze and W. Yang, Two-dimensional contact on a piezoelectric

- half-space, *Int. J. Solids Struct.*, **33**(9) (1996), 1305—1315.
- [6] D. M. Barnett and J. Lothe, Dislocation and line charges in anisotropic piezoelectric insulators, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **67** (1975), 105—111.
- [7] J. Liang, J. C. Han, B. Wang and S. Y. Du, Electro-elastic modelling of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion, *Int. J. Solids Struct.*, **32**(20) (1995), 2989—3000.
- [8] Y. E. Pak, Force on a piezoelectric screw dislocation, *J. Appl. Mech.*, **57**(3) (1990), 863—869.

Electro-Elastic Green's Functions for a Piezoelectric Half-Space and Their Application

Liu Jinxi Wang Biao Du Shanyi

(Composite Material Research Lab., Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract

In this paper, the electro-elastic solutions for a piezoelectric half-space subjected to a line force, a line charge and a line dislocation, i. e., Green's functions, are studied. Based on the Stroh formalism and the concept of analytical continuation, explicit expressions for Green's functions are derived. As a direct application of the results obtained, an infinite piezoelectric solid containing a semi-infinite crack is examined. Attention is focused on the stress and electric displacement fields of a crack tip, The stress and electric displacement intensity factors are given explicitly.

Key words piezoelectric half-space, Green's function, semi-infinite crack, stress intensity factor, electric displacement intensity factor