应用数学和力学，第18卷 第12期（1997年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

中立型方程解的零点的分布*

周　勇[1]　　王志成[2]

（林宗池推荐，1995年9月6日收到，1997年5月23日收到修改稿）

摘　要

本文研究一阶中立型时滞微分方程解的零点的分布，去掉了已有文献中对系数较强的限制条件，获得了这类方程振动解的相邻零点间距离的估计，并且改进和推广了文献中的一些已知结果。

关键词　中立型方程　零点分布　估计

一、引　　言

中立型微分方程的振动性研究是一个相当新的领域，在实际问题中有很重要的应用．近年来，这类方程的振动性理论得到了广泛的发展，参见最近Györi和Ladas，Bainov和Mishev的专著[1]、[2]．但是，目前涉及中立型方程解的零点分布的结果还相当少，这方面的工作仅见文[5～8]．

本文考虑一阶中立型方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+P(t)x(t-\tau)]+Q(t)x(t-\sigma)=0 \tag{1.1}$$

其中

$$P,\ Q\in C([t_0\ \infty),\ \mathbf{R}^+),\quad 且\tau,\ \sigma\in\mathbf{R}^+ \tag{1.2}$$

我们对方程(1.1)的振动解的零点距作了新的估计，改进和推广了文[5～8]的主要结果．

令$m=\max\{\tau,\ \sigma\}$，所谓方程(1.1)的一个解，是指一个函数$x\in C([t_*-m,\ \infty),\ \mathbf{R})$（这里$t_*\geqslant t_0$）使得$x(t)+P(t)x(t-\tau)$在$[t_*,\ \infty)$上连续可微，并且对一切$t\geqslant t_*$，方程(1.1)成立．

假设(1.2)式成立，令$\phi\in C([t_0-m,\ t_0],\ \mathbf{R})$是一个已知的初始函数，那么，由分步法知方程(1.1)存在唯一的解$x\in C([t_0-m,\ \infty),\ \mathbf{R})$，满足$x(t)=\phi(t)$，$t_0-m\leqslant t\leqslant t_0$．

称方程(1.1)的解是振动的，如果它具有任意大的零点；否则称它为非振动的．

---

* 国家自然科学基金及湖南省自然科学基金资助项目

1 湘潭大学数学系，湖南湘潭 411105

2 湖南大学应用数学系，长沙 410082

二、主要结果

下文中，记

$$R(t)=P(t-\sigma)\frac{Q(t)}{Q(t-\tau)}$$

并且假设

(H$_1$)　$P\in C([t_0,\ \infty),\ [0,\ \infty))$，$Q\in C([t_0,\ \infty),\ (0,\ \infty))$，
$R\in C^1([t_0,\ \infty),\ [0,\ \infty))$且$R'(t)\leqslant 0$，$\sigma>\tau>0$；

(H$_2$)　$\liminf\limits_{t\to\infty}\int_{t+\tau-\sigma}^{t}\frac{Q(s)}{1+R(s+\tau-\sigma)}ds>\frac{1}{e}$

即：存在$t_1(t_1\geqslant t_0)$和正常数ρ，使得

$$\int_{t+\tau-\sigma}^{t}\frac{Q(s)}{1+R(s+\tau-\sigma)}ds\geqslant\rho>\frac{1}{e},\qquad t\geqslant t_1$$

为证明本文的定理，我们先引用如下结果：

引理1[3]　若(H$_1$)和(H$_2$)成立，则方程(1.1)的一切解振动.

引理2[7]　设常数$r>0$，则对一切实数x，有$e^{rx}\geqslant x+(1+\ln r)/r$及$e^x\geqslant xe$成立.

在下文中，设D_x表示方程(1.1)的振动解$x(t)$的相邻零点之间的距离. 本文的主要结果即下面的定理.

定理1　假设(H$_1$)和(H$_2$)成立，且设$x(t)$是方程(1.1)在$[t_x,\ \infty)$上的一个解，其中$t_x\geqslant t_1$，则在$[t_x,\ \infty)$上，有

(1°)　当$\rho\geqslant 1$时，$D_x<2\sigma+(\sigma-\tau)$；

(2°)　当$1/e<\rho<1$时，$D_x<2\sigma+n_\rho(\sigma-\tau)$。

其中

$$n_\rho=\max\left\{2,\ 1+\min\left\{\left\lceil\frac{2-2\rho-\rho^2}{\rho(1+\ln\rho)}\right\rceil,\ \left\lceil\frac{\ln(2-2\rho)-\ln\rho^2}{1+\ln\rho}\right\rceil\right\}\right\}\tag{2.1}$$

上式中记号$\lceil\gamma\rceil$表示取不小于γ的最小整数.

证　只需证对任意的$T_0\geqslant t_x$，方程(1.1)的解$x(t)$在区间$[T_0,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)]$上至少有一个零点，其中

$$N_\rho=\begin{cases}1, & \text{当}\rho\geqslant 1\text{时}\\ n_\rho, & \text{当}1/e<\rho<1\text{时}\end{cases}$$

若不然，不妨设$x(t)$在$[T_0,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)]$上恒为正. 令

$$z(t)=x(t)+P(t)x(t-\tau),\qquad t\geqslant T_0+\tau\tag{2.2}$$

则

$$z(t)>0,\qquad t\in[T_0+\tau,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)]\tag{2.3}$$

及

$$z'(t)=-Q(t)x(t-\sigma)<0,\qquad t\in[T_0+\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)]\tag{2.4}$$

由(1.1)、(2.2)两式，得

$$\begin{aligned} z'(t) &= -Q(t)x(t-\sigma) \\ &= -Q(t)[z(t-\sigma)-P(t-\sigma)x(t-\tau-\sigma)] \\ &= -Q(t)z(t-\sigma)-P(t-\sigma)\frac{Q(t)}{Q(t-\tau)}z'(t-\tau), \qquad t\geqslant T_0+\sigma+\tau \end{aligned} \tag{2.5}$$

即

$$z'(t)+R(t)z'(t-\tau)+Q(t)z(t-\sigma)=0, \qquad t\geqslant T_0+\sigma+\tau \tag{2.6}$$

令

$$w(t)=z(t)+R(t)z(t-\tau), \qquad t\geqslant T_0+2\tau \tag{2.7}$$

那么，由(2.3)、(2.7)两式，有

$$w(t)>0, \qquad t\in[T_0+2\tau,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \tag{2.8}$$

且

$$w'(t)=z'(t)+R'(t)z(t-\tau)+R(t)z'(t-\tau), \qquad t\geqslant T_0+2\tau \tag{2.9}$$

由(2.6)、(2.9)两式，得

$$\begin{aligned} & w'(t)=R'(t)z(t-\tau)-Q(t)z(t-\sigma)<0, \\ & \qquad t\in[T_0+\sigma+\tau,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \end{aligned} \tag{2.10}$$

因为$z(t)$在$[T_0+\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)]$上单调减少，所以，由(2.7)式得

$$w(t)<(1+R(t))z(t-\tau), \qquad t\in[T_0+\tau+\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \tag{2.11}$$

从而有

$$z(t-\sigma)>\frac{w(t+\tau-\sigma)}{1+R(t+\tau-\sigma)}, \qquad t\in[T_0+2\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \tag{2.12}$$

将(2.12)式代入(2.10)式，得

$$\begin{aligned} & w'(t)+\frac{Q(t)}{1+R(t+\tau-\sigma)}w(t+\tau-\sigma)<R'(t)z(t-\tau)\leqslant 0 \\ & \qquad t\in[T_0+2\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \end{aligned} \tag{2.13}$$

以下为方便起见，记

$$q(t)=\frac{Q(t)}{1+R(t+\tau-\sigma)}$$

这样，(2.13)式即为

$$w'(t)+q(t)w(t+\tau-\sigma)<0, \qquad t\in[T_0+2\sigma,\ T_0+2\sigma+N_\rho(\sigma-\tau)] \tag{2.14}$$

下面分如下两种情形：

(1°) $\rho\geqslant 1$.

令$T=T_0+2\sigma+(\sigma-\tau)$，由(2.8)、(2.10)两式，分别得

$$w(t)>0, \qquad t\in[T_0+2\tau,\ T] \tag{2.15}$$

及

$$w'(t)<0, \qquad t\in[T_0+\sigma+\tau,\ T] \tag{2.16}$$

上式意味着$w(t)$是单调减少的，从而有

$$w(t)>w(T_0+2\sigma), \qquad t\in[T_0+\sigma+\tau,\ T_0+2\sigma]$$

(2.14)式两边从$T_0+2\sigma$到t（这里$t\leqslant T$）积分，得

$$w(t)<w(T_0+2\sigma)-\int_{T_0+2\sigma}^{t}q(s)w(s+\tau-\sigma)ds$$

$$<w(T_0+2\sigma)\left\{1-\int_{T_0+2\sigma}^{t} q(s)ds\right\} \tag{2.17}$$

在(2.17)式中取$t=T$，由(H_2)，得

$$w(T)<w(T_0+2\sigma)(1-\rho)\leqslant 0$$

这与(2.15)式矛盾。

(2°)　$1/e<\rho<1$。

由(H_1)、(H_2)知，当$t\geqslant t_x$（这里$t_x\geqslant t_1$）时，我们有

$$\int_{t+\tau-\sigma}^{t} q(s)ds\geqslant\rho>\frac{1}{e} \quad 与 \quad \int_{t}^{t-\tau+\sigma} q(s)ds\geqslant\rho>\frac{1}{e}$$

令　　$f(\lambda)=\int_t^{\lambda} q(s)ds$

则易知$f(\lambda)$是连续函数，且 $f(t)=0$，$f(t-\tau+\sigma)\geqslant\rho$。故存在一个$\lambda_t$:$t<\lambda_t\leqslant t+(\sigma-\tau)$，使得

$$\int_t^{\lambda_t} q(s)ds=\rho$$

令$T_1=T_0+2\sigma+n_\rho(\sigma-\tau)$，由(2.1)式注意到$n_\rho\geqslant 2$。当$T_0+2\sigma+(\sigma-\tau)\leqslant t\leqslant T_1$时，(2.14)式两边从$t$到$\lambda_t$积分，得

$$w(t)-w(\lambda_t)\geqslant\int_t^{\lambda_t} q(s)w(s+\tau-\sigma)ds \tag{2.18}$$

因为$t\leqslant s\leqslant t+(\sigma-\tau)$，易知$T_0+2\sigma\leqslant t-(\sigma-\tau)\leqslant s-(\sigma-\tau)\leqslant t$。(2.14)式两边从$s-(\sigma-\tau)$到$t$积分，得

$$w(s+\tau-\sigma)-w(t)\geqslant\int_{s+\tau-\sigma}^{t} q(u)w(u+\tau-\sigma)du$$

由(2.10)式知，$w(u+\tau-\sigma)$在$T_0+2\sigma\leqslant s-(\sigma-\tau)\leqslant u\leqslant t$上单调减少，从而有

$$\begin{aligned}w(s+\tau-\sigma)&\geqslant w(t)+w(t+\tau-\sigma)\int_{s+\tau-\sigma}^{t} q(u)du\\&=w(t)+w(t+\tau-\sigma)\left\{\int_{s+\tau-\sigma}^{s} q(u)du-\int_t^s q(u)du\right\}\\&\geqslant w(t)+w(t+\tau-\sigma)\left\{\rho-\int_t^s q(u)du\right\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

由(2.18)、(2.19)两式，得

$$\begin{aligned}w(t)&\geqslant\int_t^{\lambda_t} q(s)w(s+\tau-\sigma)ds\\&\geqslant\int_t^{\lambda_t} q(s)\left\{w(t)+w(t+\tau-\sigma)\left(\rho-\int_t^s q(u)du\right)\right\}ds\\&=\rho w(t)+\rho^2 w(t+\tau-\sigma)-w(t+\tau-\sigma)\int_t^{\lambda_t} ds\int_t^s q(s)q(u)du\end{aligned} \tag{2.20}$$

交换积分次序，有下式成立

$$\int_t^{\lambda_t} ds\int_t^s q(s)q(u)du=\int_t^{\lambda_t} du\int_u^{\lambda_t} q(s)q(u)ds$$

对换上式右边积分变量s和u的记号，上式等价于

$$\int_t^{\lambda_t} ds \int_t^s q(s)q(u)du = \int_t^{\lambda_t} ds \int_s^{\lambda_t} q(u)q(s)du$$

从而有

$$\int_t^{\lambda_t} ds \int_t^s q(s)q(u)du = \frac{1}{2}\int_t^{\lambda_t} ds \int_t^{\lambda_t} q(u)q(s)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_t^{\lambda_t} q(s)ds\right)^2 = \frac{\rho^2}{2}$$

将上式代入(2.20)式，得

$$w(t) > \rho w(t) + \frac{\rho^2}{2} w(t+\tau-\sigma)$$

即

$$\frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)} < \frac{2(1-\rho)}{\rho^2}$$

令

$$V(t) = \frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)}$$

则

$$V(t) < \frac{2(1-\rho)}{\rho^2} \tag{2.21}$$

在(2.21)式中取$t = T_1-(\sigma-\tau) = T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau)$，有

$$V(T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau)) < \frac{2(1-\rho)}{\rho^2} \tag{2.22}$$

另一方面，当$T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau) \leqslant t \leqslant T_1$时，(2.14)式两边除以$w(t)$再从$t-(\sigma-\tau)$到$t$积分，得

$$\ln\left(\frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)}\right) > \int_{t-(\sigma-\tau)}^{t} q(s)\frac{w(s-(\sigma-\tau))}{w(s)}ds$$

从而

$$V(t) > \exp\left\{\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t} q(s)V(s)ds\right\} \geqslant \exp\left\{\rho \min_{s\in[t-(\sigma-\tau),t]} V(s)\right\} \tag{2.23}$$

设

$$V(\beta_0) = \min_{s\in[t-(\sigma-\tau),t]} V(s), \qquad \beta_0 \in [t-(\sigma-\tau),\ t]$$

由引理2得

$$V(t) \geqslant V(\beta_0) + \frac{1}{\rho}(1+\ln\rho) \tag{2.24}$$

构造数列$\{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n_\rho-2}\}$其中$\beta_i \in [\beta_{i-1}-(\sigma-\tau),\ \beta_{i-1}]$且

$$V(\beta_i) = \min_{s\in[\beta_{i-1}-(\sigma-\tau),\beta_{i-1}]} V(s), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n_\rho - 2$$

由(2.23)式及引理2，得

$$V(\beta_{i-1}) \geqslant V(\beta_i) + \frac{1}{\rho}(1+\ln\rho) \tag{2.25}$$

结合(2.24)、(2.25)两式，得

$$V(t)\geqslant V(\beta_0)+\frac{1}{\rho}(1+\ln\rho)\geqslant V(\beta_1)+\frac{2}{\rho}(1+\ln\rho)$$

$$\geqslant\cdots\geqslant V(\beta_{n_\rho-2})+\frac{n_\rho-1}{\rho}(1+\ln\rho)$$

由(2.10)式知，$w(t)$在$[T_0+\sigma+\tau,\ T_1]$单调减少，因此

$$V(t)=\frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)}>1,\qquad t\in[T_0+2\sigma,\ T_1]$$

注意到

$$t\geqslant\beta_{n_\rho-2}\geqslant\beta_{n_\rho-3}-(\sigma-\tau)\geqslant\cdots\geqslant\beta_0-(n_\rho-2)(\sigma-\tau)\geqslant T_0+2\sigma$$

所以$V(\beta_{n_\rho-2})>1$，从而有

$$V(t)>1+\frac{n_\rho-1}{\rho}(1+\ln\rho)$$

上式取$t=T_1-(\sigma-\tau)=T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau)$，得

$$V(T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau))>1+\frac{n_\rho-1}{\rho}(1+\ln\rho)\tag{2.26}$$

从(2.22)、(2.26)两式，我们发现

$$1+\frac{n_\rho-1}{\rho}(1+\ln\rho)<\frac{2(1-\rho)}{\rho^2}$$

即

$$n_\rho<1+\frac{2-2\rho-\rho^2}{\rho(1+\ln\rho)}\tag{2.27}$$

再者，由(2.10)式知$w(t)$在$[T_0+\sigma+\tau,\ T_1]$上单调减少，因此，

$$V(t)=\frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)}>1,\qquad t\in[T_0+2\sigma,\ T_1]\tag{2.28}$$

当$T_0+2\sigma+(\sigma-\tau)\leqslant t\leqslant T_1$时，(2.14)式两边除以$w(t)$再从$t-(\sigma-\tau)$到$t$积分，得

$$\ln\left(\frac{w(t)}{w(t-(\sigma-\tau))}\right)+\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}q(s)\frac{w(s-(\sigma-\tau))}{w(s)}ds<0$$

使用(H_2)及(2.28)式，得

$$\ln\left(\frac{w(t-(\sigma-\tau))}{w(t)}\right)>\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}q(s)\frac{w(s-(\sigma-\tau))}{w(s)}ds>\rho$$

由引理2之第2个不等式及上式，得

$$V(t)>e\rho,\qquad t\in[T_0+2\sigma+(\sigma-\tau),\ T_1]\tag{2.29}$$

重复上述过程，得

$$V(t)>(e\rho)^{n_\rho-1},\qquad t\in[T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau),\ T_1]\tag{2.30}$$

在(2.30)式中，取$t=T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau)$，有

$$V(T_0+2\sigma+(n_\rho-1)(\sigma-\tau))>(e\rho)^{n_\rho-1}\tag{2.31}$$

由(2.22)和(2.31)式，我们发现

$$(e\rho)^{n_\rho-1}<\frac{2(1-\rho)}{\rho^2}$$

即

$$n_\rho<1+\frac{\ln(2-2\rho)-\ln\rho^2}{1+\ln\rho}\tag{2.32}$$

由(2.27)、(2.32)两式，得

$$n_\rho<1+\min\left\{\left[\frac{2-2\rho-\rho^2}{\rho(1+\ln\rho)},\left[\frac{\ln(2-2\rho)-\ln\rho^2}{1+\ln\rho}\right]\right\}\right.$$

这与(2.1)式矛盾。定理证毕。

注 定理1取消了文[6]定理1如下较强的限制条件："$\sigma-\tau>1/e$, $P'(t)\leqslant 0$, $Q(t)$是τ-周期函数"，且估计比[6]的更精确，从而显著地改进了文[6]的定理1。此外，当$P(t)\equiv$时，(H_1)中$Q(t)$的假设可减弱为$Q(t)\geqslant 0$。本文的结果改进和推广了文[5]的定理1和定理2及文[7]的定理1和定理2。

参 考 文 献

[1] I. Györi and G. Ladas, *Oscillation Theory of Differential Equation with Applications*, Oxford Univ. Press, London/New York (1991), 1—25.

[2] D. D. Bainov and D. P. Mishev, *Oscillation Theory for Neutral Differenntial Equations with Delay*, Hilger, Bristol (1991), 10—45.

[3] Q. Chuanxi and G. Ladas, Oscillations of first-order neutral equations with variable coefficients, *Monatshefie für Mathematik*, 109(1) (1990), 103—111.

[4] 王志成、庚建设，中立型时滞微分方程的振动性，数学学报，37(1) (1994), 129—134.

[5] 李秉团，一阶时滞型微分方程解的零点距估计，应用数学学报，13(4) (1990), 467—472.

[6] 林诗仲，一阶中立型微分方程解的零点距估计，应用数学学报，17(3) (1994), 458—461.

[7] F. X. Liang, The distribution of solutions of first-order delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 186(1) (1994), 383—392.

[8] 周勇，一阶中立型方程解的零点距估计，湖南数学年刊，15(2) (1995), 45—47.

The Distribution of Zeroes of Solutions of Neutral Equations

Zhou Yong

(Department of Mathematics, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, *P. R. China)*

Wang Zhicheng

(Department of Applied Mathematics, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, *P. R. China)*

Abstract

The purpose of this paper is to study the distribution of zerose of solutions of the neutral delay differential equations. An estimate is established for the distance between adjacent zeroes of the solutions of such equations under less restrictive bypotheses on the variable coefficients. The results obtained improve and extend some known results in the literature.

Key words neutral equation, distribution of zeroes, estimate