应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

含间断项的非线性Volterra型积分方程正解的唯一存在性

董 卫[1]

（丁协平推荐，1995年5月4日收到，1997年7月2日收到修改稿）

摘　要

本文利用含间断项增算子不动点定理讨论了一类非线性 Volterra 型积分方程正解存在唯一性。在解存在性准则中取消了函数连续性限制，在较弱条件下得到了正解存在唯一性定理。

关键词 正规锥 增算子 积分方程正解

一、引　言

众所周知，非线性 Volterra 型积分方程

$$u(x)=\int_0^x k(x-s)g(u(s))ds \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{1.1}$$

在非线性扩散和渗透问题中有着广泛的应用[1,2]。Bushell 教授利用连续增算子不动点定理讨论了(1.1)这一类积分方程正解的唯一存在性。本文利用含间断项增算子不动点定理进一步研讨方程(1.1)，改进了参考文献[1,4]中的结论。

本文假定：对某一$b>0$

$$K_L=\{x(t)\in C[0,1]\,|\,x\geqslant 0\},\quad K_1=\{x(t)\in C[0,b]\,|\,x\geqslant 0\}$$

$$K_0=\{x(t)\in C[0,b]\,|\,x(0)=0,\ x(t)>0\quad t\in(0,b]\}$$

本文假定：

(H1) $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$非减函数，并且$g(0)=0$

(H2) 存在$\beta>0$，$\varepsilon_0>0$，$k:[0,\beta]\to R$，$k(x)\geqslant\varepsilon_0$，且$k(x)$在$x\in[0,\beta]$上 Lebesgue 可积。

(H3) 存在 $0<\alpha_1<1$，且

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{g(u)}{u^{\alpha_1}}>1 \tag{1.2}$$

(H4) 对 $0<t<1$ 有

$$g[tx+(1-t)y]>tg(x)+(1-t)g(y),\qquad x,\ y\in[0,1]$$

1 华北水利水电学院基础部，河北邯郸 056021

以上条件包含了文献[1]中的特殊情况：

$$u(x)=\int_0^x e^{A(x-s)}[1+(x-s)\ln A][u(s)]^{1/p}ds \tag{1.3}$$

其中$A>1$是物理参数，$p>1$是常数.

显然$u(x)\equiv 0$是方程(1.1)的平凡解，而非平凡正解（非负解）的唯一存在性是物理学应用上感兴趣的问题.

我们将证明以下结论：

定理1 若条件(H1)～(H4)满足，则存在常数$b(0<b\leqslant 1)$及连续函数$u(x)\in K_0$是方程(1.1)的唯一连续解.

定理2 若条件(H1)～(H4)满足，则存在连续函数$u(x)\in K_L$是方程(1.1)唯一连续解.

二、定理的证明

首先，让我们介绍一下文献[6]和[7]中有关锥的定义和性质.

定义2.1 设E是Banach空间，$P\in E$是一非空凸闭集，若

(1) $\forall x\in P\quad \lambda\geqslant 0\Rightarrow \lambda x\in P$

(2) $x\in P\quad -x\in P\Rightarrow x=\theta$，其中$\theta$是$E$中零元素.

则称P是E中一个锥.

从E中锥P，我们可以在E中导出序关系：$x\leqslant y$，若$y-x\in p$.

定义2.2 称E中锥P为正规锥，若存在常数$N>0$，使得当$0\leqslant x\leqslant y$，有$\|x\|\leqslant N\|y\|$，其中$\|\cdot\|$为E中范数，N为正规常数. 若$N=1$，则锥P称为单调锥.

注1 正规锥和单调锥是等价的，见文献[7]. 本文我们用单调锥定义正规锥. 由假设(H2)，令$J=[0,\beta]$，那么$C[J]$是Banach空间，其中

$$\|f\|=\max|f|,\qquad \forall f\in C[J]$$

则 $P=\{x\in C[J]\,|\,x\geqslant 0\}$是$C[J]$中正规锥，所以$P$也可称为单调锥.

定义算子T：

$$Tu(x)=\int_0^x k(x-s)g(u(s))ds,\qquad 0\leqslant x\leqslant\beta \tag{2.1}$$

引理2.1 假设(H1)和(H2)满足，则算子T为增算子.

注2 算子T称为增算子，若x_1，$x_2\in E$，$x_1\leqslant x_2$，则$Tx_1\leqslant Tx_2$，其中半序"$\leqslant$"由E中锥P导出.

证明 $\forall u_1(x)$，$u_2(x)\in C[J]$，$u_1(x)\leqslant u_2(x)$

$$Tu_2(x)-Tu_1(x)=\int_0^x k(x-s)[g(u_2(s))-g(u_1(s))]ds \tag{2.2}$$

由条件(H1)，所以

$$g(u_2)-g(u_1)\geqslant 0 \tag{2.3}$$

由条件(H2)，$k(x)\geqslant\varepsilon_0$，$x\in[0,\beta]$故

$$Tu_2(x)-Tu_1(x)\geqslant 0 \tag{2.4}$$

即 $$Tu_1(x)\leqslant Tu_2(x)$$

引理2.2 假定(H2)和(H3)满足，则存在常数$\delta>0$，$u_0(x)\in K_0$其中：

$$K_0=\{x(t)\in C[0,\delta]\,|\,x(0)=0,\ x(t)>0,\ t\in(0,\delta]\}$$

使得

$$u_0(x)\leqslant Tu_0(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\delta \tag{2.5}$$

证明 由条件(H2)知，存在一常数$\delta_1>0$，$0<\delta_1<\beta$，使得：

$$k(x)\geqslant\varepsilon_0,\ \ g(1)\int_0^{\delta_1}k(s)ds<1,\qquad x\in[0,\delta_1] \tag{2.6}$$

由条件(H3)，存在一常数δ_2，$0<\delta_2\leqslant1$，使得

$$g(u)\geqslant u^{\alpha_1},\qquad u\in[0,\delta_2] \tag{2.7}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$

定义：

$$u_0(x)=\begin{cases}[\varepsilon_0(1-\alpha_1)x]^{1/(1-\alpha_1)}, & x\in[0,\ \delta/2]\\ h(x), & x\in[\delta/2,\ \delta]\end{cases} \tag{2.8}$$

其中，$h(x)\in[0,\ (\varepsilon_0(1-\alpha_1)\delta/2)^{1/(1-\alpha_1)}]$连续，$\alpha_1\in$(H3)。

显然$u_0(x)\in K_0$。

不失一般性我们可令δ_1很小，使得

$$[\varepsilon_0(1-\alpha_1)\delta/2]^{1/(1-\alpha_1)}\leqslant\delta_2\leqslant1$$

那么

$$Tu_0(x)=\int_0^x k(x-s)g(u_0(s))ds\geqslant\int_0^x \varepsilon_0u_0^{\alpha_1}(s)ds\qquad x\in[0,\ \delta] \tag{2.9}$$

由(2.8)和(2.9)知

$$Tu_0(x)\geqslant\varepsilon_0\int_0^x(\varepsilon_0(1-\alpha_1)s)^{\alpha_1/(1-\alpha_1)}ds=u_0(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{\delta}{2} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}Tu_0(x)&\geqslant\varepsilon_0\int_0^{\delta/2}(\varepsilon_0(1-\alpha_1)s)^{\alpha_1/(1-\alpha_1)}ds+\varepsilon_0\int_{\delta/2}^x u_0^{\alpha_1}(s)ds\\&\geqslant u_0(\delta/2)\geqslant u_0(x),\qquad \delta/2\leqslant x\leqslant\delta\end{aligned} \tag{2.11}$$

由(2.10)及(2.11)，所以$u_0(x)\leqslant Tu_0(x)$。

引理2.3 假定条件(H2)和(H3)成立，且存在$v_0(x)\in K_L$使得

$$v_0(x)\leqslant Tv_0(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant1 \tag{2.12}$$

证明 令

$$v_0(x)=\begin{cases}[\varepsilon_0(1-\alpha_1)x]^{1/(1-\alpha_1)}, & x\in[0,\ \delta/2]\\ H(x), & x\in[\delta/2,\ \delta]\\ 0, & x\in[\delta,\ 1]\end{cases} \tag{2.13}$$

其中$H(x)\in[0,\ (\varepsilon_0(1-\alpha_1)\delta/2)^{1/(1-\alpha_1)}]$连续，$\alpha_1\in$(H3)，$\delta$同引理2.2. 显然此引理可由引理2.2同理得证。

引理2.4 假定$\nu>0$，$f(x)$在$[c,\ d]\cup(d,\ d+\nu]$上Lebesgue可积，那么：

$$\lim_{h\to0^+}\int_c^d|f(x+h)-f(x)|dx=0 \tag{2.14}$$

证明 $\forall\varepsilon>0$，存在$q(x)\in C[c,\ d+\nu]$，使得

$$\int_c^{d+\nu}|f(x)-q(x)|dx<\varepsilon \tag{2.15}$$

$$\int_c^d|f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\int_c^d|f(x+h)-q(x+h)|dx$$

$$+\int_c^d |q(x)-f(x)|dx+\int_c^d |q(x+h)-q(x)|dx$$

$$<2\varepsilon+\int_c^d |q(x+h)-q(x)|dx \tag{2.16}$$

因为 $q(x)\in C[c,\ d+\nu]$，那么存在σ，$0<\sigma<\nu$，使得

$$|q(x+h)-q(x)|<\varepsilon/(d-c), \qquad 0<h<\sigma$$

所以

$$\int_c^d |q(x+h)-q(x)|dx<\varepsilon \tag{2.17}$$

由(2.16)和(2.17)，则

$$\int_c^d |f(x+h)-f(x)|dx<3\varepsilon$$

所以 $$\lim_{h\to 0^+}\int_c^d |f(x+h)-f(x)|dx=0$$

我们将证明定理1.

令 $b=\min(\beta,\delta)$，δ由引理2.2导出.

$D=\{\psi\in C[0,b]\,|\,\psi(x)\geqslant u_0(x),\ \|\psi(x)\|\leqslant 1\}$，那么$D$是$C[0,b]$中一有界闭集. 因为$u_0(x)\in C[0,b]$，$u_0(x)\leqslant\delta_2\leqslant 1$，所以$D$是非空有界闭集.

由(H1)，所以$\forall\psi(x)\in D$

$$T\psi(x)=\int_0^x k(x-s)g(\psi(s))ds\leqslant g(\psi(x^*))\int_0^b k(s)ds \tag{2.18}$$

其中 $$\psi(x^*)=\max_{0\leqslant x\leqslant b}\psi(x),\ \psi(x^*)\leqslant 1$$

由(2.6)和引理2.4，所以

$$T\psi\leqslant 1,\ \lim_{h\to 0^+}\int_0^x |k(s+h)-k(s)|ds=0 \tag{2.19}$$

那么:

$$|T\psi(x+h)-T\psi(x)|=\left|\int_0^{x+h}k(x+h-s)g(\psi(s))ds-\int_0^x k(x-s)g(\psi(s))ds\right|$$

$$\leqslant g(1)\left(\int_x^{x+h}|k(x+h-s)|ds+\int_0^x|k(x+h-s)-k(x-s)|ds\right) \tag{2.20}$$

所以$h\to 0$，$T\psi(x+h)-T\psi(x)\to 0$.

那么$T(D)$是$[0,b]$上一致有界、等度连续的函数族. 所以$T:D\to D$是紧算子.

综上所述，对Banach空间$C[0,b]$，P是$C[0,b]$中正规锥，$D=\{\psi\in C[0,b]\ \ \psi\geqslant u_0\ \|\psi\|\leqslant 1\}$非空有界闭集，$T:D\to D$是紧的增算子，并且$\{x\in D|x\leqslant Tx\}$非空有界，则一定存在一不动点$u(x)$（见[5]）. 显然$u(x)\geqslant u_0(x)$，$u(x)\in K_0$.

现在我们将证明有唯一解.

假设: $u_1(x)$，$u_2(x)\in K_0$，且$Tu_i(x)=u_i(x)$，$i=1,\ 2,\ \cdots$，不失一般性我们假定:

$$u_i(x)\leqslant 1, \qquad (i=1,\ 2)$$

定义

$$\varphi(x)=\min_{0\leqslant x\leqslant b}\{u_1(x),\ u_2(x)\}\in C[0,b]$$

$$\beta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 1/\omega(x), & x\in(0,b]\end{cases}$$

所以　$\beta(x)>0$，$\omega(x)\leqslant u_i(x)\leqslant\beta(x)\omega(x)=1$，　$(i=1,\ 2)$

$$u_1(x)=Tu_1(x)\geqslant\omega(x)=\frac{1}{\beta(x)}\cdot\beta(x)\omega(x)\geqslant\frac{1}{\beta(x)}u_2(x)$$

令：

$$t_0=\sup\{t\,|\,u_1(x)\geqslant tu_2(x)\}$$

显然$0<t_0<+\infty$．若$t_0<1$，由引理 2.1和$u_1(x)\geqslant t_0u_2(x)$，我们得到：

$$Tu_1(x)=\int_0^x k(x-s)g(u_1(s))ds\geqslant\int_0^x k(x-s)g(t_0u_2(s))ds \tag{2.21}$$

由(H4)和$g(0)=0$，我们很容易证出

$$g(t_0u_2(x))>t_0g(u_2(x))$$

所以

$$u_1(x)=Tu_1(x)>t_0Tu_2(x)=t_0u_2(x) \tag{2.22}$$

现在我们令：

$$\eta(x)=\begin{cases}\tau, & x=0\\ \int_0^x k(x-s)g(t_0u_2(s))ds/t_0u_2(x)-1, & x\in(0,b]\end{cases}$$

其中$\tau>0$为一常数．

所以由(2.21)和(2.22)知：

$$u_1(x)=Tu_1(x)\geqslant(1+\eta)t_0u_2(x),\quad(1+\eta)t_0>t_0$$

故此与t_0的定义相矛盾，所以$t_0>1$，即$u_1(x)\geqslant u_2(x)$．同理我们可证$u_2(x)\geqslant u_1(x)$．所以$u_1(x)=u_2(x)$．

定理 2 证明

令：$D_1=\{\psi(x)\in C[0,1]\,|\,\psi(x)\geqslant v_0(x),\ \|\psi\|\leqslant1\}$，($v_0(x)$由引理2.3得出)．与定理 1证明相似，我们可得定理2．

三、应　　用

在文献[1]中渗透方程：

$$u(x)=\int_0^x e^{A(x-s)}(1+(x-s)\ln A)(u(s))^{1/p}ds$$

其中：$A>1$为物理参数，$p>1$为常数．

显然$g(u)=u^{1/p}$为非减凸函数，并且$g(0)=0$，而且存在$1/p<\alpha_1<1$使得：

$$\lim_{u\to0^+}\frac{g(u)}{u^{\alpha_1}}>1$$

$k(x)=e^{Ax}(1+x\ln A)$为连续函数，$k(0)=1$，所以条件(H1)～(H4) 都成立．由本文结论，我们可得出唯一非平凡正解（非负解）．

参 考 文 献

[1] J. Goncerzewicz, H. Marcinkowska, W. Okrasinski and K. Tabisz, On the percolation of water from a cylindrical reservoir into the surrounding soil., *Zastas. Mat.*, 16 (1978), 249—261.

[2] J. J. Keller, Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction, *Z. Angew. Math. Phys.*, 32 (1981), 170—181.

[3] P. J. Bushell and W. Okrasinski, Nonlinear Volterra equations with convolution kernel, *J. London. Math. Soc.*, 41(2) (1990), 503—510.

[4] P. J. Bushell and W. Okrasinski, Uniqueness of solutions for a class of nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 106 (1989), 547—552.

[5] Sun Jingxian, Fixed point theorem of non-continuous increasing operator and its application on non-linear equations, *Acta Mathematica Sinica*, 31(1) (1988), 101—107.

[6] Guo Dajun, *Nonlinear Function Analysis*, Shandong Science and Technology Press (1985), 234—243.

[7] Guo Dajun and V. Lakshmikanthan, *Nonlinear Problems in Asbtract Cones*, Notes and Reports in Mathematics Science and Engineering, Vol. 5 (1988), 1—17.

Uniqueness of Solutions for a Class of Non-Linear Volterra Integral Equations without Continuity

Dong Wei

(North China Institute of Water Conservancy and Hydro Power Handan, Hebei, 056021, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, the fixed point theorem of increasing operator with non-continuity is utilized to discuss the existence and uniqueness of positive solution for a class of non-linear Volterra integral equations. An important condition of continuity can be replaced by weak condition.

Key words normal cone, increasing operator, positive solution for integral equation