

混凝土材料裂纹尖端损伤带尺寸特性^{*}

叶志明^①

(程昌钧推荐, 1996 年 11 月 22 日收到, 1997 年 7 月 11 日收到修改稿)

摘 要

本文采用作者研究各向异性材料裂纹尖端塑性区特性的分析方法, 研究了混凝土材料裂纹尖端损伤带尺寸特性。基于单轴应力假定, 考虑了混凝土材料的非线性软化特性等影响, 提出用两种分析模型: 即能量模型和断裂模型来分别讨论。最后, 还对这些模型作了比较。

关键词 混凝土材料 裂纹尖端 损伤带 非线性软化特性

§ 1. 引 言

当前, 人们已经广泛地应用断裂力学理论研究混凝土材料的裂纹问题。经过多年在单轴, 双轴和三轴压缩应力下对混凝土材料和各种本构模型的研究, 众多学者们最终将他们的研究集中在混凝土材料裂纹的非线性响应上。实验研究已经观察到混凝土的软化特性, 它们可以以应力与裂纹尖端张开位移的关系曲线来表示^[1-7]。所有这些分析模型, 可以归结为两类: 1. 软化虚拟裂纹模型, 如 Hilerborg (1976) 提出离散裂纹, Bazant (1987) 提出的裂纹带, Pijautier - Cabot 和 Bazant (1986) 的非局部损伤等; 2. 特殊断裂模型, 它们有 Jenq 和 Shah (1985) 的双参数模型, Bazant (1988) 的 R- 曲线模型, Swartz 和 Karihaloo (1982) 的有效裂纹模型等。

本文采用作者研究各向异性材料裂纹尖端塑性区特性的分析方法^[8]来研究混凝土材料裂纹尖端损伤带几何尺寸特性。基于单轴应力假定, 考虑了混凝土材料的非线性软化特性等影响, 用两种分析模型: 即能量模型和断裂模型来分别讨论。最后, 我们对这些模型作了比较。

§ 2. 一阶近似理论

本文中, 我们仅限于单轴应力状态来讨论。裂纹尖端的应力分量为 σ_y , 而裂纹尖端的混凝土软化则直接从拉伸实验得到。

由 Irwin's^[9]关于裂纹尖端塑性区尺寸特性的经典一阶近似理论可以得到: 裂纹尖端正应力 σ_y 可以直接等于混凝土单轴拉伸强度 f_1 。对于 I - 型裂纹问题, 我们有

* 国家教委留学回国人员科研基金资助项目

① 上海大学; 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

从上述表达式, B 可由下式确定

$$\begin{aligned}
 B &= \int_a^{a+\delta} f'_i \left[1 - \frac{\sqrt{(a+\delta)^2 - x^2}}{\sqrt{(a+\delta)^2 - x_m^2}} \right] dx && \text{化特} \\
 &= f'_i \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{\sqrt{(a+\delta)^2 - x_m^2}} \left[(a+\delta)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{a+\delta} \right) - a \sqrt{2a\delta + \delta^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

则 A 为

$$A = \int_0^{r_p^*} \sigma \sqrt{\frac{a+\delta}{2r}} dr - r_p^* f'_i = \sigma \sqrt{2(a+\delta)r_p^*} - r_p^* f'_i \tag{3.6}$$

让 A 等于 B , 我们有:

$$\begin{aligned}
 \sigma \sqrt{2(a+\delta)r_p^*} - r_p^* f'_i &= f'_i \delta - \frac{f'_i}{2} \frac{\delta}{\sqrt{(a+\delta)^2 - x_m^2}} \\
 &\cdot \left[(a+\delta)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{a+\delta} \right) - a \sqrt{2a\delta + \delta^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

现在我们定义如下无量纲量: $\beta = \sigma/f'_i$, 为载荷参数, $\varphi = \delta/a$, 为损伤带几何参数, 和 $\eta = (a - x_m)/a$, 则为模型参数. 从而方程(3.7)变为

$$\beta^2 \left[\sqrt{1+\varphi} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\varphi}{1+\varphi} \frac{(1+\varphi)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{1+\varphi} \right) - \sqrt{2\varphi + \varphi^2}}{2 \sqrt{(1+\varphi)^2 - (1-\eta)^2}} \tag{3.8}$$

因为 $\varphi \ll 1$, $\eta \ll 1$, 我们可以有 $(1+\varphi) \approx 1+n\varphi$ 和 $(1-\eta) \approx 1-n\eta$. 因此

$$\frac{1}{2} \beta^2 (1+\varphi) = \frac{\varphi}{1+2\varphi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{1+\varphi} \right) - \frac{\sqrt{2\varphi + \varphi^2}}{2 \sqrt{2(\varphi + \eta)}} \tag{3.9}$$

或

$$\text{at } \frac{1}{1+\varphi} = \sin \left[\frac{\sqrt{2(\varphi + \eta)} (\beta^2 (1+\varphi) - 2\varphi) - \sqrt{2\varphi + \varphi^2}}{1+2\varphi} + \frac{\pi}{2} \right] \tag{3.10}$$

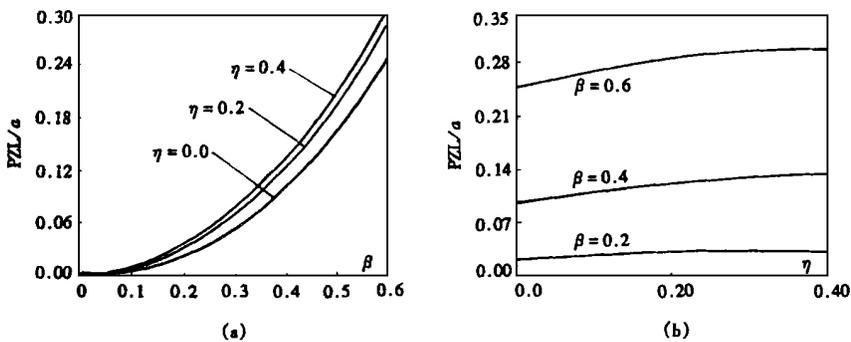


图2 非线性能量模型的正则化损伤带尺寸

注意到 $1/(1+\varphi) = 1-\varphi$ 和 $\sin(\pi/2+\Theta) = \cos\Theta \approx 1-\Theta^2/2$, 如果 $\Theta \ll 1$, 我们得到

$$\varphi = \frac{2(\varphi + \eta) (\beta^2 (1+\varphi) - 2\varphi)^2 - 2 \sqrt{2(\varphi + \eta)} \sqrt{2\varphi + \varphi^2} (\beta^2 (1+\varphi) - 2\varphi) + 2\varphi + \varphi^2}{2(1+2\varphi)^2} \tag{3.11}$$

$$K_{\rho} = 2f'_i \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \left[\arccos\left(\frac{a}{a+\rho}\right) - \frac{\rho}{\sqrt{(a+\rho)^2 - x_m^2}} \right] \quad (3.20)$$

我们记得 $K_{\sigma} = \sigma \sqrt{\pi(a+\rho)}$, β , φ 和 $\eta = (a - x_m)/a$, 所以有

$$\frac{1}{1+\varphi} = \cos\left[\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - (1-\eta)^2}} - \frac{\pi}{2}\beta \right] \quad (3.21)$$

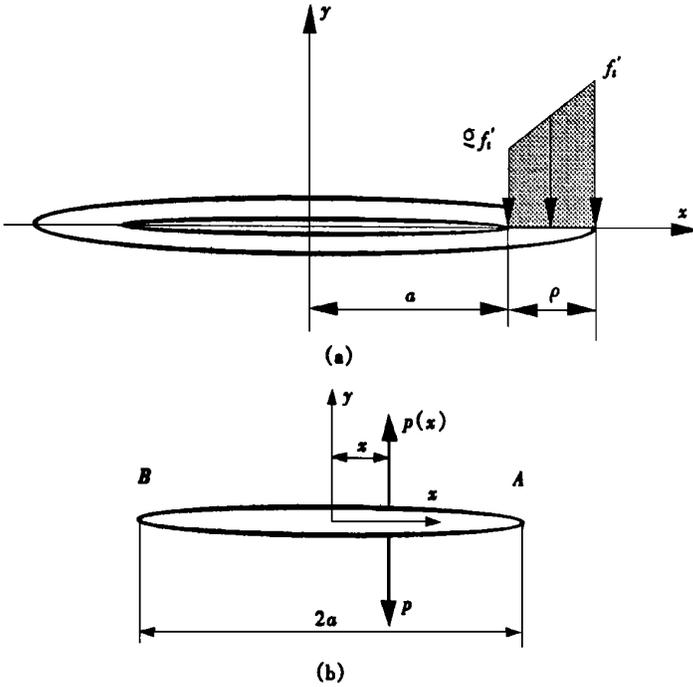


图 4 非线性断裂模型($\sigma_y = f(r)$)

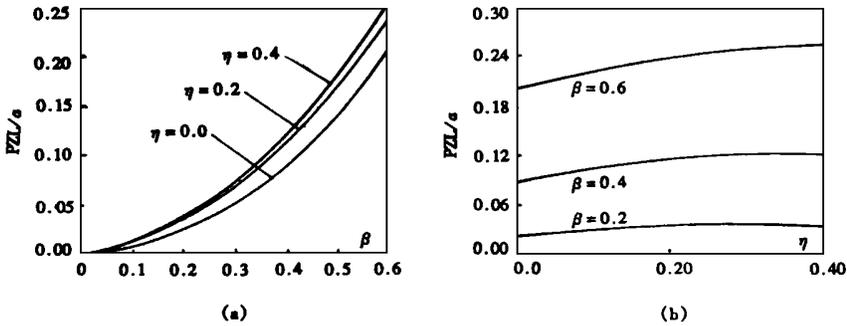


图 5 非线性断裂模型的正则化损伤带尺寸

利用近似关系式 $1/(1+\varphi) \approx 1-\varphi$, $\cos(\cdot) \approx 1-(\cdot)^2/2$, 方程式(3.21)变为

$$2\varphi = \left[\frac{\varphi}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - (1-\eta)^2}} - \frac{\pi}{2}\beta \right]^2 \quad (3.22)$$

所以, DZL 计算式为

$$\frac{DZL}{a} = \varphi^* \quad (3.23)$$

我们将正则化的损伤带长度与载荷参数关系绘于图 5 所示。

本文的结果显示了混凝土材料裂纹尖端的损伤带几何尺寸能够和上述几种模型方式获得, 而这些方式十分类似于经典断裂力学中的方法, 另外这里得到的裂纹尖端损伤带尺寸可以用于混凝土材料有效裂纹长度的计算。计入了裂纹尖端损伤带长度, 则裂纹尖端软化区尺寸也同时获得。

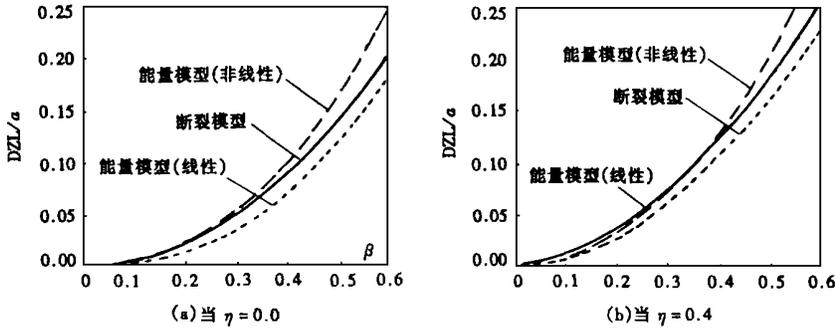


图 6 不同参数 η 时不同模型比较

§ 4. 两种模型比较

这里, 我们将上述两种模型取不同参数时的比较结果分别绘于图 6(a)、(b) 中。首先, 我们发现: 当 η 取不同的值时, 它们具有类似的变化趋势。当载荷参数增大时, DZL 也将增大。当模型参数 η 增大时, DZL 值也将增大。其次, 当 η 取相同的值时, 而载荷参数变化时, 由断裂模型得到的 DZL 将小于由能量模型所得到的 DZL。另外, 线性能量模型的结果普遍地小于其他两种模型。当随着载荷参数增加时, 在考虑计算混凝土裂纹尖端处的损伤带长度尺寸时, 由线性能量模型得到的结果将产生较大的误差。

致谢 作者感谢国家教育委员会留学回国人员科研基金对本项目的资助。

参 考 文 献

- 1 M. L. Ayari, Static and dynamic fracture mechanics of concrete gravity dams, Ph. D. Thesis, University of Colorado (1988).
- 2 Z. P. Bazant, Mechanics of distributed cracking, Appl. Mech. Rev., **39**(5) (1986), 674—683.
- 3 S. P. Shah and Y. S. Jenq, A two parameter fracture model for concrete, J. of Engr. Mech. ASCE, **111**(3) (1985), 275—283.
- 4 S. E. Swartz, Fracture toughness testing of concrete at Kansas State: Is LEFM acceptable?, Proc. of Int. Conf. Fracture Mechanics of Concrete & Masonry Structures (1982).

- 5 A. Hillerborg, M. Modeer and P. E. Petersson, Analysis of crack formation and crack growing concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement & Concrete Research*, **6** (1976), 773—782.
- 6 Z. P. Bazant, Size effect in blunt fracture: concrete, rock and metal, *J. of Engr. Mechanics*, ASCE, **110**(4) (1984), 518—535.
- 7 Z. P. Bazant, Comment on Hillerborg's comparison of size effect law with fictitious crack model, *Dei Poli Anniversary Volume*, edited by L. Cedolin, Politecnico di Milano (1985), 3335—338.
- 8 Ye, Zhiming, Plastic zone characteristics at crack tip in anisotropic solids, *International Journal of Fracture*, **74**(1) (1995/6), R3—R10.
- 9 H. Liebowitz, *Fracture, An Advanced Treatise*, Vol. II, Academic Press (1986).

The Damage Process Zone Characteristics at Crack Tip in Concrete

Ye Zhiming

(Shanghai Institute of Applied Mathematics & Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

This paper presents a comprehensive derivation of fracture process zone size which closely parallels similar work in fracture of metals and anisotropic solids but is adapted to concrete. Some nonlinear mechanics models of concrete materials will be discussed by using uniaxial stress assumptions. For uniaxial stress assumption, energy model and fracture model will be presented for nonlinear softening models. Finally, a comparison of those models is provided.

Key words concrete, crack tip, damage zone, nonlinear softening model

$$\alpha_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} = f' \quad (2.1)$$

用远场的应力($\sigma = K_I / \sqrt{\pi a}$)消去 K_I , 我们有

$$\frac{r_p^*}{a} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{f_i'^2} \quad (2.2)$$

实际上裂纹尖端的损伤带尺寸比这里得到的要大, 因此在下面我们将用二阶近似理论来分析讨论此问题。

§ 3. 二阶近似理论

在二阶近似理论中, 我们将计入混凝土材料拉伸实验结果中的过峰值应力分布以及非线性软化特性的影响。对于混凝土材料, 当外载荷增加时, 靠近裂纹顶端处, 将出现一个软化损伤区域, 此区域的尺寸随着应力状态的不同而异。在此时, 对这种损伤带的尺寸估计也是不容易的事。在这里, 将采用作者研究各向异性材料裂纹尖端塑性区特性的分析方法^[8], 来研究混凝土材料裂纹尖端损伤带几何尺寸特性。我们将考虑二种情况: (1) 断裂模型, 即将局部和远场感应的应力强度因子考虑在一起; (2) 线性和非线性能量模型, 即裂纹尖端处发生能量转换, 我们还引入一种软化特性。这种特性完全基于 Hillerborg 模型, 其聚合力正比于裂纹张开量。断裂模型与能量模型都将考虑以上这些因素。

1. 能量模型

在这类模型中, DZL(损伤带长度)是由在虚拟裂纹尖端的应力分布和真实裂纹损伤带所产生的能量来得到的, 前者为图 1 中的 A 面积, 而后者为图 1 中的 B 面积。又由图 1, 我们让 A 等于 B 来确定求 DZL 的方程。

参见图 1, 我们有 a 为实裂纹半长, $a + \delta$ 为虚拟裂纹的半长, $\delta + r_p^*$ 为 DZL。这里裂纹张开位移为 $\text{COD}_m = w_m$, COD_m 是裂纹张开位移的极限值。对于虚拟裂纹, 裂纹张开位移 w 由下式给出

$$w = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{(a + \delta)^2 - x^2} \quad (3.1)$$

我们假定应力 σ 与位移 w 具有如下关系:

$$\sigma = \lambda w + \beta \quad (3.2)$$

应用边界条件, 当 $w = w_m$ 时, $\sigma = 0$, 和当 $w = 0$ 时 $\sigma = f_i'$ 。进而, 方程(3.2)可以写成如下形式

$$\sigma = f_i' \left[1 - \frac{w}{w_m} \right] \quad (3.3)$$

或

$$\sigma = 2f_i' \left[1 - \sqrt{\frac{(a + \delta)^2 - x^2}{(a + \delta)^2 - x_m^2}} \right] \quad (3.4)$$

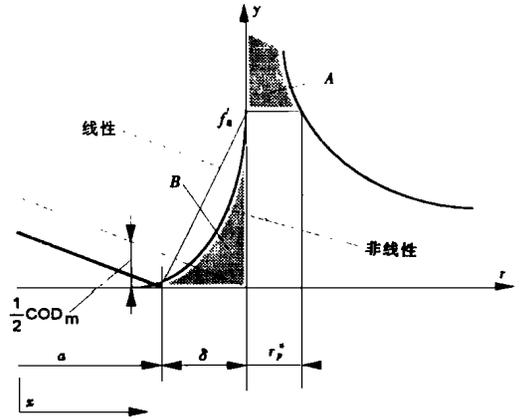


图 1 非线性和线性能量模型
($\sigma_y = f(w)$ 和 $\sigma_y = f(r)$)

或

$$\begin{aligned} & (2(\varphi + \eta)(\beta^2(1 + \varphi) - 2\varphi)^2 + 2\varphi + \varphi^2 - 2\varphi(1 + 2\varphi)^2)^2 \\ & = 8(2\varphi + \varphi^2)(\varphi + \eta)(\beta^2(1 + \varphi) - 2\varphi)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

上述不等式可以写成关于 φ 的 6th 多项式的求根公式。从而全部损伤带长度可由下式给出:

$$\frac{DZL}{a} = \varphi^* + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (3.13)$$

式中, φ^* 是方程(3.12)的根。我们将此模型的数值结果绘于图 2 所示。

2. 线性能量模型

类似于非线性能量模型, 我们假定应力 σ 与其尖端尺寸之间的线性关系为:

$$\sigma = \lambda r + \beta \quad (3.14)$$

参见图 1, 我们有与非线性能量模型类似的计算方法, 最终得到关于损伤带长度尺寸计算式为:

$$\frac{DZL}{a} = \lambda^* + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (3.15)$$

对于 λ^* , 有计算式为

$$\lambda^* = \frac{\left[\frac{\beta^2}{2} \left(1 + \eta + \frac{\beta^2}{2} - \eta \right) + \sqrt{\left[\frac{\beta^2}{2} \left(1 + \eta + \frac{\beta^2}{2} \right) - \eta \right]^2 + \beta^2(1 - \beta^2)} \right] \left(\eta + \frac{3}{4}\beta^2 \right)}{(1 - \beta^2)} \quad (3.16)$$

这里, β 是载荷参数, 而 η 则为模型无量纲参数。这个模型的数值结果绘于图 3 中。

3. 断裂模型

在这模型中, DZL 是由远场的应力强度因子 K_σ 等于聚合力引起的局部应力强度因子 K_ρ 来确定的, 即

$$K_\sigma = -K_\rho \quad (3.17)$$

参见图 4, 我们有 ρ 是 DZL, α 类似于先前模型中的 COD_m , 是模型参数, f'_t 是混凝土拉伸强度。由图 4, 我们便可确定 K_σ 和 K_ρ 。离裂纹中点 x 距离处受两点载荷的裂纹的应力强度因子分别为:

$$K_A = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \text{ 和 } K_B = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

这里, A 表示距裂纹尖端近处的载荷, 而 B 则为另一侧的。用虚拟裂纹长度表达式(长度为 $2a^*$)以及沿着损伤带长度做积分, 我们得到

$$K_\rho = K_A + K_B = \int_a^{a^*} \frac{p(x)}{\sqrt{\pi a^*}} \left(\sqrt{\frac{a^*+x}{a^*-x}} + \sqrt{\frac{a^*-x}{a^*+x}} \right) dx \quad (3.18)$$

式中, $a^* = a + \rho$, $p(x) = f'_t(1 - w/w_m) = f'_t(1 - \sqrt{(a^{*2} - x^2)/(a^{*2} - x_m^2)})$ 。于是我们得到:

$$K_\rho = 2f'_t \sqrt{\frac{a^*}{\pi}} \int_a^{a^*} \left[1 - \frac{\sqrt{a^{*2} - x^2}}{\sqrt{a^{*2} - x_m^2}} \frac{1}{\sqrt{a^{*2} - x^2}} dx \right] \quad (3.19)$$

经运算后, 有

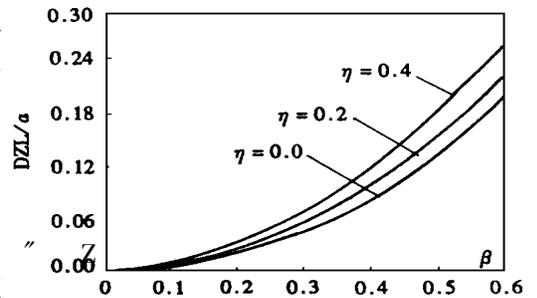


图 3 线性能量模型正则化损伤带特性