

受压矩形截面柱在塑性阶段的 缺陷敏感性分析

程尧舜^① 方 红^① 卢文达^②

(1996 年 8 月 7 日收到)

摘 要

对加载到塑性阶段的矩形截面柱, 本文研究了几何缺陷对屈曲的影响。在分析中考虑了弹性卸载的影响。求出了荷载、缺陷大小及分叉模态幅值之间的精确渐近关系式。结果表明在塑性阶段最大承载力对小缺陷非常敏感, 但当缺陷大小达到某一值后, 可能不存在最大载荷。

关键词 塑性屈面 缺陷敏感性 渐近展开

§ 1. 引 言

在塑性阶段, 由于会出现弹性卸载现象, 结构的缺陷敏感性问题变得极其复杂。Hutchinson (1973, 1974)^[1, 2] 首先从理论上研究了塑性阶段的缺陷敏感性问题。他用 Koiter 理论分析了弹性卸载出现前结构的特性, 并求出了卸载开始时的载荷和位移。Needleman 和 Tvergaard (1982)^[4] 忽略弹性卸载的影响, 把弹塑性材料作为亚弹性材料来分析缺陷敏感问题。事实上弹性卸载是不可忽略的。例如, 从 Hutchinson (1974)^[2] 和本文作者 (1995)^[3] 的分析可知, 卸载对后分叉的影响是如此之大以至对称结构后分叉展开式的开始几项完全没有反映出几何非线性来。苏旭明和卢文达 (1991)^[5] 也研究了塑性阶段的缺陷敏感性问题。在他们的分析中人为地引入了近似, 导出了前后不一致的方程。

本文将从理论上严格地分析受压筒支矩形截面柱在塑性阶段的缺陷敏感性问题。在分析中考虑了弹性卸载的影响, 求出了载荷的渐近展开式。在对卸载出现后柱特性的分析中所用的方法和本文作者 (1995)^[3] 在对完善柱后分叉分析中所用的方法是相同的。由于作者已讨论过受压矩形截面柱的后分叉问题, 故文中不加证明地直接利用了后分叉分析的一些结果。

§ 2. 问题的描述

要分析的矩形截面柱如图 1 所示。截面的宽为 $2c$, 高为 $2b$, $c < b$, 柱长为 L 。取一随体坐

① 同济大学结构学院, 上海 200092

② 华东工业大学机械系, 上海 200093

标系, 变形前这一坐标系为直角坐标系, 原点在柱的形心。柱两端简支, 受到轴向压力 p 的作用。缺陷指的是几何缺陷, 可以把这种缺陷看成为无载荷作用时, 柱在 z 方向的初始位移, 用 ξg 表示, 其中 g 是 x 的函数, 表示缺陷的形状, ξ 表示缺陷的大小。用 u 和 w 分别表示由载荷引起的 x 和 z 方向的位移。从初始有缺陷状态开始, 由载荷引起的变形可用下面的拉格朗日应变来度量。

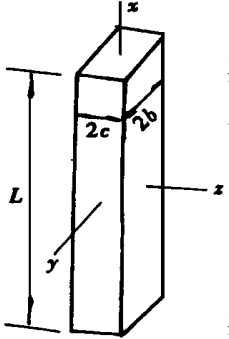


图1 受压简支矩形截面柱

$$\varepsilon = u' - zw'' + \frac{1}{2}(w')^2 + \xi g' w' \quad (2.1)$$

其中 $()'$ 表示相对于 x 的导数。柱两端简支, 且规定下端的纵向位移为零, 则边界条件可写成

$$w(-L/2) = w(L/2) = 0, \quad u(-L/2) = 0 \quad (2.2)$$

对处在塑性状态的材料, 应力率和应变率之间的关系为

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} \quad (\text{当 } \dot{\varepsilon} < 0) \quad (2.3)$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \quad (\text{当 } \dot{\varepsilon} > 0) \quad (2.4)$$

其中, 点表示对时间参数求导, σ 是应力, E_t 是切线模量, E 是弹性模量。

假定无缺陷直柱在压力 p 作用下发生分叉时, 已完全进入塑性状态。

对有缺陷的柱, 当 p 较小时, 柱完全是弹性的, 随着 p 的增大, 柱的部分材料进入塑性状态, p 继续增大, 只要 ξ 足够小, 柱可全面进入塑性状态, 当 p 增大到某一值 \hat{p} 时, 柱表面上的一条线开始出现弹性卸载, 然后弹性卸载区扩大。最后 p 达到最大值, 柱失去稳定。在以后的分析中, 总是假定 ξ 足够小以保证上述过程的出现。

§ 3. 缺陷对弹性卸载出现前柱特性的影响

发生弹性卸载前, 可把柱的变形看成为非线性弹性变形, 因此可用 Koiter 的弹性后屈曲理论来分析缺陷对柱特性和的影响。Hutchinson(1973, 1974) 已作出了这种分析。载荷和位移可展开成如下形式

$$\lambda = p/p_c = 1 - \sqrt{3}\xi + \dots \quad (3.1)$$

$$u = u_0(\lambda) + \dots \quad (3.2)$$

$$w = \xi c \cos(\pi x/L) + \dots \quad (3.3)$$

$$\rho = \frac{-2}{\mu L(1+k)} \int_{-L/2}^{L/2} g' \sin \frac{\pi x}{L} dx, \quad \mu = \frac{\pi c}{L}, \quad P_c = \frac{4bc\mu^2 E_t^c}{3}, \quad k = \frac{\mu^2 q}{3} \quad (3.4)$$

其中, p_c 是最小分叉荷载, u_0 是基本解, 指标 c 表示分叉时取的值, $q = (dE_t/d\sigma)_c$ 。

把式(3.2)和(3.3)代入式(2.1), 取时间参数为 ξ 求应变率得

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0(dN/d\xi) + \mu^2(z/c) \cos(\pi x/L) + O(\lambda-1, \xi, \xi) \quad (3.5)$$

其中, $\dot{\varepsilon} = -\mu^2/3$ 。

上面所列出的结果适用于弹性卸载出现前且 ξ 和 $\lambda-1$ 都很小的情况。在弹性卸载开始的时刻, 应变率的最大值为零。从式(3.5)可知, 在卸载开始的时刻有

$$dN/d\xi = 3 + O(\lambda-1, \xi, \xi) \quad (3.6)$$

且在式(3.5)的精度内, 卸载是从 $z=c, x=0$ 这一条线上开始的。从式(3.6)、(3.1)和(3.3)可求得卸载开始的载荷和位移 w 如下

$$\xi = \sqrt{\sqrt{3}/3} + \dots, \quad \hat{w} = \xi c \cos(\pi x/L) + \dots, \quad \lambda = 1 - 3\xi + \dots \quad (3.7)$$

从上面的表达式可以看出, 缺陷的存在使卸载出现时的载荷变小, 减小量和 ξ 的平方根成比例。下面将以上述结果为基础来分析柱在卸载出现后的特性。

§ 4. 缺陷对柱在弹性卸载发生后特性的影响

把弹性卸载出现后的载荷、位移表示成下面的形式

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda(t) \quad (4.1)$$

$$u = u_0(\lambda) + u(t) \quad (4.2)$$

$$w = \hat{w} + w(t) \quad (4.3)$$

其中, t 是一个选定的大于等于零的时间参数。当 t 为零时, 柱处于弹性卸载刚发生的时刻, 即

$$\lambda(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad w(0) = 0 \quad (4.4)$$

利用式(3.1)可把应变及其变分的率表示成

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \dot{u} - z\dot{w} + (\dot{\hat{w}} + \dot{w})\dot{w} + \xi g' \dot{w} \quad (4.5)$$

$$\delta\varepsilon = \dot{w}' \delta\dot{w}' \quad (4.6)$$

其中, $\varepsilon_0 = \dot{u}_0$

采用 Budiansky (1974)^[6] 的技巧, 令 $\xi = \alpha^{10}$ 。假定有如下展开式

$$\lambda = \lambda_5 t^5 + \lambda_6 t^6 + \dots \quad (4.7)$$

$$u = u_5 t^5 + u_6 t^6 + \dots \quad (4.8)$$

$$w = w_5 t^5 + w_6 t^6 + \dots \quad (4.9)$$

在上面的展开式中, 和后分叉分析时相同直接假定了不为零的首项是 t 的五次方项, 这一点是容易证明的。

位移和荷载的完全展开式可以写成

$$\lambda = 1 - 3\beta t^5 + \lambda_5 t^5 + \lambda_6 t^6 + \dots \quad (4.10)$$

$$u = u_0(\lambda) + u_5 t^5 + u_6 t^6 + \dots \quad (4.11)$$

$$w = \beta c \cos(\pi x/L) t^5 + w_5 t^5 + w_6 t^6 + \dots \quad (4.12)$$

$$\beta = (\alpha Q/3)^{1/2} \quad (4.13)$$

对塑性加载的情况, 利用式(2.3)、(2.1)、(4.11)和(4.12)可以证明

$$\sigma = \sigma_c + E_t^c (\varepsilon - \varepsilon_c) + O(t^{10}), \quad E_t = E_t^c + q E_t^c (\varepsilon - \varepsilon_c) + O(t^{10}) \quad (4.14)$$

利用展开式(4.11)、(4.12)和(4.14)及文[3]的结果可以证明, 率形式的虚功方程可表示成下面的形式

$$\int_{\Omega_u} (E - E_t) \varepsilon \delta\varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} (E_t \varepsilon \delta\varepsilon + \alpha \dot{w}' \delta\dot{w}') d\Omega + O(t^{12}) = -p \delta u|_{x=L/2} \quad (4.15)$$

其中, Ω 是柱所占的空间区域, Ω_u 是弹性卸载区。由于卸载区是从一条线上开始扩展出来的, 所以上式中左边第一项的阶比第二项的阶高。把有关展开式代入(4.15), 保到 t^4 的项, 利用后分叉分析的结果 $E_t^c \varepsilon = \sigma_c = -p c/4bc$ 得

$$\int_{\Omega} [E_t^c (u_5 - z w_5) (\delta\dot{u}' - z \delta\dot{w}') + \alpha \dot{w}'_5 \delta\dot{w}'_5] d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

在式(2.2)的边界条件下,从上式可求得

$$u_5 = 0, w_5 = c \cos(\pi x/L) \quad (4.17)$$

t 为零时,卸载从一条线上开始,其它地方仍为塑性加载,此时由于一到四阶应变率都为零,故五阶应变率的最大值应为零⁷⁾,即

$$\max(d^5 \varepsilon/dt^5)/5! = \max[-\mu^2 \lambda_5/3 + \mu^2(z/c) \cos(\pi x/L)] = 0 \quad (4.18)$$

从上式可求出 $\lambda_5 = 3 \cdot$

类似于后分叉分析,可以证明

$$u_i = w_i = 0 \quad (i = 6, 7, 8, 9) \quad (4.19)$$

$$\lambda_6 = \lambda_8 = 0 \quad (4.20)$$

弹性卸载区和塑性加载区的交界面方程为

$$5\{-1 + (z/c) \cos(\pi x/L)\} - 7\lambda_7 t^2/3 - 3\lambda_9 t^4 + O(t^5) = 0 \quad (4.21)$$

弹性卸载区是由弹塑性交界面和柱表面围成的区域。引入一个函数 f 如下

$$f = - \int_{\Omega_u} (E - E_i^c) \mu^2 (z/c) \cos(\pi x/L) d\Omega = f_9 t^9 + f_{11} t^{10} + O(t^{10}) \quad (4.22)$$

其中

$$f_9 = - \frac{16}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{-7\lambda_7}{5} \right]^{5/2} \frac{bcL\mu^4(E - E_i^c)}{\pi} \quad (4.23)$$

$$f_{11} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{bcL\mu^4(E - E_i^c)}{\pi} \left[6 \left[-\frac{7\lambda_7}{15} \right]^{3/2} \lambda_9 + \left[-\left(\frac{7\lambda_7}{15}\right)^{7/2} \right] \right] \quad (4.24)$$

在方程(4.15)中,令 $\delta u = 0$, $\delta w = w_5$, 把有关展开式代入,利用已有的结果可导出如下方程

$$\int_{\Omega} (E_i^c z^2 \ddot{w} \dot{w}_5 + \sigma_{w'} \dot{w}_5) d\Omega + (30B - f_9) t^9 + [(12 + 7\beta) \lambda_7 B - f_{11}] t^{11} + o(t^{11}) = 0 \quad (4.25)$$

其中

$$B = -2\mu^4 bcL(1+k)E_i^c/3 \quad (4.26)$$

在式(4.16)中,取 $\delta u = 0$, $\delta w = \dot{w}$, 得

$$\int_{\Omega} \{E_i^c z^2 \ddot{w} \dot{w}_5 + \sigma_{w'} \dot{w}_5\} d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

利用式(4.27),从式(4.25)可得

$$30B = f_9, \quad (12 + 7\beta) \lambda_7 B = f_{11} \quad (4.28)$$

从上面两个方程可解出 $\lambda_7 \lambda_9$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_7 &= -\frac{15}{7} \Theta^{2/5}, & \lambda_9 &= \frac{1}{42} (17 + 14\beta) \Theta^{4/5} \\ \Theta &= 15\pi E_i^c (1+k) / 4\sqrt{2} (E - E_i^c) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

把上面求出的 λ 和 w_i 代入展开式(4.10)和(4.11)利用 $\xi = \alpha t^{10}$ 消去 α , 并记 $\xi = \xi_+ t^5$, 则可得 λ 和 w 的展开式如下

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda + 3(\xi_- \xi) + \lambda_7 (\xi_- \xi)^{7/5} + \lambda_9 (\xi_- \xi)^{9/5} \\ &\quad + \frac{1}{3} \xi \Theta^{4/5} (\xi_- \xi)^{4/5} + \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$w = \xi c \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \dots \quad (4.31)$$

其中

$$\lambda_7 = -\frac{15}{7} \Theta^{2/5}, \quad \lambda_9 = \frac{17}{42} \Theta^{4/5} \quad (4.32)$$

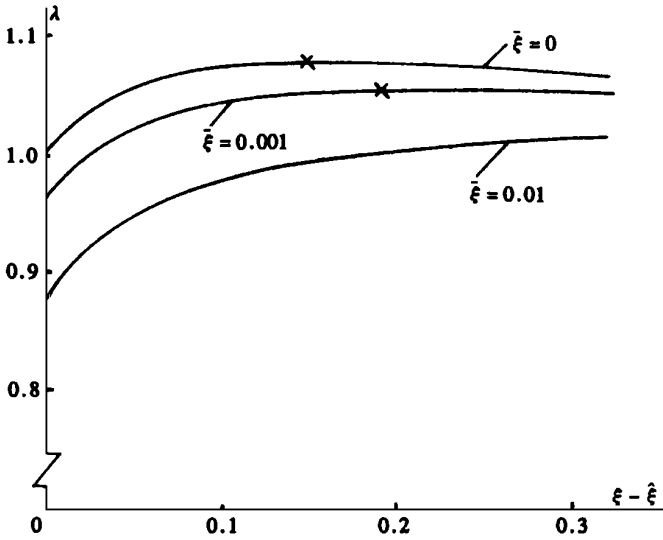


图2 缺陷敏感性($E_i^c/E = 0.6, k = 1$)

§ 5. 数值算例和结论

虽然式(4.30)给出了缺陷大小、屈曲模态大小和载荷之间的渐近关系,为了从图形上直接看出缺陷对载荷的影响,在此给出一些数值算例。取材料参数为 $E_i^c/E = 0.6, k = 1$ 。假定缺陷形状和分叉模态相同,即 $g = c \cos(\pi x/L)$, 则 $\rho = 0.5$ 。在图2中对 $\xi = 0, \xi = 0.001$ 和 $\xi = 0.01$ 的情况画出了 $\lambda - \xi$ 关系曲线。虽然卸载出现时的载荷减小量和 ξ 的平方根成比例,但最大承载力的减小量并不和 ξ 的平方根成比例。当 ξ 达到一定大小后,在 ξ 较小的范围内,不存在最大载荷。尽管如此,载荷对小缺陷还是很敏感的。

本文的分析比较简单,唯一比较烦的是计算 f 比较冗长。不管有无缺陷存在, f 的表达式是相同的。因此只要对无缺陷柱作出了后分叉分析,就可很容易得到缺陷敏感性分析。

参 考 文 献

- 1 J. W. Hutchinson, Imperfection sensitivity in the plastic range, J. Mech. Phys. Solids., **21** (1973), 191—204.
- 2 J. W. Hutchinson, Plastic buckling, Adv. Appl. Mech., **14** (1974), 67—144.
- 3 Y. S. Cheng, W. D. Lu and H. Fang, Plastic post buckling of a simply supported column with a solid rectangular cross section, Appl. Math. Mech., **16** (1995), 713—722.
- 4 A. Needleman and V. Tvergaard, Aspects of plastic postbuckling behavior, Mechanics of Solids, Oxford: Pergamon Press (1982), 453—498.

- 5 X. M. Su and W. D. Lu, Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of structures in the plastic range: part 2, Thin - Walled Struct. , **11** (1991), 203—217.
- 6 B. Budiansky, Theory of buckling and post- buckling behavior of elastic structures, Adv. Appl. Mech. , **14** (1974), 1—65.
- 7 Y. S. Cheng and W. D. Lu, Uniqueness and bifurcation in elastic-plastic solids, Int. J. Solids Structures, **30** (1993), 3073—3084.

Imperfection Sensitivity Analysis of a Rectangular Column Compressed into the Plastic Range

Cheng Yaoshun Fang Hong

(College of Structural Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Lu Wenda

(Department of Mechanical Engineering, East China University of Technology,
Shanghai 200093, P. R. China)

Abstract

The effect of small geometrical imperfections on the buckling of a rectangular column compressed into the plastic range is studied. In the analysis, the effect of elastic unloading is taken into account. An asymptotically exact relation is obtained among the load, the amplitude of imperfections and the amplitude of bifurcation mode. The results show that the maximum supported load is very sensitive to small imperfections, and that, however, there may not be maximum load if the imperfection amplitude is greater than some magnitude.

Key words plastic buckling, imperfection sensitivity, asymptotic expansion