应用数学和力学, 第 19 卷 第 1 期(1998 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

OGY 方法的改进及证明*

杨　凌①②　刘曾荣①②

(1996 年 8 月 5 日收到, 1997 年 7 月 15 日收到修改稿)

摘　要

OGY 方法是混沌控制最重要的方法· 通过选取系统参数的小变化, 使双曲不动点变“稳定”· 本文改进了 OGY 方法中的参数选取方法, 并且完成了对 OGY 方法的严格证明·

关键词　动力系统　混沌　混沌控制　OGY 方法

§1. 引　　言

混沌控制是近年比较热门的一个课题· 1990 年, E. Ott, C. Grebogi 和 J. A. Yorke[1] 提出了混沌控制的概念和实现混沌控制的方法(即 OGY 方法)· 已有的大量结果表明 OGY 方法是行之有效的· 在此之后, 又提出了许多混沌控制的方法, 其中不少方法都是在 OGY 方法上发展起来的[3][4][5][6][7]· 因此 OGY 方法成为混沌控制的一个重要基础· 完成对 OGY 方法的证明, 对于建立混沌控制数学理论有重要意义· 本文通过改进参数选取方法, 证明了 OGY 方法是可行的·

OGY 方法主要是处理二维平面上的迭代 $X_{n+1}=F_p(X_n)$, 其中 p 为系统的可调参数, 当 $p=0$ 时, 系统有一个双曲不动点 $\xi=0$, 它有稳定流形与不稳定流形· OGY 方法的目的是使 $\xi=0$ 变“稳定”, 其控制方法是在每一步 n, 选取适当的系统参数 p_n, 通过迭代 $X_{n+1}=F(p_n, X_n)$, 使在 $\xi=0$ 附近的点 $X=X_0$ 迭代出的点列 $\{X_n\}$ 趋向于 $\xi=0$, 即使得 $\xi=0$ 变“稳定”· 实现上述过程的关键在于 p_n 的取法, 在 OGY 方法中通过调节 p_n, 试图使 $X_{n+1}=F(p_n, X_n)$ 落在 $\xi=0$ 的稳定流形切线上, 由此导出 p_n 的近似公式 $p_n=\lambda_u(\lambda_u-1)^{-1}(X_n\cdot f_u)/(g\cdot f_u)$, 其中 λ_u 是 $\xi=0$ 的不稳定特征根, f_u 为其稳定流形的垂直方向, · 为点积, $g=\partial\xi(p)/\partial p|_{p=0}$, $\xi(p)$ 是在参数 p 时系统的双曲不动点坐标, g 即是 $\xi(p)$ 的切向量· 由于用上述公式迭代的 $X_{n+1}=F(p_n, X_n)$ 中每个 X_{n+1} 只是落在稳定流形切线附近, 而非严格落在稳定流形切线上, 从而有可能如[1]中所说离开 $\xi=0$· 事实上可以通过改变 p_n 的取法, 使得迭代 $X_{n+1}=F(p_n, X_n)$ 存在一个“不变区域”· 只要初值 X_0 落在此“不变区域”中, 就可以保证每个 X_n 落在其中, 且当 $n\to\infty$ 时, X_n 以 $a^n(0<a<1)$ 速率趋向于 $\xi=0$, 这样不仅给出了 p_n 的优化选取, 而

* 国家自然科学基金资助项目
① 苏州大学数学系, 江苏 苏州 215006
② 中科院力学所 LNM 开放实验室, 北京 100080

且完成了对 OGY 方法的数学证明•

§ 2. 主 要 结 果

本文处理平面映射

$$X_{n+1} = F_p(X_n) \tag{2.1}$$

$X=(x, y)$, p 为系统的可调参数, 先对(2.1)作如下假设

H1. $F_p(X) \in C^2$• 设 $p=0$ 时系统的双曲不动点 $\xi=0$, 它的稳定流形切方向与不稳定流形切方向分别为 x 轴和 y 轴, 事实上, 这可以通过一个坐标变换实现• λ_s 与 λ_u 分别为其稳定特征值和不稳定特征值•

H2. 设 $\xi(p)=(x(p), y(p))$ 为参数为 $p(|p|<P^*)$ 时系统相应的双曲不动点, $\xi(p) \in C^2$, 记 $\partial\xi(p)/\partial p|_{p=0}=(a, b)^T$, $\partial^2\xi(p)/\partial p^2|_{p=0}=(c, d)^T$•

H3. 不失一般性, 设 $b>0$, $a \geqslant 0$, $\lambda_u > 1$•

在上述假设下, 可以得到本文的主要结果为:

定理 1 $\exists K>0$, $\forall k>K$, $\exists$ $\xi=0$ 的一个邻域 U, $\forall X_0 \in U$, 选取由

$$bp_n = y_n + 2y_n/(k\lambda_u) \tag{2.2}$$

给出的 p_n, 由 $X_{n+1}=F(p_n, X_n)$ 得到的$\{X_n\}$收敛到 $\xi=0$, 且每个 $X_n \in U$•

为简洁起见, 先证明以下几个引理:

引理 1 $\forall \delta_1>0$, $\exists P^*>0$, 使得 $\forall p$ 满足$|p|<P^*$, 成立

$$\xi(0)=\begin{cases} ap+bp^2+ep^2 \\ bp+cp^2+fp^2 \end{cases}, \text{其中 } e, f \text{ 与 } p \text{ 有关, 且 } |e|<\delta_1,\ |f|<\delta_1$$

证明 略•

引理 2 $\forall \delta_2, \delta_3>0$, $\exists N, M \in R$, $\exists \varepsilon>0$, 使得在 $\xi(0)=0$ 的边长 ε 方形邻域内,

$$x_1=\lambda_s x_0+\alpha(x_0^2+y_0^2),\ y_1=\lambda_u y_0+\beta(x_0^2+y_0^2) \qquad (N/2<\alpha, \beta<M/2)$$

特别地, 当$|x_0/y_0|>\delta_2$ 时, $(1-\delta_3)\lambda_s<|x_1/x_0|<(1+\delta_3)\lambda_s$,

当$|y_0/x_0|>\delta_2$ 时, $(1-\delta_3)\lambda_u<|y_1/y_0|<(1+\delta_3)\lambda_u$

且 $\exists P_1^*<P^*$, 当$|p|<P_1^*$ 时, 在 $\xi(p)$ 的边长 $\varepsilon/2$ 的方形邻域内,

$(1-\delta_3/2)|\lambda_s[x_0-x(p)]|+Nr^2<|x_1-x(p)|<(1+\delta_3/2)|\lambda_s[x_0-x(p)]|+Mr^2$,

$(1-\delta_3/2)|\lambda_u[y_0-y(p)]|+Nr^2<|y_1-y(p)|<(1+\delta_3/2)|\lambda_u[y_0-y(p)]|+Mr^2$, 其中 $r^2=\{[x_0-x(p)]^2+[y_0-y(p)]^2\}$

特别地, 当$|(x_0-x(p))/(y_0-y(p))|>\delta_2$ 时,

$$(1-\delta_3)\lambda_s<|(x_1-x(p))/(x_0-x(p))|<(1+\delta_3)\lambda_s,$$

当$|(y_0-y(p))/(x_0-x(p))|>\delta_2$ 时,

$$(1-\delta_3)\lambda_u<|(y_0-y(p))/(x_0-y(p))|<(1+\delta_3)\lambda_u$$

其中 $(x_1, y_1)=X_1=F_p(X_0)$

证明 略•

取 $l_p=bp/(k\lambda_u\delta_2)$ 其中 $k>1$, $\delta_2>0$ 待定•

作曲线 $\Gamma^+:\begin{cases} x=x(p)+l_p/2 \\ y=y(p) \end{cases}$

$$\Gamma^-:\begin{cases} x = x(p) - l_p/2 \\ y = y(p) \end{cases}$$

记 Γ^+, Γ^-, 以及水平曲线 $y = y(p_0)$ 围成的区域为 $U(p_0)$, 见图 1•

引理 3 对 $\forall\,\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, 由引理 1, 引理 2 决定了 ε 和 P_1^*, 则 $\forall\,\eta > 0$, $k > 1$, $\exists\, 0 < P_2^* < P_1^*$, 使在 $U(P_2^*)$ 中, 满足 $l_p < \varepsilon/2$, 且 $\forall\, 0 < p_1, p_2 < P_2^*$ 有

$$(a - \eta)|p_1 - p_2| < |x(p_1) - x(p_2)| < (a + \eta)|p_1 - p_2|$$

$$(b - \eta)|p_1 - p_2| < |y(p_1) - y(p_2)| < (b + \eta)|p_1 - p_2|$$

证明 略•

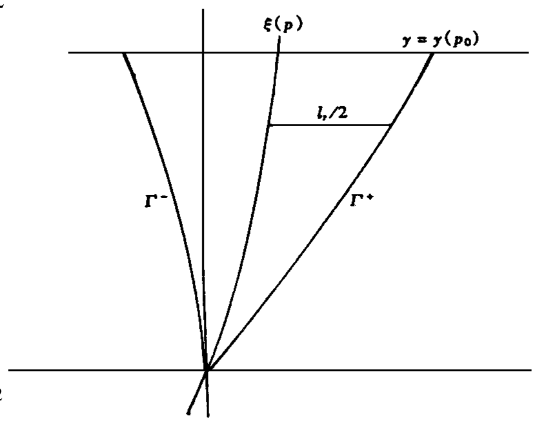

图 1

引理 4 $\forall\, 0 < \delta_1, \delta_3 < 1$, $k > 3$, $\eta > 0$, $0 < \delta_2 < (b - \eta)/5(a + \eta)$, 则 $\exists\, 0 < P_3^* < P_2^*$, 使得 $U(P_3^*)$ 中的每个点 $X_n = (x_n, y_n)$ 满足 $|(y_n - y(p_n))/(x_n - x(p_n))| > \delta_2$, 从而 $(1 - \delta_3)\lambda_u < |(y_n - y(p_n))/(x_n - y(p_n))| < (1 + \delta_3)\lambda_u$, 且 $1.5y_n/k\lambda_u < |(y_n - y(p_n)| < 2.5y_n/k\lambda_u$, 特别地, $y_{n+1} > 0$, 其中 p_n 为(2.2)决定的•

证明 见图 2 取水平线段 $\xi(p)E = l_p$, EF 为竖直线, $\xi(p)F$ 斜率为 $-\delta_2$• 记 EF 长度为 h_p•

当 $p < P_2^*$ 时, 由引理 3 知, $l_p < \varepsilon/2$• 且易知 $h_p/bp = 1/k\lambda_u$

下证: $\exists\, P_3^* < P_2^*$, $\forall\, X_n \in U(P_3^*)$, y_n 位于 $\xi(p)F$ 之下, 同理位于 $\xi(p)'$ 之下• 见图 3• 即满足 $|(y_n - y(p_n))/(x_n - x(p_n))| > \delta_2$•

先在 $U(P_2^*)$ 中考虑• 由(2.2)式, $bp_n = y_n + 2y_n/(k\lambda_u)$ 决定 p_n, 考虑 y_n 与 $y(p_n)$ 关系•

$$y(p_n) = bp_n + (d + f)p_n^2$$

$$y(p_n) - y_n = 2y_n/k\lambda_u + (d + f)[(1 + 2/k\lambda_u)y_n]^2/b^2$$

$\therefore$ 可取到 $P_3^* < P_2^*$, 使 $1.5y_n/k\lambda_u < |(y_n - y(p_n))| < 2.5y_n/k\lambda_u$•

$$y_{n+1} > y(p_n) - |(y_{n+1} - y(p_n))| > y(p_n) - |(y_n - y(p_n))|(1 + \delta_3)\lambda_u$$

$$> y(p_n) - [1.5y_n/k\lambda_u](1 + \delta_3)\lambda_u$$

$\because k > 3$, $\therefore y_{n+1} > y(p_n) - 0.5y_n(1 - \delta_3) > y_n - 0.5y_n(1 + \delta_3) > 0$•

$$\begin{aligned} \text{又 } y_F - y_n &= [y_F - y(p_n)] + [y(p_n) - y_n] \\ &> -h_p + 1.5y_n/k\lambda_u \\ &> -by_n/k\lambda_u + 1.5y_n/k\lambda_u \\ &= -(1 + 2/k\lambda_u)y_n/k\lambda_u + 1.5y_n/k\lambda_u > 0 \end{aligned}$$

同理 $y_{F'} - y_n > 0$•

留下来还要证明 $|x_n| < |x_F|$, 即 $|x_n - x(p_n)| < l_{pn}$

$$|x_n - x(p_n)| < |x_n - x(P)| + |x(p) - x(p_n)| \quad \text{其中 } p \text{ 满足 } y(p) = y_n$$

而 $|x(p)-x(p_n)|<(a+\eta)|p-p_n|<(a+\eta)|y_n-y(p_n)|/(b-\eta)$

$$<2.5y_n(a+\eta)/(b-\eta)k\lambda_u$$

由 $X_n\in U(P_3^*)$ 及 l_p 关于 p 的单调性知

$$|x_n-x(p)|<l_p/2<l_{pn}/2$$

$\therefore$ $|x_n-x(p_n)|<l_{pn}/2+2.5y_n(a+\eta)/(b-\eta)k\lambda_u$

$$<l_{pn}/2+[(a+\eta)/(b-\eta)](l_{pn}/2)(2\times2.5\delta_2y_n/bp_n)$$

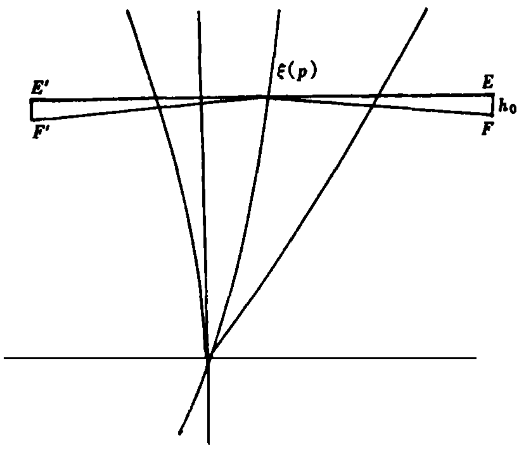

图 **2**

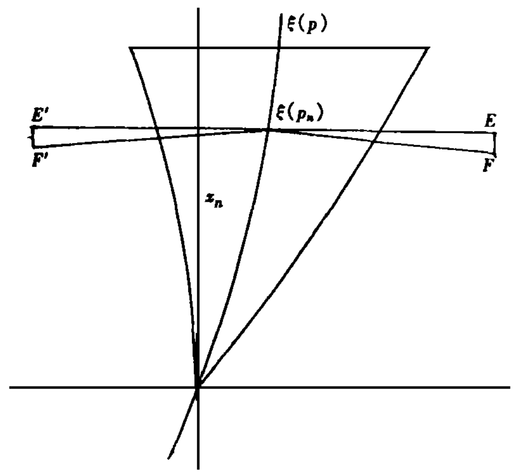

图 **3**

由 $y_n/bp_n<1$ 知

$$|x_n-x(p_n)|<l_{pn}/2+5\delta_2[(a+\eta)/(b-\eta)](l_{pn}/2)$$

由引理关于 δ_2 的条件知

$$|x_n-x(p_n)|<l_{pn}/2+l_{pn}/2=l_{pn}$$

$\therefore$ $|x_n|<|x_F|$, 同理 $|x_n|<|x_{F'}|$

$\therefore$ X_n 位于线段 $\xi(p)F$ 之下, 位于线段 $\xi(p)F'$ 之下• 故满足 $|y_n-y(p_n))/(x_n-x(p_n))|>\delta_2$, 从而由引理 3 知

$(1-\delta_3)\lambda_u<|(y_n-y(p_n))/(x_n-y(p_n))|<(1+\delta_3)\lambda_u$•　　Q. E. D

取定 $\delta_1<1$, $\delta_3<\min\{(1/|\lambda_s|-1)/2,(\lambda_u-1)/(\lambda_u+1)\}$, 即 $|\lambda_s|(1+2\delta_3)<1$, $\lambda_u(1-\delta_3)>(1+\delta_3)$• 取定 η 满足 $[(b+\eta)/(b-\eta)](1+\eta)<1/[|\lambda_s|(1+2\delta_3)]$ 则 $\exists K>0$, $k<K$ 时, $(1+2.5/k\lambda_u)/[1+1.5/k\lambda_u-2.5(1+\delta_3)/k]<1+\eta$• 对上述任意的 k, 取定 $\delta_2<|\lambda_s|/20$, 且满足:

$$\{[1+5\delta_2(a+\eta)/(b-\eta)]|\lambda_s|(1+\delta_3)+5\lambda_u\delta_2(1+\delta_3)(a+\eta)/(b-\eta)\}$$
$$<|\lambda_s|(1+2\delta_3)\text{•}\qquad(\bigstar)$$

引理 5　$\forall\delta_1,\delta_2,\delta_3,k,\eta$ 满足上述 $(\bigstar)$ 取法, 则 $\exists P_4^*<P_3^*$, 使得 $U(P_4^*)$ 中的任一点 X_n, 由 (2.2) 迭代后的 $X_{n+1}\in U(P_4^*)$•

证明　设 p 满足 $y(p)=y_n$, $\tilde{\tilde{p}}$ 满足 $y(\tilde{\tilde{p}})=y_{n+1}$• 显然 $p_n>p>\tilde{\tilde{p}}$• 只要证明 $|x_{n+1}-x(\tilde{\tilde{p}})|<l_{\tilde{\tilde{p}}}/2$ 即可• 首先由引理 4 知: $1.5y_n/k\lambda_u<|(y_n-y(p_n))|<2.5y_n/k\lambda_u$• 且 $|(y_n-y(p_n))/(x_n-x(p_n))|>\delta_2$, 从而 $(1-\delta_3)\lambda_u<|(y_n-y(p_n))/(y_n-y(p_n))|<(1+\delta_3)\lambda_u$•

下面分两种情况讨论:

1) $|(x_n - x(p_n))/[y_n - y(p_n)]| > \delta_2$ 时, 由引理 2 知

$$|x(p_n) - x_{n+1}| < |x_n - x(p_n)|(1+\delta_3)|\lambda_s|$$

而由引理 4 的证明过程知:

$$|x_n - x(p_n)| < l_{pn}/2 + 5\delta_2[(a+\eta)/(b-\eta)](l_{pn}/2)$$

故 $$|x(p_n) - x_{n+1}| < (l_{pn}/2)\{1 + 5\delta_2[(a+\eta)/(b-\eta)]\}(1+\delta_3)|\lambda_s|$$

另一方面,

$$\begin{aligned}|x(p_n) - x(\tilde{\tilde{p}})| &< (a+\eta)|p_n - \tilde{\tilde{p}}| \\ &< [(a+\eta)/(b-\eta)]|y(p_n) - y_{n+1}| \\ &< [(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)\lambda_u|y_n - y(p_n)| \\ &< [(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)\lambda_u 2.5bp_n/k\lambda_u \\ &< [(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)\lambda_u 5\delta_2(l_{pn}/2)\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}|x_{n+1} - x(\tilde{\tilde{p}})| &< |x(p_n) - x(\tilde{\tilde{p}})| + |x(p_n) - x_{n+1}| \\ &< (l_{pn}/2)\{[1 + 5\delta_2(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)|\lambda_s| \\ &\quad + [(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)\lambda_u 5\delta_2\}\end{aligned}$$

由条件容易验证

$$\{[1+5\delta_2(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)|\lambda_s| + [(a+\eta)/(b-\eta)](1+\delta_3)\lambda_u 5\lambda_u\delta_2\}$$
$$< |\lambda_s|(1+2\delta_3)$$
$$|x_{n+1} - x(\tilde{\tilde{p}})| < (l_{pn}/2)|\lambda_s|(1+2\delta_3)$$

而 $l_{pn} = (l_{pn}/l_{\tilde{\tilde{p}}})l_{\tilde{\tilde{p}}} = [(l_{pn} - 0)/(l_{\tilde{\tilde{p}}} - 0)]l_{\tilde{\tilde{p}}} < [(b+\eta)y(p_n)/(b-\eta)y_{n+1}]l_{\tilde{\tilde{p}}}$

其中 $y_{n+1} > y(p_n) - \lambda_u(1+\delta_3)|(y_n - y(p_n))|$

$$> 1.5y_n/k\lambda_u - \lambda_u(1+\delta_3)2.5y_n/k\lambda_u$$

$$y(p_n) < (1+2.5/k\lambda_u)y_n$$

$$\therefore l_{pn} < [(b+\eta)/(b-\eta)][(1+2.5/k\lambda_u)y_n/\{1.5y_n/[k\lambda_u - \lambda_u(1+\delta_3)2.5y_n/k\lambda_u]\}]l_{\tilde{\tilde{p}}}$$

由关于 k 的条件知

$$[(1+2.5/k\lambda_u)y_n/\{1.5y_n/[k\lambda_u - \lambda_u(1+\delta_3)2.5y_n/k\lambda_u]\}] < 1+\eta$$
$$\therefore l_{pn} < [(b+\eta)/(b-\eta)](1+\eta)l_{\tilde{\tilde{p}}} < [1/|\lambda_s|(1+2\delta_3)]l_{\tilde{\tilde{p}}}$$

因此

$$|x_{n+1} - x(\tilde{\tilde{p}})| < (l_{pn}/2)|\lambda_s|(1+2\delta_3) < l_{\tilde{\tilde{p}}}/2$$

故 $X_{n+1} \in U(P_4^*)$

2) $|[x_n - x(p_n)]/[y_n - y(p_n)]| \leqslant \delta_2$ 时,

用 $(1-\delta_3/2)|\lambda_s[x_n - x(p_n)]| + N\{[x_n - x(p_n)]^2 + [y_n - y(p_n)]^2\} < |x_{n+1} - x(p_n)| < (1+\delta_3/2)|\lambda_s[x_n - x(p_n)]| + M\{[x_n - x(p_n)]^2 + [y_n - y(p_n)]^2\}$ 来估计·

$$\begin{aligned}|x(p_n) - x_{n+1}| &< (1+\delta_3/2)|\lambda_s[x_n - x(p_n)]| + M\{[x_n - x(p_n)]^2 + [y_n - y(p_n)]^2\} \\ &< (1+\delta_3/2)|\lambda_s[x_n - x(p_n)]| + M\{\delta_2[y_n - y(p_n)]^2 + [y_n - y(p_n)]^2\} \\ &< (1+\delta_3/2)|\lambda_s[x_n - x(p_n)]| + M(\delta_2+1)[y_n - y(p_n)]^2 \\ &< (1+\delta_3/2)|\lambda_s\delta_2[y_n - y(p_n)]| + M(\delta_2+1)[y_n - y(p_n)]^2 \\ &< (1+\delta_3/2)|[y_n - y(p_n)]|\{\lambda_s\delta_2 + M(\delta_2+1)[y_n - y(p_n)]\} \\ &< (1+\delta_3/2)(2.5y_n/k\lambda_u)\{(\lambda_s\delta_2 + M(\delta_2+1)(2.5y_n/k\lambda_u)\} \\ &< (1+\delta_3/2)(2.5y_n/k\lambda_u)\{\lambda_s\delta_2 + M(\delta_2+1)(2.5y_n/k\lambda_u)\} \\ &< (1+\delta_3/2)(l_{pn}/2)(5\delta_2)\{\lambda_s\delta_2 + M(\delta_2+1)(2.5y_n/k\lambda_u)\}\end{aligned}$$

$\exists P_4^* < P_3^*$，当 $X_n = (x_n, y_n) \in U(P_4^*)$ 时，成立

$y_n < k\lambda_u / [2.5M(\delta_2 + 1)]$ 即 $M(\delta_2 + 1) < (2.5y_n / k\lambda_u)$ 时

$$\begin{aligned} |x(p_n) - x_{n+1}| &< (1 + \delta_3/2)(l_{pn}/2)(5\delta_2)\{\lambda_s\delta_2 + 1\} \\ &< (1 + \delta_3/2)(l_{pn}/2)(5\delta_2)2 \\ &< (1 + \delta_3/2)(l_{pm}/2)10\delta_2 \\ &< (\lambda_s/2)(1 + \delta_3/2)(l_{pn}/2) \end{aligned}$$

故同 1)

$$|x(p_n) - x_{n+1}| < (l_{pn}/2)(1 + \delta_3)|\lambda_s|\{1 + 5\delta_2[(a + \eta)/(b - \eta)]\}$$

由 1) 知

$$|x(p_n) - x(\tilde{\tilde{p}})| < [(a + \eta)/(b - \eta)](1 + \delta_3)\lambda_u 5\lambda_u\delta_2(l_{pn}/2)$$

$$|x_{n+1} - x(\tilde{\tilde{p}})| < |x(p_n) - x(\tilde{\tilde{p}})| + |x(p_n) - x_{n+1}| < l_{\tilde{\tilde{p}}}/2$$

故 $X_{n+1} \in U(P_4^*)$• Q. E. D

引理 6 在上述条件(★)下，$\exists P_5^* < P_4^*$，$\forall X_0 \in U(P_5^*)$，由(2.2)式迭代出的点列 $\{X_n\}$，$X_n \to 0$•

证明 $\because y(p_n) - y_n = 2y_n / k\lambda_u + (d + f)[(1 + 2/k\lambda_u)y_n]^2$

$\therefore \exists P_5^* < P_4^*$，$\forall X_n = (x_n, y_n) \in U(P_5^*)$

$$(2 - \delta_3/2)y_n / k\lambda_u < |y(p_n) - y_n| < (2 + \delta_3/2)y_n / k\lambda_u$$

则
$$\begin{aligned} y_{n+1} &< y(p_n) - \lambda_u(1 - \delta_3)|y(p_n) - y_n| \\ &< y(p_n) - \lambda_u(1 - \delta_3)(2 - \delta_3/2)y_n / k\lambda_u \end{aligned}$$

由条件(★) $\because \lambda_u(1 - \delta_3) > (1 + \delta_3)$

$$\begin{aligned} \therefore\quad y_{n+1} &< y(p_n) - (1 + \delta_3)(2 - \delta_3/2)y_n / k\lambda_u \\ &< [1 + (2 + \delta_3/2)/k\lambda_u]y_n - (1 + \delta_3)(2 - \delta_3/2)y_n / k\lambda_u \\ &< \{1 + [2 + \delta_3/2 - (1 + \delta_3)(2 - \delta_3/2)]/k\lambda_u\}y_n \\ &< \{1 + [2 + \delta_3/2 - (1 + \delta_3)(2 - \delta_3/2)]/k\lambda_u\}y_n \\ &< \{1 + [2 + \delta_3/2 - (2 + 1.5\delta_3 - \delta_3^2/2)]/k\lambda_u\}y_n \\ &< \{1 + [-\delta_3 + \delta_3^2/2]/k\lambda_u\}y_n < [1 - (\delta_3/2)/k\lambda_u]y_n \end{aligned}$$

$\therefore$ y_n 单调整趋向于 0，显然 x_n 趋向于 0，X_n 趋向于 0• Q. E. D

定理的证明

只要取定理中的 $U = U(P_5^*)$，综合上述 6 个引理即可完成本定理的证明• Q. E. D

注释 当条件 H3• 不满足时，只要 $b \neq 0$，也可同样讨论• 即在满足条件 H1, H2• 时成立如下定理•

定理 1′ 当 $b \neq 0$ 时，$\exists K > 0$，$\forall k > K$，$\exists \xi = 0$ 的一个邻域 U，$\forall X_0 \in U$，选取由 $bp_n = y_n + 2y_n/(k\lambda_u)$

给出的 p_n，由 $X_{n+1} = F(p_n, X_n)$ 得到的 $\{X_n\}$ 收敛到 $\xi = 0$，且每个 $X_n \in U$•

§3. 例 子

一般而言，定理所要求的条件是容易满足的• 以下就 Lauwerier 吸引子[2] 为例讨论• 取映射

$$\lambda \begin{cases} x_{n+1} = x_n(1-2y_n)/2 + y_n \\ y_{n+1} = 4y_n(1-y_n) \end{cases}$$

取 $X_{n+1} = F_p(X_n)$ 为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1-2y_n)/2 + y_n \\ y_{n+1} = 4(1-p)y_n(1-y_n) \end{cases}$$

$p = 0$ 时, 不动点 $(3/5, 3/4)$, $\lambda_u = -2$, $\lambda_s = 1/2$

它的稳定流形切方向与不稳定流形切方向分别为 x 轴和 y 轴•

$p \neq 0$ 时, 不动点 $\xi(p) = (x(p), y(p))$, 解出 $y(p) = (3-4p)/(4-4p)$

$$b = \partial y(p)/\partial p \mid_{p=0} = -1/4 \neq 0$$

且显然 $\xi(p) \in C^2$, $F_p(X) \in C^2$•

故可由此方法控制•

关于高维映射的情况, 将另行报导•

参 考 文 献

1 E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, Contlling chaos, Phys. Rev. Lett., **64** (1990), 1196—1199.

2 H. A. Lauwerier, The structure of a strange attractor, Phys. **21**D (1986), 146—154.

3 W. L. Ditto, et. al., Experimental control of chaos, Phys. Rev. Lett., **65** (1990), 3211—3214.

4 J. Singer, et. al, Controlling a chaotic system, Phys. Rev. Lett., **66** (1992), 1123—1125.

5 D. Auerbach, et. al., Controlling chaos in high dimensional system, Phys. Rev. Lett, **69** (1992), 3479.

6 K. Phragas, Continues control of chaos by self_controlling feedback, Phys. Rev. A, **170** (1992), 3479—3482.

7 V. Petrov, et. al., A map_based algorithm for controlling low_dimensional chaos, J. Phys. Chem, **96** (1992), 7506—7513.

An Improvement and Proof of OGY Method

Yang Ling Liu Zengrong

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P. R. China;

LNM. Institute of Mechanics, Chinese Academy, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract

OGY method is the most important method of controlling chaos. It stabilizes a hyperbolic periodic orbit by making small perturbations for a system parameter. This paper improves the method of choosing parameter, and gives a mathematics proof of it.

Key words dynamical system, chaos, controlling chaos, hyperbolic periodic point, stable manifold, unstable manifold