

解非线性方程的自动调节阻尼法

常海萍^① 黄太平^①

(钟万勰推荐, 1995 年 6 月 20 日收到, 1996 年 6 月 10 日收到修改稿)

摘 要

解非线性方程组的一般方法是将其线性化, 形成各种形式的迭代程序进行数值近似计算。对于复杂强非线性问题, 在迭代过程中往往不易收敛, 甚至数值失稳而发散。不能满足工程要求。常规的牛顿法及改进的牛顿法均未彻底解决这一问题, 因而使得复杂强非线性问题的数值模拟计算受到了限制。本文提出一种新的方法——自动调节阻尼法, 是对带阻尼因子的牛顿法的进一步改进。引进阻尼因子向量, 在迭代过程中, 通过判断与调整, 不断地自动调节阻尼因子向量, 引用有效收敛系数与加速系数, 改善对赋初值的要求, 加速求解的迭代过程, 保证了复杂强非线性方程求解的稳定性。采用这一新的方法, 成功地数值模拟了飞机中的一些复杂的传热问题, 可进一步推广用于非线性流动、传热、结构动力响应等各种复杂强非线性的工程问题的数值模拟计算。

关键词 非线性方程 稳定性 牛顿法 自动调节阻尼法 阻尼因子

§ 1. 引 言

工程上大量问题都属于非线性问题, 如具有非线性辐射—对流边界的, 热容量有限的传热问题, 非线性流体力学问题, 非线性结构动力响应问题等。除了极为特殊的非线性方程组外, 直接解法几乎是不可能的, 一般都是采用线性化的方法去构成各种形式的迭代程序。然而在迭代过程中往往会出现解的振荡, 不易收敛, 甚至发散的现象。特别是一些较复杂的问题, 如计算燃烧室火焰筒壁温, 由于筒壁很薄, 壁面上有气流对流换热和高温燃气的辐射换热, 当有气膜冷却时, 壁面上还存在热流方向相反的辐射换热和射流冷却。这种情况下迭代过程极易出现解的发散。又如航空发动机的加力燃烧室筒体, 飞机发动机短舱后部框架等的传热问题, 都会遇到类似的情况。常规的迭代法如牛顿迭代法及牛顿法的几种改进方案(带松弛因子的牛顿法和带阻尼因子的牛顿法) 都因为对初始近似值的要求仍太严, 收敛速度不快而告失败。长期以来, 由于没有找到一种妥善解决的方法以致于在如预测具有非线性辐射—对流边界的传热这类问题上, 数值模拟计算受到极大的限制。本文提出了一种新的方法——自动调节阻尼法, 可以有效地用于强非线性问题的数值计算, 处理比较复杂的问题, 对赋初值的要求可以放宽, 迭代过程收敛速度加快^{[1][2][3]}。

为了改善非线性问题数值计算中对赋初值的严格要求, 为了防止由于受非线性参数影响而在迭代过程中矩阵出现病态, 引进阻尼因子向量, 而且在迭代过程中, 阻尼因子可以不断地

① 南京航空航天大学 205 教研室, 南京 210016

自动调整, 保证计算不发散, 收敛快。故称之为自动调节阻尼法。自动调节阻尼法采用一个判断过程和一个调节过程, 引入有效收敛系数和加速系数的概念。有效收敛系数和加速系数可以根据具体问题的需要人为地确定。调节过程根据有效收敛系数和加速系数的大小来控制收敛速度。

§ 2. 非线性方程组的一般解法

设有一非线性方程, 表达成一般形式:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

或写成以下形式

$$F(X) = 0 \quad (2.2)$$

常用的迭代方法有以下几种^[4]:

1. 解非线性方程组的牛顿法

牛顿法的基本思想是将非线性问题逐次线性化而形成迭代程序。对于向量值函数 $F(X)$, 如果在包含点 $X_k \in D$ 的某邻域 $\phi \subset D$ 内, 向量值函数 $F(X)$ 在某种近似意义下为线性函数

$$L_k(X) = A_k X + b_k \quad (2.3)$$

所替代, 那么, 可将线性方程组

$$L_k(X) = A_k X + b_k = 0 \quad (2.4)$$

近似代替非线性方程组(2.1), 而方程组(2.4)的解可作为(2.1)的近似解。这种化非线性问题为线性问题的方法, 称为线性化方法, 方程组(2.4)称为方程组(2.1)的线性化方程。则有

$$F(X_k) = L_k(X_k) = A_k X_k + b_k \quad (2.5)$$

$$DF(X_k) = DL_k(X_k) = A_k \quad (2.6)$$

从中解出 $DF(X_k)$ 并代入(2.4)得

$$L_k(X) = DF(X_k)(X - X_k) + F(X_k) = 0 \quad (2.7)$$

若 $DF(X_k)$ 非奇异, 解(2.7), 并令 $X = X_{k+1}$, 则一般地得到

$$X_{k+1} = X_k - [DF(X_k)]^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

(2.8)称之为非线性方程组(2.1)的牛顿迭代公式。

2. 牛顿法的变形

(1) 带松弛因子的牛顿程序

为了改善对初始近似的要求, 在牛顿程序中引入松弛因子 ω_k ,

$$X_{k+1} = X_k - \omega_k [DF(X_k)]^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.9)$$

(2) 带阻尼因子的牛顿程序

为了克服矩阵 $DF(X_k)$ 的奇异或病态性, 可以引进阻尼因子 μ_k , 使矩阵 $DF(X_k)$ 成为非奇异或病态性得到减弱。

$$X_{k+1} = X_k - [DF(X_k) + \mu_k I]^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.10)$$

(3) 同时带有松弛因子和阻尼因子的牛顿法

$$X_{k+1} = X_k - \omega_k [DF(X_k) + \mu_k I]^{-1} F(X_k) \quad (2.11)$$

以上方法虽然或可以改善对初始近似的要求, 或可以改善矩阵 $DF(X_k)$ 的奇异或病态性, 但对一个复杂的问题, 选择同一个 ω_k 和 μ_k , 难以同时保证各 $X_i (i=1, \dots, n)$ 点不发散、快收敛, 往往为了克服某些点的奇异性, 而导致其它点的收敛速度减慢, 不能适应工程计算的需要

§ 3. 自动调节阻尼法

自动调节阻尼法针对上述方法的不足, 将带阻尼因子的牛顿法进一步改进为

$$X_{k+1} = X_k - \omega [DF(X_k) + \mu J]^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.1)$$

其中

$$\omega_k = \text{diag}(\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots, \omega_{kn})$$

$$\mu_k = \text{diag}(\mu_{k1}, \mu_{k2}, \dots, \mu_{kn})$$

$$\varepsilon < \omega_{ki} < (2 - \varepsilon), \quad -\beta < \mu_{ki} < \eta$$

$$\beta = \min_i \{ |\lambda_i|^2 / (2\text{Re } \lambda_i) \mid \text{Re } \lambda_i > 0 \}$$

$$\eta = \min_i \{ |\lambda_i|^2 / -(2\text{Re } \lambda_i) \mid \text{Re } \lambda_i < 0 \}$$

其中如果没有 $\text{Re } \lambda_i > 0$ 或者没有 $\text{Re } \lambda_i < 0$ 的特征值, 则分别取 $\beta = +\infty$ 或 $\eta = +\infty$.

阻尼因子 ω_{ki}, μ_{ki} 对各点 X_i 的值是不同的, 而且在迭代过程中也是变化的. 由于系统的节点数是相当多的, 如果没有一套有效的办法来自动地调节, 是无法实现上述计算的.

将(3.1)改写为

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$$

$$\Delta X_k = \omega_k [DF(X_k) + \mu_k J]^{-1} F(X_k) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

令

$$\phi(X_k) = \omega_k [DF(X_k) + \mu_k J]^{-1} F(X_k)$$

$$\phi(X_{ki}) = \Delta X_{ki} \quad (3.3)$$

定义收敛率为

$$\lambda_i = \phi(X_{k,i}) / \phi(X_{k-1,i}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

收敛率可能出现以下几种情况:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i \leq -a & \text{调整} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ki} \text{ 不变, } \omega_{ki}/v \\ \omega_{ki} \text{ 不变, } \mu_{ki} \cdot v; \text{ 若 } \mu_{ki} = 0, \mu_{ki} = c \\ \omega_{ki}/v, \mu_{ki} \cdot v; \text{ 若 } \mu_{ki} = 0, \mu_{ki} = c \end{array} \right. \\ -a < \lambda_i < 0 & \text{不调整} \\ 0 < \lambda_i < b & \text{调整} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ki} \text{ 不变, } \omega_{ki} \cdot v \\ \omega_{ki} \text{ 不变, } \mu_{ki}/v \\ \omega_{ki} \cdot v, \mu_{ki}/v \end{array} \right. \\ \lambda_i \geq b & \text{不调整} \quad ? \end{array} \right.$$

式中 a 为有效收敛系数, b 为加速系数, a, b, c, v 均为正实数, 其中 $a \leq 1, b < 1, c \leq 1, v > 1$.

具体算法之一如下:

1. 取定初始近似 X_0 和初始阻尼因子向量 ω_0, μ_0 , 开始 ω_0, μ_0 可选 $\omega_0 I, \mu_0 I$. 为了调整

ω_{ki}, μ_{ki} , 有效收敛系数 a 和加速系数 b 可根据所计算问题的特点或要求选定, 例如可取 $a = 0.95, 0.8, 0.7$; $b = 0.1, 0.25$; v 可取 2, 5 或 10, 甚至 100 或更大。

2. 计算 $F(X_0), DF(X_0)$ 。解方程组 $\phi(X_0) = \omega_0 [DF(X_0) + \mu_0]^{-1} F(X_0)$, 求出 X_1 ;

3. 计算 $F(X_1), DF(X_1)$ 。解方程组 $\phi(X_1) = \omega_0 [DF(X_1) + \mu_0]^{-1} F(X_1)$, 求出 X_2 ;

4. 求 λ 。若 $\lambda < -a$, 或 μ_{1i} 不变, 调 ω_{1i}/v ; 或 ω_{1i} 不变, 调 $\mu_{1i} \cdot v$, 若 $\mu_{1i} = 0, \mu_{1i} = c$; 或 $\omega_{1i}/v, \mu_{1i} \cdot v$, 若 $\mu_{1i} = 0, \mu_{1i} = c$; 若 $0 < \lambda < b$, 或 μ_{1i} 不变, 调 $\omega_{1i} \cdot v$; 或 ω_{1i} 不变, 调 μ_{1i}/v ; 或 $\omega_{1i} \cdot v, \mu_{1i}/v$; 用新的 ω_1, μ_1 代替 ω_0, μ_0 , 转去作 3;

5. 假定已求得第 k 次近似 X_k , 计算 $F(X_k), DF(X_k)$, 解方程组 $\phi(X_k) = \omega_k [DF(X_k) + \mu_k]^{-1} F(X_k)$, 求出 X_{k+1} ;

6. 求 λ 。若 $\lambda < -a$ 或 μ_{ki} 不变, 调 ω_{ki}/v ; 或 ω_{ki} 不变, 调 $\mu_{ki} \cdot v$, 若 $\mu_{ki} = 0, \mu_{ki} = c$; 或 $\omega_{ki}/v, \mu_{ki} \cdot v$, 若 $\mu_{ki} = 0, \mu_{ki} = c$; 若 $0 < \lambda < b$, 或 μ_{ki} 不变, 调 $\omega_{ki} \cdot v$; 或 ω_{ki} 不变, 调 μ_{ki}/v ; 或 $\omega_{ki} \cdot v, \mu_{ki}/v$; 转去作 5;

7. 若 $\|\phi(X_k)\| \leq \varepsilon$, 则 X_{k+1} 即可取为满足精度要求的近似解, 否则以 X_{k+1} 代替 $X_k, \omega_{k+1}, \mu_{k+1}$ 代替 ω_k, μ_k , 转去作 5。

重复上述步骤, 直到满足要求为止。

§ 4. 算 例

用自动调节阻尼法对一飞机后机身框架的温度场进行了数值计算分析。框架内缘处于发动机尾喷管的高温辐射下, 二次气流通过尾喷管与框架之间的通道对框架冷却, 框架外缘处于高速气流之中。计算在飞行高度为 $H = 13000m$, 飞行马赫数 $M = 2.0$ 时的框架温度场。在未采用自动调节阻尼法时, 迭代了 400 次, 仍未能收敛到要求的精度。使用了自动调节阻尼法, 取有效收敛系数 $a = 0.7$, 加速系数 $b = 0.1, v$ 取 2, 5, 10, 仅迭代了 16 次, 便迅速收敛, 达到精度要求。计算结果与实测数据如下:

	实测值	计算值
外缘上部测点	113 °C	116 °C
外缘下部测点	125 °C	124.5 °C
内缘平均温度	139 °C	136.5 °C

§ 5. 结 论

对于复杂强非线性问题, 在迭代过程中往往不易收敛, 甚至数值失稳而发散, 不能满足工程要求。常规的牛顿法及改进的牛顿法均未能彻底解决这一问题, 因而使得复杂强非线性问题的数值模拟计算受到了限制。本文提出的新方法——自动调节阻尼法, 是对带阻尼因子的牛顿法的进一步改进。引进阻尼因子向量, 在迭代过程中, 通过判断与调整, 不断地自动调

节阻尼因子向量, 引用有效收敛系数与加速系数, 改善对赋初值的要求, 加速求解的迭代过程, 保证了复杂强非线性方程求解的稳定性。采用这一新的方法, 成功地数值模拟了飞机与发动机中的一些复杂的传热问题, 可进一步推广应用于非线性流动、传热、结构动力响应等各种复杂强非线性的工程问题的数值模拟计算。

参 考 文 献

- 1 常海萍, 飞机框架温度场的有限元分析, 中国航空学会动力专业委员会, 1988 年燃烧与传热专业学术年会, CSAA- PC88- 73 (1988).
- 2 常海萍, 燃烧室火焰筒壁温度数值计算, 中国航空学会动力专业委员会, 1988 年燃烧与传热专业学术年会, CSAA- PC88- 74 (1988).
- 3 Chang Haiping, Huang Taiping and Chen Wanbin, Numerical simulation of 3_D temperature distribution of the flame tube of the combustion chamber with air film cooling, Journal of Thermal Science, International Journal of Thermal and Fluid Sciences, 5(1) (1996), 54—59.
- 4 王德人,《非线性方程组解法与最优化方法》, 人民教育出版社 (1979), 1—272.

The Auto Adjustable Damping Method for Solving Nonlinear Equations

Chang Haiping Huang Taiping

(Department of Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing 210016, P. R. China)

Abstract

The general approach for solving the nonlinear equations is linearizing the equations and forming various iterative procedures, then executing the numerical simulation. For the strongly nonlinear problems, the solution obtained in the iterative process is always difficult, even divergent due to the numerical instability. It can not fulfill the engineering requirements. Newton's method and its variants can not settle this problem. As a result, the application of numerical simulation for the strongly nonlinear problems is limited. An auto adjustable damping method has been presented in this paper. This is a further improvement of Newton's method with damping factor. A set of vector of damping factor is introduced. This set of vector can be adjusted continuously during the iterative process in accordance with the judgement and adjustment. An effective convergence coefficient and quickening coefficient are employed to relax the restricted requirements for the initial values and to shorten the iterative process. Then, the numerical stability will be ensured for the solution of complicated strongly nonlinear equations. Using this method, some complicated strongly nonlinear heat transfer problems in airplanes and aeroengines have been numerically simulated successfully. It can be used for the numerical simulation of strongly nonlinear problems in engineering such as nonlinear hydrodynamics and aerodynamics, heat transfer and structural dynamic response etc.

Key words nonlinear equation, stability, Newton's method, auto adjustable damping method, the vector of damping factors