

软弹簧型 Duffing 方程在摄动下 分支出的极限环

程福德^①

(许政范推荐, 1996 年 4 月 29 日收到)

摘 要

在这篇文章中, 作者用 Melnikov 函数方法分析了软弹簧型 Duffing 方程^[1]在摄动下异宿轨道破裂后稳定流形与不稳定流形的相对位置, 给出了方程在不同摄动下分支出极限环的条件与极限环的位置。

关键词 极限环 异宿轨道 Melnikov 函数

§ 1. 引 言

软弹簧型 Duffing 方程在电学与力学中均有广泛的应用。长期以来, 科学工作者们对这一系统进行过广泛的研究。在文[1], 关于在周期摄动下产生混沌、次谐波的情况已有详细的讨论。在这一节, 我们重点讨论质点在软弹簧作用下运动方程为

$$m \frac{d^2 X}{dT^2} + D \frac{dX}{dT} + CX - NX^3 = 0 \quad (1.1)$$

的基本特性。

在方程(1.1)中, m 为质点质量, C 与 N 分别表示弹簧线性与非线性刚性系数, D 为一随位移 X 变化而变化的函数 $D(X)$ 。设定 $X = x \sqrt{C/N}$, $T = \Omega_0 t$, $\Omega_0 = \sqrt{m/C}$, $g(x) = D(\sqrt{C/N}x)$ 则得到方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{mC}} g(x) \frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0 \quad (1.2)$$

首先, 我们考虑 $g(x)$ 是一二次多项式的情况。 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 。当 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 时, 我们得到方程

$$\dot{x} + \frac{1}{\sqrt{mC}} (ax^2 + bx + c)x + x - x^3 = 0 \quad (1.3)$$

设定 $a/\sqrt{mC} = \varepsilon R$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $b/a = \alpha$, $c/a = \beta$, $x = y$, 我们得到方程(1.3)的等价方程

$$x = y, \quad y = -x + x^3 - \varepsilon R(x^2 + \alpha x + \beta)y \quad (1.4)$$

① 湖北师范学院数学系, 湖北黄石 435002

记方程(1.4) $\varepsilon=0$ 为未摄系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^3 \tag{1.5}$$

系统(1.5)为一 Hamilton 系统,其 Hamiltonian 量为 $H(x, y) = y^2/2 + x^2/2 - x^4/4 = h$ 。通过简单的定性分析可知, $O(0, 0)$ 为中心, $A(1, 0)$ 和 $B(-1, 0)$ 为系统的鞍点。当 $h=1/4$ 时, 存在两条连结鞍点 A, B 的异宿轨道, 形成一个异宿圈。当 $0 < h < 1/4$ 时, 系统(1.5)在异宿圈内存在一族包围中心 $O(0, 0)$ 的闭轨。

记 x 轴上方的异宿轨道为 Γ^+ , 在 x 轴下方的为 Γ^- , 有

$$\Gamma^+ = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \Gamma^- = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

分别满足

$$(I_1) \quad y(t) = \sqrt{1/2 + x^4(t)/2 - x^2(t)} = (1 - x^2(t))/\sqrt{2}$$

$$(II_1) \quad y(t) = - (1 - x^2(t))/\sqrt{2}$$

依照[1]、[2]中的结论, 我们能对系统(1.4)使用 Melnikov 函数。首先我们考虑关于 Γ^+ 的 Melnikov 函数。

$$M_1(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} R(x^2 + \alpha x + \beta) y^2 dt$$

这儿 (x, y) 表异宿轨道 $\Gamma^+ = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, 它应满足 $\dot{x} = y$ 和方程(I₁), 于是计算得到

$$M_1(t_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 R(x^2 + \alpha x + \beta) (1 - x^2) dx = -\frac{2\sqrt{2}}{15} R(5\beta + 1)$$

同样地得到关于 Γ^- 的 Melnikov 函数 $M_2(t_0) = M_1(t_0) = -2\sqrt{2}R(5\beta + 1)/15$ 。

由于 Melnikov 函数的值表示异宿轨道破裂后从稳定流形到不稳定流形的距离^{[3][1][2]}。其方向与过异宿轨道上对应点的外法线方向一致为正, 相反则为负。距离为从稳定流形到不稳定流形在某一时刻的向量在外法线上的投影。当 $R(5\beta + 1) < 0$ 时, $M_1(t_0) = M_2(t_0) > 0$, 从而在异宿轨道 Γ^+ (Γ^-) 破裂后, 关于鞍点 $B(A)$ 的不稳定流形 $W_+^u(B)$ ($W_-^u(A)$) 在关于鞍点 $A(B)$ 的稳定流形 $W_+^s(A)$ ($W_-^s(B)$) 的外部。相反地在 $R(5\beta + 1) > 0$, 也即是 $M_1(t_0) = M_2(t_0) < 0$, 从而不稳定流形 $W_+^u(B)$ ($W_-^u(A)$) 在稳定流形 $W_+^s(A)$ ($W_-^s(B)$)。它们在 Poincaré 截面 P_ε^0 上的相对位置如图 1、2 所示。

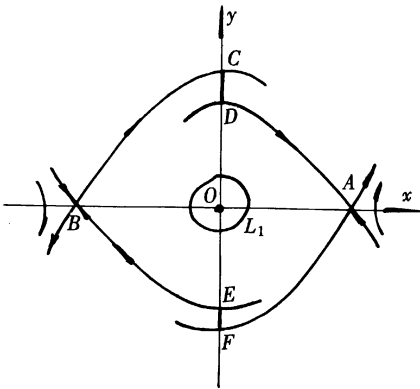


图 1 $R(5\beta + 1) < 0$

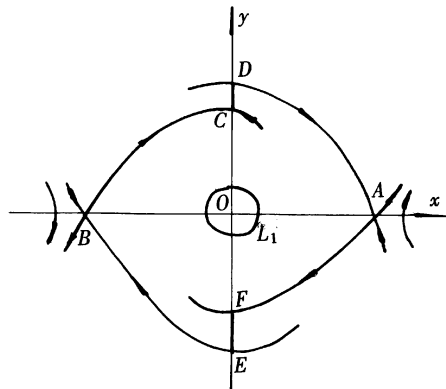


图 2 $R(5\beta + 1) > 0$

容易知道系统(1.5)的奇点也是系统(1.4)的奇点,且 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ 是鞍点, $O(0, 0)$ 在 $R\beta > 0 (< 0)$ 时, 变为稳定(不稳定)焦点. 很明显 $R = 0$, $\beta = 0$ 或 $\beta = 1/5$ 是一分支值. 由于当 $R\beta > 0 (< 0)$ 时, O 是稳定(不稳定)焦点, 所以我们可以选取一在 $O(0, 0)$ 点附近的小圆环 L_1 作为 Poincaré-Bendixon 环域定理的要求的环域 D 的内境界线 L_1 , 且由 L_1 上任一点出发的轨线离开(进入)环域 D .

当 $R(5\beta + 1) < 0 (> 0)$ 时, $M_1(t_0) = M_2(t_0) > 0 (< 0)$; 由于系统(1.4)为自治系统且满足解的存在唯一性, 那么它的稳定流形与不稳定流形在 Poincaré 截面 P_ε^0 上的位置与其在相平面 R^2 上的位置一致. 所以, 我们能直接在相平面上分析稳定流形到不稳定流形的距离. 记 C, D 为 Γ^+ 破裂后与 y 轴正方向的交点, E, F 为 Γ^- 破裂后与 y 轴负方向的交点. 我们选取闭曲线 $AFEBCDA$ 为环域 D 的外境界线 L_2 , (请看图 1, 2). 因为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1-x^2)}{y} - \varepsilon R(x^2 + \alpha + \beta) \text{ 和 } \frac{dy}{dx} = -\varepsilon R\beta$$

那么在线段 CD 和 EF 上任意点出发的轨线离开(进入)环域 D , 而由曲线 DA, AF, EB, BC 上任一点出发的轨线均不进入(离开)环域 D . 所以对于条件 $R\beta > 0 (< 0)$ 与 $R(5\beta + 1) < 0 (> 0)$ 同时成立时, 环域 D 是一 $\alpha(w)$ 极限集. 在环域 D 内存在一不稳定(稳定)的极限环^[4].

定理 1 对于系统(1.4), α 为一参数, 系统在 $R = 0$, $\beta = 0$ 或 $\beta = 1/5$ 附近出现分叉; 当 $R < 0 (> 0)$ 和 $-1/5 < \beta < 0$ 成立时, 系统(1.4)在其未摄系统的异宿轨道附近存在一不稳定(稳定)的极限环.

§ 2. $g(x) = \varepsilon \sqrt{mCR}[(x^2 + \alpha + \beta) \cos x^5 + r(x^2 + px + q) \sin x]$ 时产生的极限环

考虑方程(1.2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{mC}}g(x) \frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0$$

设定 $g(x) = \varepsilon \sqrt{mC}[R(x^2 + \alpha + \beta) \cos x + r(x^2 + px + q) \sin x]$, $x = y$, $0 < \varepsilon \ll 1$, 我们得到系统(1.2)的等价系统

$$x = \varepsilon, 0 < y = -\text{不稳 } x^3 - \varepsilon R[(x^2 + \alpha + \beta) \cos x + r(x^2 + px + q) \sin x] y \quad (2.1)$$

未摄系统(2.1) $\varepsilon = 0$ 是(1.5).

现在, 让我们考虑系统(2.1)的 Melnikov 函数. 首先考虑关于 Γ^+ 的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_3(t_0) &= - \int_{-\infty}^{\infty} R[(x^2 + \alpha + \beta) \cos x + r(x^2 + px + q) \sin x] y^2 dt \\ &= - 2\sqrt{2}R[(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr] \end{aligned}$$

相似地容易得到关于 Γ^- 的 Melnikov 函数 $M_4(t_0) = M_3(t_0)$. 容易得到 $R = 0$ 和满足方程 $(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr = 0$ 的所有 β, p, r 值为分支值.

对于系统(2.1), $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ 和 $B(-1, 0)$ 是它的奇点也是其未摄系统的奇点. 在奇点 O, A, B 处的 Jacobian 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon R\beta \end{pmatrix}_{(0,0)}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - \varepsilon R[(1 + \frac{g}{\alpha + \beta}) \cos 1 + r(1 + p + q) \sin 1] \end{pmatrix}_{(1,0)},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - \varepsilon R \left[(1 - \alpha + \beta) \cos 1 - r(1 - p + q) \sin 1 \right] & (-1, 0) \end{pmatrix}$$

所以 $A(1, 0)$ 和 $B(-1, 0)$ 仍为鞍点, 而 $O(0, 0)$ 对 $R\beta > 0 (< 0)$ 在系统(2.1) 被摄动后变为稳定(不稳定)焦点. $\beta = 0$ 是一分支值.

对 $R[(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr] > (< 0)$, 采用与上节中类似的方法构造 Poincaré-Bendixon 环域定理所要的环域 D 的内境界线和外境界线. 容易得到对

$$\text{I: } R\beta > 0, R[(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr] < 0$$

$$\text{II: } R\beta < 0, R[(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr] > 0$$

条件 I (II), 系统(2.1) 在异宿轨道附近存在一不稳定(稳定)的极限环.

定理 2 对于系统(2.1), α, q 为任意参数, 系统(2.1) 在 $R = 0$ 附近或在满足方程

$$(11\cos 1 - 6\sin 1) + (\sin 1 - \cos 1)\beta + (2\sin 1 - 3\cos 1)pr = 0$$

的 β, p, r 附近出现分叉; 在条件 I (II) 满足时, 系统(2.1) 在异宿轨道附近存在一不稳定(稳定)的极限环.

§ 3. $g(x) \in C^0$ 的情况

考虑方程(1.2) 且设定 $g(x) = -\varepsilon \sqrt{m} Cf(x), x \geq y, 0 < \varepsilon \ll 1$, 我们得到系统(1.2) 的等价系统

$$x' = y, y' = -x + x^3 + \mathcal{G}(x)y \quad (3.1)$$

系统(3.1) 的未摄系统(3.1) $_{\varepsilon=0}$ 为(1.5). 关于系统(1.5) 的异宿轨道 Γ^+, Γ^- 的 Melnikov 函数对应为

$$M_5(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)y^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} f(x)(1-x^2) dx$$

$$M_6(t_0) = M_5(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} f(x)(1-x^2) dx$$

设定 $\int f(x) dx = F(x), \int F(x) dx = G(x), \int G(x) dx = Q(x)$

得到 $M_5(t_0) = M_6(t_0) = \sqrt{2}[G(1) + G(-1) - Q(1) + Q(-1)]$. 另一方面, 系统(3.1) 与未摄系统(3.1) $_{\varepsilon=0}$ 有相同的奇点 $A(1, 0), B(-1, 0)$ 和 $O(0, 0)$. 容易知道 A, B 仍为鞍点, 对 $f(0) < 0 (> 0)$, O 由中心变为稳定(不稳定)焦点. 对 $f(0) = 0$, O 仍为一中心. 用与前面相似的方法能得到定理 3.

定理 3 对系统(3.1), 当 $G(1) + G(-1) - Q(1) - Q(-1) > 0 (< 0)$ 和 $f(0) < 0 (> 0)$ 同时成立时, 系统(3.1) 存在一不稳定(稳定)的极限环在异宿轨道附近.

下面考虑 $O(0, 0)$ 仍为中心的情况. 对于 $G(1) + G(-1) - Q(1) + Q(-1) > 0 (< 0)$, 也即是 $M_5(t_0) = M_6(t_0) > 0 (< 0)$, 我们能用与上节类似的方法构造 Poincaré-Bendixon 环域定理所要求的环域 $D(D')$ 的外境界线 $L(L')$ ^[4]. 当 $G(1) + G(-1) - Q(1) + Q(-1) > 0 (< 0)$ 时, 由 $L(L')$ 上任一点出发的轨线部分离开(进入)环域 $D(D')$ 但从未进入(离开)它. 以中心 $O(0, 0)$ 附近任一轨线为环域 $D(D')$ 的内境界线 L_0 , 则从 L_0 上任一点出发的轨线从未进入(离开)内境界线 L_0 , 所以下面结论成立.

定理 4 对系统(3.1), 当条件 $f(0) = 0$ 和 $G(1) + G(-1) - Q(1) + Q(-1) > 0 (< 0)$ 成立时, 系统在异宿轨道附近存在一外不稳定(稳定)的极限环.

参 考 文 献

- 1 李继彬,《浑沌与 Melnikov 方法》, 重庆大学出版社 (1989).
- 2 T. Gukenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Field*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Tokyo (1984).
- 3 沈家骥、俞伯华, 非线性扰动方程的紊动性态, 数学学报, **31**(2) (1988), 215—220.
- 4 叶彦谦,《极限环论》, (修改版), 上海科学技术出版社 (1984).

Limit Circles Bifurcated from a Soft Spring Duffing Equation under Perturbation

Cheng Fude

(Department of Mathematics, Hubei Normal University, Huangshi, Hubei 435002, P. R. China)

Abstract

In this paper, the Melnikov function method has been used to analyse the distance between stable manifold and unstable manifold of the soft spring Duffing equation^[1] after its heteroclinic orbits rupture as the result of a small perturbation. The conditions that limit circles are bifurcated are given, and then their stability and location is determined.

Key words limit circle, heteroclinic orbit, Melnikov function