

# 多频激励 Duffing 系统的分岔和混沌\*

毕勤胜<sup>①</sup> 陈予恕<sup>①</sup> 吴志强<sup>①</sup>

(1995 年 4 月 15 日收到, 1996 年 7 月 30 日收到修改稿)

## 摘 要

本文通过引入非线性频率, 利用 Floquet 理论及解通过转迁集时的特性, 研究了不可通约两周期激励作用下的 Duffing 方程在一次近似下的各种分岔模式及其转迁集, 并指出其通向混沌可能的途径。

**关键词** 非线性频率 Floquet 理论 分岔 混沌 多频激励 Duffing 系统

## § 1. 引 言

单频激励下的 Duffing 系统的研究已有许多工作<sup>[1],[2],[3]</sup>, 参外联合作用下 Duffing 系统的概周期解分析, 也有许多工作问世。如陆启韶<sup>[4],[5]</sup>等人研究了两项参数激励作用下的局部分岔和 Hopf 分岔问题。Yagasaki<sup>[6],[7],[8]</sup>研究了参外激联合作用下的混沌, 陈予恕和王德石<sup>[9]</sup>通过计算 Melnikov 函数研究了参外激联合作用下由概周期解通向混沌的道路。多频激励下的 Duffing 系统, 假如外激励频率不可公约, 具有更复杂的动力学特性, 此时不仅可以有  $\omega_1 m/n$ ,  $\omega_2 m/n$  的响应频率, 还可能存在  $|(m/n)(\omega_1 \pm \omega_2)|$  的响应频率<sup>[10]</sup>, 在该系统中必将产生概周期解<sup>[11]</sup>, 概周期解进一步失稳, 则容易导致混沌<sup>[12]</sup>。T. Kapitaniak<sup>[13]</sup>研究了多频激励 Duffing 振子的组合分岔, 并借用 F\_P\_K 方程<sup>[14],[15]</sup>研究了附加噪声作用下的系统的动力学特性。本文研究如下两周期激励作用下的 Duffing 振子。

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + kx^3 = \mathcal{F}_1 \cos \omega_1 t + \mathcal{F}_2 \cos \omega_2 t \quad (1.1)$$

其中  $\omega_1$  和  $\omega_2$  不可公约。通过引入非线性频率, 利用 Floquet 理论<sup>[16]</sup>及 A. Y. T. Leung 在研究 Duffing 方程参数平面上定常解分布时提出的思想<sup>[10]</sup>, 研究方程 (1.1) 在一次近似下的各种分岔模式及其转迁集, 并指出其通向混沌的可能途径。

## § 2. 多频激励下 Duffing 振子的分岔

考虑 (1.1) 的一次近似非共振定常解

$$x = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (2.1)$$

\* 国家自然科学基金和博士点基金资助项目

① 天津大学力学与工程测试系, 天津 300072

其中  $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$  为常数, 将由下列方程组确定

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) C_1 + \frac{3}{4} C_1^3 + \frac{3}{2} k C_1 C_2^2 = \mathcal{F}_1 \cos \theta_1 \quad (2.2a)$$

$$- 2\mu\omega_1 C_1 = \mathcal{F}_1 \sin \theta_1 \quad (2.2b)$$

$$(\omega_0^2 - \omega_2^2) C_2 + \frac{3}{4} k C_2^3 + \frac{3}{2} k C_1^2 C_2 = \mathcal{F}_2 \cos \theta_2 \quad (2.2c)$$

$$- 2\mu\omega_2 C_2 = \mathcal{F}_2 \sin \theta_2 \quad (2.2d)$$

设其扰动解为  $y$ , 从而有 (1.1) 的扰动方程

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + [\omega_0^2 + 3kx^2(t)y + 3kx(t)y^2 + ky^3] = 0 \quad (2.3)$$

研究一次近似解的分岔情况, 由于在分岔转迁集上, 扰动解  $y \ll x$ , 因此, 可以忽略 (2.3) 中非线性项的影响, 仅考虑 (2.3) 中线性部分, 有

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + y[\lambda_0^2 + \lambda_1 \cos 2\Phi_1 + \lambda_2 \cos 2\Phi_2 + \lambda_3 \cos(\Phi_1 + \Phi_2) + \lambda_4 \cos(\Phi_1 - \Phi_2)] = 0 \quad (2.4)$$

其中

$$\lambda_0^2 = \omega_0^2 + 3k(C_1 + C_2)/2, \quad \lambda_1 = 3kC_1^2/2 \quad (2.5a, b)$$

$$\lambda_2 = 3kC_2^2/2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3kC_1C_2 \quad (2.5c, d)$$

$$\Phi_1 = \omega_1 t + \theta_1, \quad \Phi_2 = \omega_2 t + \theta_2 \quad (2.6a, b)$$

其中  $\lambda_0$  为非线性频率, 根据 Nayfeh<sup>[17]</sup> 的结论, 当  $\lambda_0$  接近  $m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 此时解失去稳定性, 会产生分岔现象. A. Y. T. Leung<sup>[10]</sup> 进一步指出, 此时系统的解将包括  $m\omega_1 + n\omega_2$  频率成分, 且在转迁集上, 该频率成分的幅值为零, 一旦穿过此转迁集, 则该频率成分的幅值增加很快, 此时, 非线性项将抑制该幅值的迅速增长, 以达到新的稳定. 现分别进行研究.

## 2.1 周期解失稳, 产生跳跃和滞后现象

根据 Mathieu 理论 (参见 Nayfeh & Mook<sup>[17]</sup>), 从 (2.4) 知, 当非线性频率接近  $\omega_m/n$  ( $\omega_i$  为外激励频率) 时, 会导致概周期解失稳. 由于在一次近似 (2.1) 中, 概周期解由两部分周期解组成, 在此称其为周期分量, 其周期分别为  $2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2$ , 这样, 当  $\lambda_0^2 = \omega_1^2 + \varepsilon$  或  $\omega_2^2 + \varepsilon$  时, 概周期解失稳, 产生新的概周期解. 此时, 摄动解可分别设为

$$y_1 = e^{\varepsilon t} \cos(\omega_1 t + \theta_1) b_1, \quad y_2 = e^{\varepsilon t} \cos(\omega_2 t + \theta_2) b_2 \quad (2.7a, b)$$

将 (2.7a) 及 (2.7b) 分别代入 (2.4) 中有

$$(\lambda_0^2 - \omega_1^2) e^{\varepsilon t} \cos(\omega_1 t + \theta_1) b_1 - 2\mu\omega_1 e^{\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \theta_1) b_1 + e^{\varepsilon t} \cos(\omega_1 t + \theta_1) b_1 [\lambda_1 \cos 2(\omega_1 t + \theta_1) + \lambda_2 \cos 2(\omega_2 t + \theta_2) + \lambda_3 \cos(\omega_1 t + \omega_2 t + \theta_1 + \theta_2) + \lambda_4 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t + \theta_1 - \theta_2)] = 0 \quad (2.8a)$$

$$(\lambda_0^2 - \omega_2^2) e^{\varepsilon t} \cos(\omega_2 t + \theta_2) b_2 - 2\mu\omega_2 e^{\varepsilon t} \sin(\omega_2 t + \theta_2) b_2 + e^{\varepsilon t} \cos(\omega_2 t + \theta_2) b_2 [\lambda_1 \cos 2(\omega_1 t + \theta_1) + 3\lambda_2 \cos 2(\omega_2 t + \theta_2) + \lambda_3 \cos(\omega_1 t + \omega_2 t + \theta_1 + \theta_2) + \lambda_4 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t + \theta_1 - \theta_2)] = 0 \quad (2.8b)$$

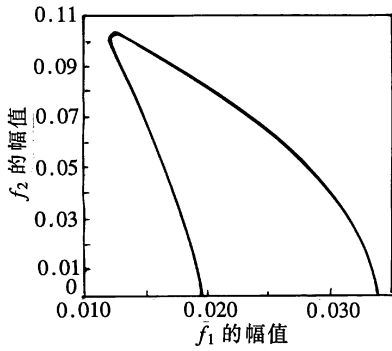
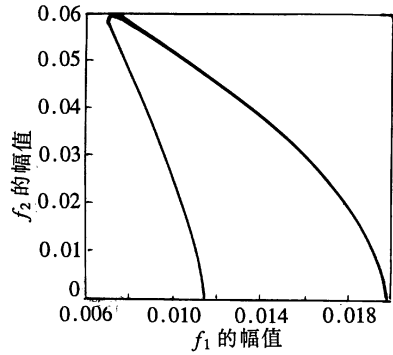
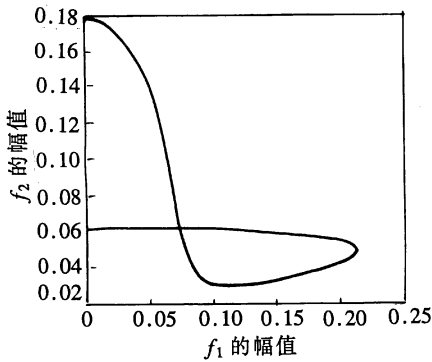
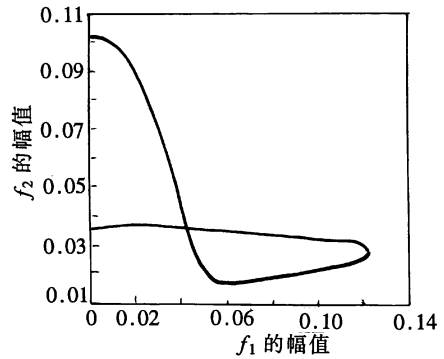
为使 (2.8a)、(2.8b) 中  $b_1$  和  $b_2$  有解, 故必须有

$$(\lambda_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\mu\omega_1)^2 - \lambda_1^2/2 = 0 \quad (2.9a)$$

$$(\lambda_0^2 - \omega_2^2)^2 + (2\mu\omega_2)^2 - \lambda_2^2/2 = 0 \quad (2.9b)$$

上式即为  $\lambda_0$  分别接近于  $\omega_1$  和  $\omega_2$  时不稳定区域的边界.

图 1~ 4 给出了当  $\mu = 0.05$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.732$ ,  $\omega_0 = 0.0$ ,  $k$  分别等于 1, 3 时  $(f_1, f_2)$  平面上分别对于  $\omega_1, \omega_2$  的不稳定区域边界。比较不难发现, 随着系统非线性的增强, 不稳定区域变小, 且对较小的外激频率, 其不稳定区域是连通的, 而对于较大的外激频率, 不稳定区域由两部分组成。

图 1  $k = 1$ 图 2  $k = 3$ 图 3  $k = 1$ 图 4  $k = 3$ 

## 2.2 对称破缺分岔

同样, 由 Mathieu 理论, 当  $\lambda_0$  接近于  $2\omega_1$  或  $2\omega_2$  时产生不稳定区域, 此时对单频外激励而言产生对称破缺<sup>[18]</sup>。此处所说的对称破缺的含义为系统的概周期解由两个对称周期解分量组成, 当  $\lambda_0$  接近于  $2\omega_1$  或  $2\omega_2$  时, 其中相应的对称周期解分量失稳, 产生偶次谐波项, 导致对称破缺。此处不妨以  $2\omega_1$  作为例子( $2\omega_2$  的情形相同)。设

$$\lambda_0^2 = 4\omega_1^2 + \varepsilon \quad (2.10)$$

令

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (2.11)$$

由广义牛顿迭代法, 可得

$$y_0 = A_0 \cos(2\omega_1 t + \rho) \quad (2.12)$$

$$y_1 = \frac{1}{2} A_0 \lambda_1 \left[ \frac{1}{12 \omega_1^2} \cos(4\omega_1 t + 2\theta_1 + \rho) - \frac{1}{4 \omega_1^2} \cos(2\theta_1 - \rho) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} A_0 \lambda_2 \left[ \frac{1}{(2\omega_2 + 2\omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \cos(2\omega_2 t + 2\theta_2 - 2\omega_1 t + \rho) \right. \\
& + \left. \frac{1}{(2\omega_2 - 2\omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \cos(2\omega_2 t + 2\theta_2 - 2\omega_1 t - \rho) \right] \\
& + \frac{1}{2} A_0 \lambda_3 \left[ \frac{1}{(3\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\omega_1^2} \cos(3\omega_1 t + \omega_2 t + \theta_1 + \theta_2 + \rho) \right. \\
& + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \cos(\omega_2 t + \theta_1 + \theta_2 - \omega_1 t - \rho) \\
& + \frac{1}{(\omega_2 + \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \cos(\omega_2 t + \theta_2 - \omega_1 t - \theta_1 - \rho) \\
& + \left. \frac{1}{(\omega_2 - 3\omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \cos(\omega_2 t + \theta_2 - 3\omega_1 t - \theta_1 - \rho) \right] \quad (2.13)
\end{aligned}$$

设  $y_1^0 = y_0 + \varepsilon y_1$ , 代入(2.4)并消去永年项有

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon - \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{1}{6\omega_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{4} \left[ \frac{1}{(2\omega_1 + 2\omega_2)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(2\omega_1 - 2\omega_2)^2 - 4\omega_1^2} \right. \right. \\
& + \left. \frac{\lambda_3^2}{4} \left[ \frac{1}{(3\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{(\omega_2 + \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 3\omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \right] \right\}^2 + (4\mu\omega_1)^2 \\
\text{据 M} & = \left( \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{1}{4\omega_1^2} \right)^2 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

将(2.10)代入上式, 则有对  $\omega_1$  的二阶 ( $\lambda_0$  在  $2\omega_1$  附近) 对称破缺分岔转迁集为

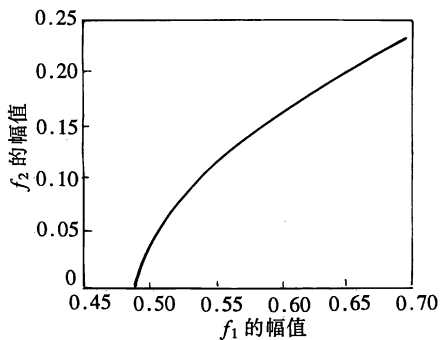
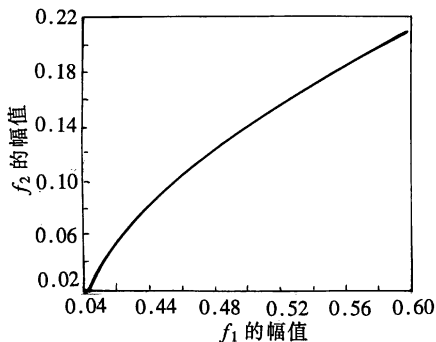
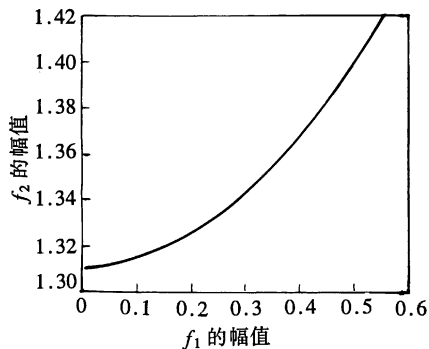
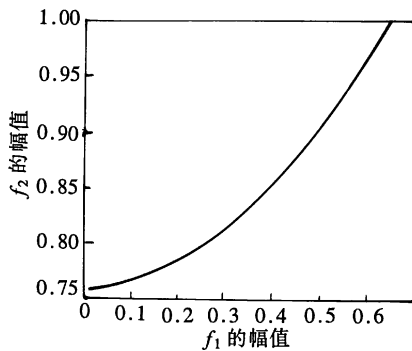
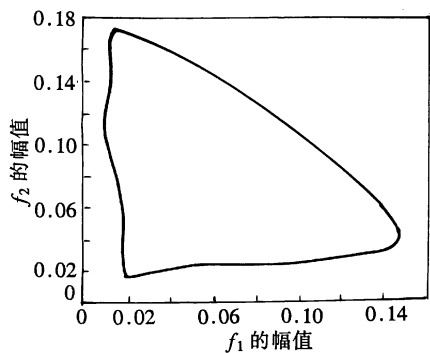
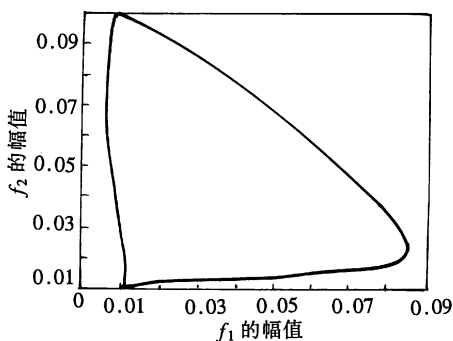
$$\begin{aligned}
& \left\{ \lambda_0^2 - 4\omega_1^2 - \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{1}{6\omega_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{4} \left[ \frac{1}{(2\omega_1 + 2\omega_2)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(2\omega_1 - 2\omega_2)^2 - 4\omega_1^2} \right] \right. \\
& + \frac{\lambda_3^2}{4} \left[ \frac{1}{(3\omega_1 + \omega_2)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{(\omega_2 + \omega_1)^2 - 4\omega_1^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 3\omega_1)^2 - 4\omega_1^2} \right] \right\} + (4\mu\omega_1)^2 \\
& = \left( \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{1}{4\omega_1^2} \right)^2 \quad (2.15)
\end{aligned}$$

同理, 对  $\omega_2$  的二阶 ( $\lambda_0$  在  $2\omega_2$  附近) 对称破缺分岔转迁集为

$$\begin{aligned}
& \left\{ \lambda_0^2 - 4\omega_2^2 - \frac{\lambda_2^2}{4} \frac{1}{6\omega_2^2} + \frac{\lambda_3^2}{4} \left[ \frac{1}{(2\omega_1 + 2\omega_2)^2 - 4\omega_2^2} + \frac{1}{(2\omega_2 - 2\omega_1)^2 - 4\omega_2^2} \right] \right. \\
& + \frac{\lambda_1^2}{4} \left[ \frac{1}{(3\omega_2 + \omega_1)^2 - 4\omega_2^2} + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - 4\omega_2^2} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - 4\omega_2^2} + \frac{1}{(\omega_1 - 3\omega_2)^2 - 4\omega_2^2} \right] \right\} + (4\mu\omega_2)^2 \\
& = \left( \frac{\lambda_2^2}{4} \frac{1}{4\omega_2^2} \right)^2 \quad (2.16)
\end{aligned}$$

图 5~ 8 中给出了  $\mu = 0.05$ ,  $\omega_0 = 0.0$ ,  $\omega_1 = 0.414$ ,  $\omega_2 = 0.732$ ,  $k = 1, 3$  时概周期解中  $2\pi/\omega_1$  周期分量和  $2\pi/\omega_2$  周期分量产生二阶对称破缺分岔时  $(f_1, f_2)$  参数平面上的转迁集, 从图中可以看出, 随着  $k$  的增加, 对称破缺转迁集逐渐接近  $f_1, f_2$  轴。

当概周期解穿越该转迁集时, 其中  $\omega_1$  或  $\omega_2$  分量失稳, 产生对称破缺, 随着  $f_1$  或  $f_2$  的增加, 系统概周期解中相应的  $2\pi/\omega_1$  或  $2\pi/\omega_2$  周期分量会产生  $\omega_1/2$  或  $\omega_2/2$  频率成分的倍化分岔解, 从而导致混沌解。

图 5  $k=1$ 图 6  $k=3$ 图 7  $k=1$ 图 8  $k=3$ 图 9  $k=1$ 图 10  $k=3$ 

### 2.3 组合倍化分岔

同样, 当  $\lambda_0^2$  接近于  $(\omega_1 + \omega_2)^2/4$  或  $(\omega_1 - \omega_2)^2/4$  时, 系统(1.1)会产生组合倍化分岔, 分

别设扰动解形如

$$y_1 = e^{\varepsilon t} b_3 \cos \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_3 \right] \tag{2.17}$$

$$y_2 = e^{\varepsilon t} b_4 \cos \left[ \frac{\omega_2 - \omega_1}{1} t + \varphi_4 \right] \tag{2.18}$$

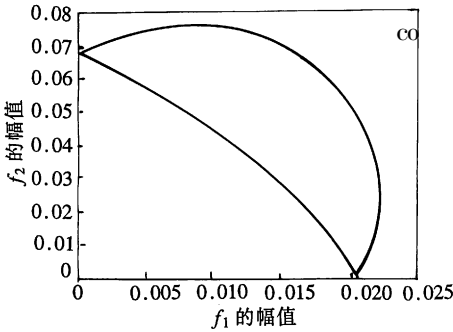


图 11  $k = 1$

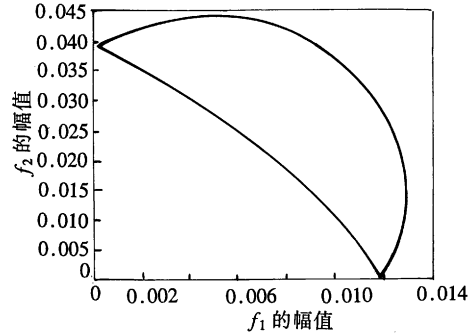


图 12  $k = 3$

代入扰动方程, 根据有解条件, 可得其转迁集

$$\left[ \lambda_0^2 - \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right]^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \mu^2 - \left[ \frac{\lambda_3}{2} \right]^2 = 0 \right] \tag{2.19}$$

$$\left[ \lambda_0^2 - \left[ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right]^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \mu^2 - \left[ \frac{\lambda_4}{2} \right]^2 = 0 \right] \tag{2.20}$$

图 9~ 12 中给出了对  $(\omega_1 + \omega_2)/2, \mu = 0.05, \omega_1 = 0.414, \omega_2 = 0.732, k = 1, 3$  时  $(f_1, f_2)$  参数平面上倍化分岔域, 同时也给出了对  $(\omega_2 - \omega_1)/2, \mu = 0.05, \omega_0 = 0.0, \omega_1 = 0.414, \omega_2 = 0.732, k = 1, 3$  时  $(f_1, f_2)$  参数平面上倍化分岔域, 比较发现, 随着  $k$  的增加, 倍化分岔域变小, 且接近于原点。

一般地, 当  $\lambda_0^2 = [(m\omega_1 \pm n\omega_2)/2]^2 + \varepsilon\sigma$  时, 会产生  $(m\omega_1 \pm n\omega_2)/2$  频率成分, 如, 当

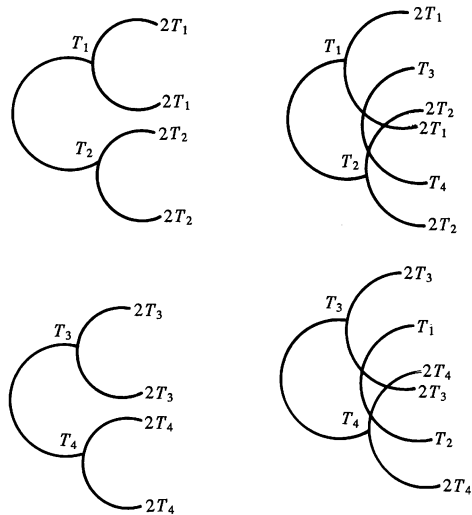
$$x = \sum C_{m,n} \cos(m\omega_1 t + n\omega_2 t + \theta_{m,n}) \quad (m, n \text{ 为整数}) \tag{2.21}$$

其扰动方程设为

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \left[ \lambda_0^2 + \sum \lambda_{m,n} \cos(m\omega_1 t + n\omega_2 t + \theta_{m,n}) \right] y = 0 \tag{2.22}$$

产生  $(m\omega_1 + n\omega_2)/2$  分岔的转迁集可表示为

$$\left[ \lambda_0^2 - \left[ \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{2} \right]^2 + (m\omega_1 + n\omega_2)^2 \mu^2 - \left[ \frac{\lambda_{m,n}}{2} \right]^2 = 0 \right] \tag{2.23}$$



$$T_1 = 2\pi/\omega_1, T_2 = 2\pi/\omega_2$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_1 \pm \omega_2}, T_4 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

图 13 混沌途径

### § 3. 结 论

本文通过引入非线性频率, 利用 Floquet 理论及 A. Y. T. Leung 在研究 Duffing 方程参数平面上定常解分布时提出的思想, 研究了多频激励 Duffing 方程一次近似解的各种分岔模式及其变迁集。在多频激励系统中, 由于有  $n$  个周期外激励的作用, 会产生单频分岔、组合分岔, 其通向混沌的道路, 总结如下: (参见图 13)

- 1) 概周期解中某一频率成分不断产生倍化分岔, 导致混沌。
- 2) 概周期解中某一组合频率成分不断产生倍化分岔, 导致混沌。
- 3) 以上两种倍化分岔过程或交替出现, 或同时出现, 导致混沌。

### 参 考 文 献

- 1 W. H. Steeb, W. Erig and A. Kunick, Chaotic behaviour and limit cycle behaviour of anharmonic systems with periodic external perturbations, *Physics Letters A*, **93**(6) (1983), 267—270.
- 2 S. Sato, M. Sano and Y. Sawada, Universal scaling property in bifurcation structure of Duffing's and generalized Duffing's equation, *Physical Review A*, **28**(3) (1983), 1654—1658.
- 3 Y. Ueda and N. Slamatsu, Chaotically transitional phenomena in the forced negative resistance oscillator, *Institute of Electrical Engineers Transactions on Circuits Systems*, **CAS\_28**(2) (1981), 217—223.
- 4 Q. S. Lu and C. W. S. To, Principle resonance of a nonlinear system with two-frequency parametric and self-excitations, *Nonlinear Dynamics*, **2**(6) (1991), 419—444.
- 5 陆启韶、黄克累、非线性动力学、分岔和混沌, 全国一般力学发展与展望会议, 哈尔滨 (1993), 11—18.
- 6 K. Yagasaki, M. Sakata and K. Kimura, Dynamics of weakly nonlinear system subjected to combined parametric and external excitation, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **57**(1) (1990), 209—217.
- 7 K. Yagasaki, Chaos in weakly nonlinear oscillator with parametric and external resonance, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **58**(1) (1991), 244—250.
- 8 K. Yagasaki, Chaotic dynamics of a quasi-periodically forced beam, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **59**(1) (1992), 161—167.
- 9 陈予恕、王德石, 轴向激励下梁的混沌运动, *非线性动力学学报*, **1**(2) (1993), 124—135.
- 10 A. Y. T. Leung and T. C. Fung, Construction of chaotic regions, *J. Sound Vib.*, **131**(3) (1989), 445—455.
- 11 Szeplinska-Stupnicka and Bajkowski, The 1/2 subharmonic resonance its transition to chaos motion in a nonlinear oscillator, *IFTR Reports* **4**(1) (1986), 67—72.
- 12 R. Van Dooren, On the transition from regular to chaotic behaviour in the Duffing oscillator, *J. Sound Vib.*, **123**(2) (1988), 327—339.
- 13 T. Kapitaniak, Combined bifurcations and transition to chaos in a nonlinear oscillator with two external periodic forces, *J. Sound Vib.*, **121**(2) (1988), 259—268.
- 14 T. Kapitaniak, Chaotic distribution of nonlinear systems perturbed by random noise, *Physical Letters A*, **116**(6) (1986), 251—254.
- 15 T. Kapitaniak, A property of a stochastic response with bifurcation to nonlinear system, *J. Sound Vib.*, **107**(1) (1986), 177—180.
- 16 V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equation*, M. I. T. Press (1973), 22—26, 48—52.

- 17 A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, New York (1979), 300—313.
- 18 R. Raty and J. Von Boehm, Absence of inversion symmetric limit cycles of even period and chaotic motion of Duffing oscillator, *Physics Letters A*, **103**(6) (1984), 288—292.

## **Bifurcation in a Nonlinear Duffing System with Multi-Frequency External Periodic Forces**

Bi Qinsheng    Chen Yushu    Wu Zhiqiang

( Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China )

### **Abstract**

By introducing nonlinear frequency, using Floquet theory and referring to the characteristics of the solution when it passes through the transition boundaries, all kinds of bifurcation modes and their transition boundaries of Duffing equation with two periodic excitations as well as the possible ways to chaos are studied in this paper.

**Key words**    nonlinear frequency, Floquet theory, bifurcation, chaos, Duffing system with multi-frequency external periodic forces