应用数学和力学, 第 19 卷 第 3 期(1998 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

有限元体系的 M_P 逆结构拓扑变化法

陈塑寰[①]　梁　平[①]　韩万芝[①]

(龙驭球推荐; 1996 年 11 月 26 日收到)

摘　要

本文应用 Moore_Penrose 逆理论, 给出了一套当结构拓扑发生变化时结构静力响应的计算公式•其特点是不需建立求解线性方程组•

关键词　拓扑修改　结构分析　M_P 逆理论　有限元结构

中图分类号　V214

§1. 引　　言

工程设计是一个反复的结构修改过程• 结构修改按其修改方式可分为参数修改, 形状修改, 拓扑修改• 参数修改是指在结构拓扑一定, 构件形状一定的前提下, 对有关参数(如横截面积, 质量, 刚度) 进行修改[1], [2]; 形状修改是指在结构拓扑一定的前提下, 对构件形状进行修改[3], [4]; 拓扑修改是指对结构拓扑进行修改[5]• 结构修改问题之一就是如何快速计算修改后的响应• 对于静力有限元结构来说, 结构修改就意味着反复建立, 求解线性方程组, 存在着大量的重复计算• 本文以三角形单元构成的平面问题为背景, 利用 Moore_Penrose 逆理论, 尝试建立一套结构拓扑变化的公式, 以它们为基础建立一套彻底摆脱方程组的分析方法• 本文的结构拓扑变化是指由下列三种基本变化演变出来的任何种类的结构变化, 这三种基本拓扑变化是:

Ⅰ. 在原结构上增加或撤消一新单元;

Ⅱ. 改变单元的参数;

Ⅲ 在某节点增添或撤消 x 方向(y 方向) 上的约束(支承)•

本文的课题是: 当有限元结构发生上述三类基本变化时, 其静力响应如何变化, 并找出其显式关系• 文献[6]、[7]、[8] 都曾讨论结构变化定理•

§2. Moore_Penrose 逆理论简介

定义　设 $A \in R^{m\times n}$• 若 $X \in R^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1)\ AXA = A \qquad &(2)\ XAX = X \\ &(3)\ (AX)^T = AX \qquad &(4)\ (XA)^T = XA \end{aligned} \tag{2.1}$$

① 吉林工业大学力学系, 长春 130025

则 X 称为 A 的 Moore_Penrose 逆或简称 M_P 逆, 记作 $X = A^{+}$•

为方便, 列出下面引理•

引理 1(Greville) 设 $\tilde{H} = [H, h]$• 置 $d = Hh$, $c = Hd$, h, c, d 均为列向量, 则 $\tilde{H}$ 的 M_P 逆为

$$\tilde{H}^{+} = \begin{bmatrix} B \\ g^{T} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

. 引

其中

改

$$g^{T} = \begin{cases} c^{+} & (c \neq 0) \\ (1 + d^{T}d)^{-1} d^{T} H^{+} & (c = 0) \end{cases} \qquad (2.3)$$

$$B = H^{+} - dg^{T} \qquad (2.4)$$

注 $c = 0 \Leftrightarrow h \in R(H) \Leftrightarrow \operatorname{rank}\tilde{H} = \operatorname{rank}H$•

引理的证明可参见文献[9]或[10]•

引理 2 设 $H = [\tilde{H} \quad h]$, $H^{+} = \begin{bmatrix} B \\ g^{T} \end{bmatrix}$, h, g 均为列向量, 则

$$\tilde{H}^{+} = \begin{cases} B + (1 - g^{T}h)^{-1} Bhg^{T} & (h \in R(\tilde{H})) \\ B - Bgg^{T}/(g^{T}g) & (h \notin R(\tilde{H})) \end{cases} \qquad (2.5)$$

证明 令 $d = \tilde{H}^{+} h$, $c = h - \tilde{H}d$, 则由式(2.4)知 $\tilde{H}^{+} = B + dg^{T}$ $\qquad (a_1)$

1° 若 $h \in R(\tilde{H})$, 即 $c = 0$, 则

$$g^{T} = (1 + d^{T}d)^{-1} d^{T} H^{+}$$

因而 $g^{T}h = (1 + d^{T}d)^{-1} d^{T}d < 1$ $\qquad (a_2)$

用 h 右乘式(a_1) 两端, 得

$$d = \tilde{H}^{+} h = Bh + dg^{T}h$$

所以得 $d = (1 - g^{T}h)^{-1} Bh$ $\qquad (a_3)$

由式(a_3) 代入式(a_1), 得到

$$\tilde{H}^{+} = B + (1 - g^{T}h)^{-1} Bhg^{T}$$

2° 若 $h \notin R(\tilde{H})$, 即 $c \neq 0$, 则

$$g = c^{+T} = c/(c^{T}c) = (h - \tilde{H}\tilde{H}^{+} h)/(c^{T}c) \qquad (a_4)$$

用 g 右乘式(a_1) 两端, 得

$$\tilde{H}^{+} g = Bg + d(g^{T}g) \qquad (a_5)$$

而 $\tilde{H}^{+} g = (\tilde{H}^{+} h - \tilde{H}^{+} \tilde{H}\tilde{H}^{+} h)/(c^{T}c) = 0$

故将 $\tilde{H}^{+} g = 0$ 代入式(a_5) 得

$$d = - Bg/(g^{T}g) \qquad (a_6)$$

所以由式(a_1), (a_6) 有

$$\tilde{H}^{+} = B - \frac{1}{g^{T}g} Bgg^{T} \qquad \text{Q.E.D}$$

引理 3 设 $\tilde{H} = \begin{bmatrix} H & H_1 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$, 其中 H_2 为非奇异方阵, 且 $\operatorname{rank}[H, H_1] = \operatorname{rank}H$, 则 $\tilde{H}$ 的 M_P 逆为

$$\tilde{H}^{+} = \begin{bmatrix} H^{+} & -H^{+}H_1H_2^{-1} \\ 0 & H_2^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

证明　由 $\mathrm{rank}[H, H_1] = \mathrm{rank}H$ 知存在矩阵 Y 使得

$$H_1 = HY$$

于是 $$HH^{+}H_1 = HH^{+}HY = HY = H_1$$

利用此式, 可以验证 $\tilde{H}^{+}, \tilde{H}$ 满足式(2.1)• Q.E.D•

§3. 刚度矩阵的分解

设有限元体系(以三角形单元为例)有 m 个单元 n 个节点• 以 i, j, k 表单元顶点, 以 α, β 等表单元编号• 有关公式如下(可参见文[11])

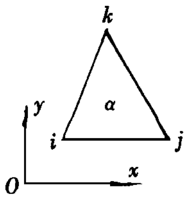


图 1

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}] = BQ \tag{3.1}$$

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] = D\varepsilon \tag{3.2}$$

$$K^{\alpha} = AtB^{T}DB \tag{3.3}$$

$$K = \sum_{\alpha=1}^{m} K^{\alpha} \tag{3.4}$$

$$KQ = P \tag{3.5}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^{2}} \tag{3.6}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \tag{3.7}$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = -x_j + x_k \qquad (i, j, k \text{ 轮换}) \tag{3.8}$$

其中, ε, σ 为单元应变矢和应力矢; D 为弹性矩阵, K^{α} 为单元刚度阵, E 为杨氏模量, ν 为泊松比, t 为单元厚度, A 为单元面积, x_i, y_i 为节点坐标• K, Q, P 为总刚度阵, 结点总位移矢及外载荷矢•

令

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

则

$$\frac{t}{A}S^{T}DS = \begin{bmatrix} \frac{Et}{2A(1+\nu)} & & \\ & \frac{Et}{2A(1+\nu)} & \\ & & \frac{Et}{2A(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

令

$$W^{\alpha} = \mathrm{diag}(W_1^{\alpha}, W_2^{\alpha}, W_3^{\alpha}) \tag{3.10}$$

其中

$$W_1^\alpha = W_2^\alpha = \sqrt{\frac{Et}{2A(1+\nu)}}, \quad W_3^\alpha = \sqrt{\frac{Et}{2A(1-\nu)}} \tag{3.11}$$

于是

$$\frac{t}{A}S^T DS = (W^\alpha)^2 \tag{3.12}$$

现在将 K^α 改写成

$$K^\alpha = AB^T S^{-T}\left(S^T DS\frac{t}{A}\right)(AS)^{-1}B = H^\alpha (H^\alpha)^T \tag{3.13}$$

其中

$$H^\alpha = AB^T S^{-T} W^\alpha = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_i w_1^\alpha & b_i w_1^\alpha & c_j w_1^\alpha & b_j w_1^\alpha & c_k w_1^\alpha & b_k w_1^\alpha \\ b_i w_2^\alpha & -c_i w_2^\alpha & b_j w_2^\alpha & -c_j w_c^\alpha & b_k w_2^\alpha & -c_k w_2^\alpha \\ b_i w_3^\alpha & c_i w_3^\alpha & b_j w_3^\alpha & c_j w_3^\alpha & b_k w_3^\alpha & c_k w_3^\alpha \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

记 H^α 的第一, 二, 三列为 $h_1^\alpha, h_2^\alpha, h_2^\alpha$, 即 $H^\alpha = [h_1^\alpha\ h_2^\alpha\ h_3^\alpha]$• 本文如下约定: 不同阶数矩阵运算时应将它们的阶数适当扩充•

记 $$H = [H^1 \quad H^2 \quad \cdots \quad H^m]$$

则 $$K = \sum_{\alpha=1}^m K^\alpha = \sum_{\alpha=1}^m (H^\alpha)(H^\alpha)^T = HH^T \tag{3.15}$$

为方便, 引入下面概念

H 称为因子矩阵, H^α 称为单元因子, $h_s^\alpha (s = 1, 2, 3)$ 称为子元因子; $G = H^+$ 称为逆因子矩阵, 其行向量 $(g_s^\alpha)^T$ (位置与 $(h_s^\alpha)^T$ 在 H^T 中相同) 称为子元逆因子, $G^\alpha = [g_1^\alpha \quad g_2^\alpha \quad g_3^\alpha]^T$ 称单元逆因子•

由 M_P 性质易见

$$K^{-1} = G^T G = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{s=1}^m (g_s^\alpha)(g_s^\alpha)^T \tag{3.16}$$

由式(3.5)及(3.16)得

$$Q = G^T GP \tag{3.17}$$

由式(3.1), (3.14)及(3.16)得

$$\varepsilon = BQ = \frac{1}{A}S(W^\alpha)^{-1}(H^\alpha)^T G^T GP$$

而由 $H^T G^T G = G$, 知

$$(H^\alpha)^T G^T G = G^\alpha$$

所以 $$\varepsilon = \frac{1}{A}S(W^\alpha)^{-1}G^\alpha P \tag{3.18}$$

由式(3.2), (3.12)及(3.18)得

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{A}{t}S^{-T}(W^\alpha)^2 S^{-1}\frac{1}{A}S(W^\alpha)^{-1}G^\alpha P \\ &= \frac{1}{t}S^{-T}W^\alpha G^\alpha P\end{aligned} \tag{3.19}$$

§4. 有限元结构拓扑变化

本节主要讨论的问题是: 当有限元结构拓扑发生三种基本变化后, 其逆因子矩阵 G (子元

逆因子)如何变化•

1. 第一类拓扑变化——增添或撤消一个单元

增加单元 α 时,变化后结构的因子矩阵 $\tilde{H}$ 为原结构因子矩阵 H 添加 H^{α}(不妨设添在 H 的后部)而成,即 $\tilde{H} = [H \quad H^{\alpha}]$•

欲增单元 α 有两种情形:一是增加单元不增加节点,如图 2(a),称为系元;二是增加单元时同时增加一新节点 k,如图 2(b),称为肢元•

(a) 系元　　(b) 肢元

图 2

(A) 增加或撤消系元

增加系元 α,可将 H^{α} 的三列依次添加 H 中,由引理 1,可得,添加一列 h_s^{α} 后,子元逆因子变为

$$
\begin{aligned}
g_s^{\alpha} &= (1 + d^T d)^{-1} G^T d \\
\hat{g}_r^{\beta} &= g_r^{\beta} - ((h_s^{\alpha})^T g_r^{\beta}) \cdot \hat{g}_s^{\alpha}, (\beta \neq \alpha \text{ 或 } r \neq s)
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

其中

$$
d = G h_s^{\alpha} \tag{4.2}
$$

利用式(4.1)、(4.2)三次,即可得到增加系元后结构逆因子矩阵 $\tilde{G}$•

撤消系元是增加系元的逆过程• 可依次从原结构因子矩阵 H 中划去列 $h_s^{\alpha}(s = 1, 2, 3)$•由引理 2 可得,$H$ 划掉一列 h_s^{α} 后,子元逆因子变为

$$
g_r^{\beta} = g_r^{\beta} + \frac{(h_s^{\alpha})^T g_r^{\beta}}{1 - (h_s^{\alpha})^T g_s^{\alpha}} g_s^{\alpha} \qquad (\beta \neq \alpha \text{ 或 } r \neq s) \tag{4.3}
$$

利用式(4.3)三次,即可得到撤消系元后结构的逆因子矩阵 $\tilde{G}$•

(B) 增加或撤消肢元

由于增加肢元 α 时,同时增加一个节点,即增加两个自由度• 不妨设

$$
\tilde{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^{\alpha} \\ 0 & H_2^{\alpha} \end{bmatrix}
$$

其中

$$
H_1^{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_i w_1^{\alpha} & b_i w_1^{\alpha} & c_j w_1^{\alpha} & b_j w_1^{\alpha} \\ b_i w_2^{\alpha} & -c_i w_2^{\alpha} & b_j w_2^{\alpha} & -c_j w_2^{\alpha} \\ b_i w_3^{\alpha} & c_i w_3^{\alpha} & b_j w_3^{\alpha} & c_j w_3^{\alpha} \end{bmatrix}
$$

$$
H_2^{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_k w_1^{\alpha} & b_k w_1^{\alpha} \\ b_k w_2^{\alpha} & -c_k w_2^{\alpha} \\ b_k w_3^{\alpha} & c_k w_3^{\alpha} \end{bmatrix}
$$

可用两种方法计算 $\tilde{G} = \tilde{H}^{+}$

方法 1 第一步: 计算 $\bar{H}_0 = [H \quad h_1^{\alpha} \quad h_2^{\alpha}]$ 的 M_P 逆, $\bar{H}_0$ 可写成

$$\bar{H}_0 = \begin{bmatrix} H & H_1 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$$ 是增

其中

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_i w_1^{\alpha} & b_i w_1^{\alpha} & c_j w_1^{\alpha} & b_j w_1^{\alpha} \\ b_i w_2^{\alpha} & -c_i w_2^{\alpha} & b_j w_2^{\alpha} & -c_j w_2^{\alpha} \end{bmatrix}^T$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_k w_1^{\alpha} & b_k w_1^{\alpha} \\ b_k w_2^{\alpha} & -c_k w_2^{\alpha} \end{bmatrix}$$

利用引理 3

$$\bar{H}_0^{+} = \begin{bmatrix} G & -GR \\ 0 & H_2^{-1} \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

中 阵 划去

其中(注意 $w_1^{\alpha} = w_2^{\alpha}$)

$$H_2^{-1} = \begin{bmatrix} c_k & b_k \\ b_k & -c_k \end{bmatrix} \frac{2}{w_1^{\alpha}(c_k^2 + b_k^2)} \qquad (4.5)$$

$$R = \frac{1}{c_k^2 + b_k^2}\begin{bmatrix} c_i c_k + b_i b_k & b_i c_k - b_k c_i & c_j c_k + b_j b_k & b_j c_k - b_k c_j \\ b_k c_i - b_i c_k & c_i c_k + b_i b_k & b_k c_j - b_j c_k & c_j c_k + b_j b_k \end{bmatrix}^T \qquad (4.6)$$

第二步: 计算 $\bar{H}^{+} = [\bar{H}_0 \quad h_3^{\alpha}]^{+}$, 可利用式(4.1)、(4.2)•

方法 2 第一步: 计算 $\bar{H}_0 = \begin{bmatrix} H & H_1^{\alpha} \\ 0 & H_3 \end{bmatrix}$ 的 M_P 逆•

其中

$$H_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_j w_1^{\alpha} & b_j w_2^{\alpha} & b_j w_3^{\alpha} \\ c_k w_1^{\alpha} & b_k w_2^{\alpha} & b_k w_3^{\alpha} \\ b_k w_1^{\alpha} & -c_k w_2^{\alpha} & c_k w_3^{\alpha} \end{bmatrix}$$

利用引理 3, 可得

$$\bar{H}_0^{+} = \begin{bmatrix} G & GR' \\ 0 & H_3^{-1} \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

其中

$$H_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2b_k c_k / w_1^{\alpha} & 2b_j c_k / w_1^{\alpha} & 0 \\ (c_k^2 - b_k^2)/w_2^{\alpha} & (b_j b_k - c_j c_k)/w_2^{\alpha} & -2A/w_2^{\alpha} \\ (c_k^2 + b_k^2)/w_3^{\alpha} & -(b_j b_k + c_j c_k)/w_3^{\alpha} & 2A/w_3^{\alpha} \end{bmatrix} \frac{1}{2c_k A} \qquad (4.8)$$

$$R' = \begin{bmatrix} c_k & c_k & 0 \\ -b_k & b_j & -c_i \\ -c_k & 0 & 0 \\ b_k & -b_j & -c_j \end{bmatrix} \frac{1}{c_k} \qquad (4.9)$$

第二步: $\bar{H}_0$ 去掉 $\frac{1}{2}(0, 0, \cdots, 0, c_j w_1^{\alpha}, b_j w_2^{\alpha}, b_j w_3^{\alpha})$ 后变为 $\bar{H}$, $\mathrm{rank}\bar{H} = \mathrm{rank}\bar{H}_0 - 1$, 可用引理 2 或后面的式(4.12) 而求得•

撤消肢元 α 相应也有两种方法•

方法 1 第一步, 设 H 去掉 h_3^{α} 后而得 $\bar{H}_0$• 计算 $\bar{H}_0^{+}$, 这可以利用式(4.3)求得•

第二步: 在 $\hat{H}_0^+$ 中去掉对应将消失的节点自由度的列及对应单元的行即得 $\hat{G}$•

方法 2　第一步: 计算 $\hat{H}_0^+ = \begin{bmatrix} H \\ h^T \end{bmatrix}^+$

其中　$H = \begin{bmatrix} \hat{H} & H_1^\alpha \\ 0 & H_2^\alpha \end{bmatrix}$,　$h^T = (0, \cdots, 0, c_j w_1^\alpha, b_j w_2^\alpha, b_j w_3^\alpha)$

计算 $\hat{H}_0^+$ 可利用后面的式(4.13) ~ (4.15) 求得(因为 $\mathrm{rank}H = \mathrm{rank}\hat{H}_0 - 1$)•

第二步: 去掉最后三列及最后三行即得撤消肢元后结构逆因子矩阵•

2. 第二类拓扑变化 ——改变单元参数

由式(3.11)知, 参数 E, t, ν 的变化均可归结为 w_s^α 的变化• 下面就考虑当 w_s^α 改变列 $\hat{w}_s^\alpha = w_s^\alpha + \Delta w_s^\alpha = (1 + m_s^\alpha) w_s^\alpha$ (其中 $m_s^\alpha = \dfrac{\Delta w_s^\alpha}{w_s^\alpha}$) 后, 结构逆因子矩阵(子元逆因子)如何变化•

设 w_s^α 变为 $\hat{w}_s^\alpha$ 后, 结构因子矩阵 H 变为 $\hat{H}$, 并设 $H^+ = G, \hat{H}^+ = \hat{G}$• 则 H 和 $\hat{H}$ 只是在第 α 单元的 H^α 中的第 s 列不同, 一个是 h_s^α, 另一是 $\hat{h}_s^\alpha = (1 + m_s^\alpha) h_s^\alpha$• 从而, 有

$$\hat{H}\hat{H}^T = HH^T + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2) h_s^\alpha (h_s^\alpha)^T \tag{b1}$$

用 $\hat{G}^T$ 右乘式(b1)两端, 得

$$\hat{H}\hat{H}^T\hat{G}^T = HH^T\hat{G}^T + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2) h_s^\alpha (h_s^\alpha)^T \hat{G}^T \tag{b2}$$

再用 $G^T G$ 左乘式(b2)两端, 得

$$G^T G\hat{H}\hat{H}^T\hat{G}^T = G^T GHH^T\hat{G}^T + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2) G^T G h_s^\alpha (h_s^\alpha)^T \hat{G}^T \tag{b3}$$

利用式(2.1)(M_P 逆定义), 得

$$\begin{aligned} G^T G\hat{H}\hat{H}^T\hat{G}^T &= G^T G\hat{H}\hat{G}\hat{H} = G^T G\hat{H}, \\ G^T GHH^T\hat{G}^T &= G^T (H^T G^T)(H^T)(\hat{G}^T\hat{H}^T\hat{G}^T) \\ &= G^T H^T (\hat{H}\hat{G}\hat{G}^T) \\ &= (HG\hat{H})\hat{G}\hat{G}^T \\ &= \hat{H}\hat{G}\hat{G}^T = \hat{G}^T \\ G^T G h_s^\alpha &= g_s^\alpha \end{aligned}$$

所以代入式(b3), 得

$$\hat{G}^T = G^T G\hat{H} - m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2) g_s^\alpha (h_s^\alpha)^T \hat{G}^T \tag{b4}$$

用 $(h_s^\alpha)^T$ 左乘式(b4), 可得

$$(h_s^\alpha)^T \hat{G}^T = \frac{1}{1 + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)(h_s^\alpha)^T g_s^\alpha} (g_s^\alpha)^T \hat{H}$$

将其代回式(b4)即得

$$\hat{G}^T = G^T G\hat{H} - \frac{m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)}{1 + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)(h_s^\alpha)^T g_s^\alpha} g_s^\alpha (g_s^\alpha)^T \hat{H}$$

将上式写成向量方程, 得

$$\hat{g}_s^\alpha = \frac{1 + m_s^\alpha}{1 + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)(h_s^\alpha)^T g_s^\alpha} g_s^\alpha \tag{4.10}$$

$$\hat{g}_r^\beta = g_r^\beta - \frac{m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)(g_s^\alpha)^T h_r^\beta}{1 + m_s^\alpha(m_s^\alpha + 2)(h_s^\alpha)^T g_s^\alpha} g_s^\alpha \qquad (\beta \neq \alpha \text{ 或 } r \neq s) \tag{4.11}$$

这就第二类基本变化公式•

3. 第三类基本变化——支座(约束)的增减

(A) 设在某节点 k 的 x 方向增加一支承,变化后结构因子矩阵 $\hat{H}$ 是从原结构因子矩阵 H 划去 H 中对应该自由度的行而得• 不妨设该行 $h^T(l)$ 为 H 中最后一行,即 $H=\begin{bmatrix}\hat{H}\\ h^T(l)\end{bmatrix}$• 易见,rank$\hat{H}$ = rank$H$ − 1,于是由引理 2(设 $\hat{g}(r)$,$g(r)$ 分别为 $\hat{G}$,G 的第 r 列,$g(l)$ 为 G 最后一列)• 得:

$$\hat{g}(r)=g(r)-\frac{g^T(l)g(r)}{g^T(l)g(l)}g(l)\qquad(r\neq l)\tag{4.12}$$

同样可考虑在某节点 y 方向增加支座• 在节点 k 增加固定支座,变化后因子矩阵 $\hat{H}$ 是从原结构因子矩阵 H 去掉对应 k 点的两行而得,可利用式(4.12)两次求得变化后的逆因子矩阵•

(B) 撤消节点 k 的 x 方向已有的支座• 此时变化后结构因子矩阵 $\hat{H}$ 是由原结构因子矩阵添加一行 $h^T(l)=(c_k^1w_1^1,\ b_k^1w_2^1,\ b_k^1w_3^1,\ c_k^2w_1^2,\ b_k^2w_2^2,\ b_k^2w_3^2,\ \dots,\ c_k^mw_1^m,\ b_k^mw_2^m,\ b_k^mw_3^m)$ 其中 $b^{\alpha k}$ $(c_k^\alpha)(\alpha=1,\dots,m)$ 为

$$b_k^\alpha(c_k^\alpha)=\begin{cases}0 & (\text{节点 } k \text{ 不在单元}\alpha\text{上})\\ b_k(c_k) & (\text{节点 } k \text{ 在单元}\alpha\text{上})\end{cases}$$

显然 rank$\hat{H}$ = rank$H$ + 1,由引理 1(设 $\hat{g}(r)$,$g(r)$ 分别为 $\hat{G}$ 和 G 的第 r 列,并设 $h^T(l)$ 为 $\hat{H}$ 最后一行且 $\hat{g}(l)$ 为 $\hat{G}$ 的最后一列),得

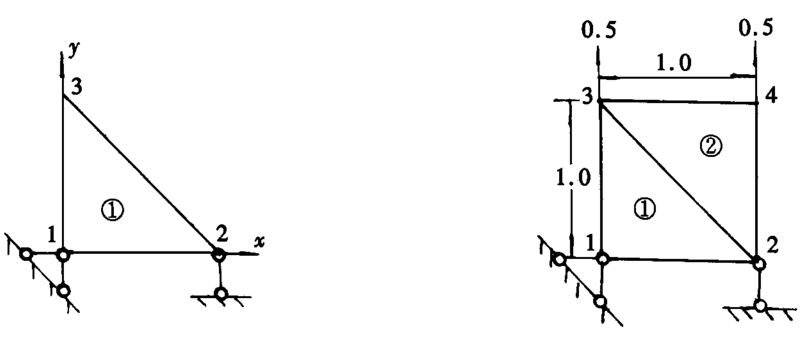
$$\hat{g}(l)=c^+=c^T/cc^T\tag{4.13}$$

$$\hat{g}(r)=g(r)-[h^T(l)g(r)]\hat{g}(l)\qquad(r\neq l)\tag{4.14}$$

其中
$$c=h^T(l)-h^T(l)GH\tag{4.15}$$

§5. 结构分析的 M_P 逆变换法

A. 利用 M_P 逆变换法求静力响应



(a) (b)

图 3

具体方法是:在欲分析的结构中任选一单元作为初始单元,将它的三个自由度静定地支承于基础上,作为初始结构,其逆因子矩阵为式(4.8)• 然后把与它相连的各单元用式(4.1)~(4.3)或(4.5)~(4.9),(4.12)(4.13)(4.14)逐个添上去,再用式(4.12)增添 x 方向或 y 方向的或固定支座,并用式(4.13)(4.14)(4.15)撤掉多余支座• 这样就求出欲分析结构的逆因子矩阵 G• 再用式(3.17)(3.18)(3.19)求得静力响应•

例 1　图 3(b) 所示有限元体系• $E=1.0$, $\nu=0.3$, 单元厚度 $[t_1\ t_2]^T=[1.0, 1.0]$; 计算其静力响应•

据式(3.8), (3.10), (3.11), (3.14), 可得如下数据: 单元①: $b_1=-1$, $b_2=1$, $b_3=0$, $c_1=-1$, $c_2=0$, $c_3=1$, $A=0.5$; 单元②: $b_3=-1$, $b_2=0$, $b_4=1$, $c_3=0$, $c_2=-1$, $c_4=1$, $A=0.5$; $w=w^{-1}=w^2=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{10}{13}}, \sqrt{\frac{10}{13}}, \sqrt{\frac{10}{7}}, \sqrt{\frac{10}{13}}, \sqrt{\frac{10}{13}}, \sqrt{\frac{10}{7}}\right)$•

(a) 取单元①为初始单元, 如图 3(a)• 将单元①有关数据代入式(4.8)得

$$G^1=\begin{bmatrix}(g_1^1)^T\\(g_2^1)^T\\(g_3^1)^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\sqrt{\frac{13}{10}} & 0\\ \sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{13}{10}}\\ \sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{7}{10}}\end{bmatrix}$$

kw

c = 1 , $\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}$ … $\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}$) 其

其中, $\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$ 表示节点 2 的第一个自由度, 以后类似•

(b) 添加单元①• 利用方法 2•

第一步: 将单元②有关数据代入式(4.8), (4.9)得

$$R'=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}\end{matrix},$$

r

^

$$H_3^{-1}=\begin{bmatrix}-2\sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{13}{10}} & -\sqrt{\frac{13}{10}}\\ \sqrt{\frac{7}{10}} & \sqrt{\frac{7}{10}} & \sqrt{\frac{7}{10}}\end{bmatrix}$$

$$GR'=\begin{bmatrix}2\sqrt{\frac{13}{10}} & 2\sqrt{\frac{13}{10}} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2\sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则

的　　支座 $\bar{H}_0^+=\begin{bmatrix}H & H_1^2\\ 0 & H^3\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}G & GR'\\ 0 & H_3^{-1}\end{bmatrix}$

第二步: 去掉 $\bar{H}_0$ 和第四行 $h^T(4)$ 就得 $\bar{H}$•

$$h^T(4)=\frac{1}{2}\left(0, 0, 0, \sqrt{\frac{10}{13}}, 0, 0\right.$$

经过计算:

$$g^T(4)g(1) = -1.4,\quad g^T(4)g(2) = 5.2,$$
$$g^T(4)g(3) = -1.4,\quad g^T(4)g(4) = 0.0625,$$
$$g^T(4)g(5) = 6.6,\quad g^T(4)g(6) = 1.6,$$

由式(4.12)，$\hat{g}(r) = g(r) - \dfrac{g^T(4)g(r)}{g^T(4)g(4)}g(4)$，得

$$G = [\hat{g}(1)\quad \hat{g}(2)\quad \hat{g}(3)\quad \hat{g}(4)\quad \hat{g}(5)\quad \hat{g}(6)]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.175\sqrt{\frac{13}{10}} & 1.35\sqrt{\frac{13}{10}} & 0.175\sqrt{\frac{13}{10}} & 1.175\sqrt{\frac{13}{10}} & -0.175\sqrt{\frac{13}{10}} \\ \sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & 0 \\ 0.825\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.65\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.825\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.825\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.175\sqrt{\frac{7}{10}} \\ -0.175\sqrt{\frac{13}{10}} & 0.65\sqrt{\frac{13}{10}} & -0.175\sqrt{\frac{13}{10}} & 0.825\sqrt{\frac{13}{10}} & 0.175\sqrt{\frac{13}{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{10}} & -\sqrt{\frac{13}{10}} \\ 0.175\sqrt{\frac{7}{10}} & -0.65\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.175\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.175\sqrt{\frac{7}{10}} & 0.825\sqrt{\frac{7}{10}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \binom{2}{1} & \binom{1}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \end{array}$$

(c) 计算静力响应• 对于给定的载荷 $P = [0.5, 0.5]^T$ 由式(3.17), (3.19)得

$$Q_0 = (-0.3,\ 0.0,\ 1.0,\ -0.3,\ 1.0)^T$$
$$\begin{array}{ccccc} \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \end{array},$$

$$\sigma^1 = (0.0,\ 1.0,\ 0.0)^T,\quad \alpha^2 = (0.0,\ 1.0,\ 0.0)^T$$

B. 此法还可用于局部修改

具体方法是: 取欲修改的结构为初始结构，其逆因子矩阵 G_0 可用其他方法求得，($G = G^TGH = K^{-1}H$)，于是可用变化法即式(4.1)~(4.15)进行局部修改•

例 2　计算图 3(a) 所示结构在节点 3 的 y 方向作用一力 $P = 0.5$ 下的位移•

(a) 以图 3(b) 所示结构为初始结构，撤消肢元②即为欲分析的结构• 本例的初始结构的逆因子矩阵可用其他法求得(其值见例 1) •

(b) 利用撤消肢元的方法 1 计算•

第一步: 将初始结构的因子矩阵 H 去掉 h_3^2 而得 H_0，

$$h_3^2 = \frac{1}{2}\left(0,\ \sqrt{\frac{10}{7}},\ 0,\ \sqrt{\frac{10}{7}},\ \sqrt{\frac{10}{7}}\right)^T$$
$$\begin{array}{ccccc} \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \end{array}$$

利用式(4.3)，即 $g_1^\beta = g_r^\beta + \dfrac{(h_3^2)^T g_r^\beta}{1 - (h_3^2)^T g_3^2} g_3^2$ 可得

$$H_0^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{13}{10}} & -\sqrt{\frac{13}{10}} \\ \sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{7}{10}} & 0\ \text{得} & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{13}{10}} & -\sqrt{\frac{13}{10}} \end{bmatrix}$$

第二步, 划去对应单元②的最后两行及对应节点 4 的两列得到一个矩阵即矩阵的左上角• 这就是图 3(a) 所示结构的逆因子矩阵•

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{13}{10}} & 0 \\ \sqrt{\frac{13}{10}} & 0 & -\sqrt{\frac{13}{10}} \\ \sqrt{\frac{7}{10}} & 0 & \sqrt{\frac{7}{10}} \end{bmatrix} \qquad 5$$

(c) 利用式(3. 17) 即可求得在已知力作用下结构的位移•

$$Q = (-\ 0.3,\ 0.0,\ 1.0)^T$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 0.$$

§6. 结 束 语

(1) 本文提出了一个求解有限元体子的静力响应的新方法, 其特点是不须求解线性方程组, 一切只需经过结构变化来实现, 称为 M_P 逆结构变化法•

(2) 本文所有公式都是精确的显示公式, 适于上机运算•

(3) 本法适于有结构变化的分析, 如结构修改, 的重分析, 尤其适用于局部分析•

参 考 文 献

1 Z. S. Liu and S. H. Chen, Reanalysis of static response and its design sensitivity of locally modified structures, Communications in Numerical Methods in Engineering, **8**(11) (1992), 797—800.

2 A. Abu and B. H. V. Topping, Static reanalysis: A review, Journal of Structural Division, ASCE, **113** (1987), 1029—1045.

3 M. P. Bendsφe, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71** (1988), 197—224.

4 B. H. V. Topping, Shape Optimization of skeletal structures: *A Review*, *J. Struct. Eng. ASCE*, **109** (1983), 1933—1951.

5 Uri Kirsch, Optimal topologies of structures, *Appl. Mech. Rev.*, **42**(8) (1989), 223—238.

6 K. I. Majid and D. W. C. Elliott, Forces and deflexions in changing structures, *The Structural Engineer*, **51**(3) (1973).

7 K. I. Majid, M. P. Sake and T. Celik, The theorems of structural variation generalized for rigidly jointed frames, *Proc. Inst. Cir. Eng.*, **65**(2) (1978).

8 荣廷玉、吕安琪, 固体力学有限元体系的结构拓扑变化理论, 固体力学学报, **14**(2) (1993), 124—136.

9 A. Ben_Israel and T. N. E. Greville, *Generalized inverse: Theory and Applications*, John Wiley, New York (1974).

10 蒋正新、施国梁,《矩阵理论及其应用》, 北京航空出版社, 北京 (1988).

11 K. J. Bathe, E. J. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice_Hall (1976).

M_P Inverse Topological Variation Method of Finite Element Structures

Chen Suhuan Liang Ping Han Wanzhi

(Department of Mechanics Jilin University of Technology, Changchun 130025, P. R. China)

Abstract

Using Moore_Penrose inverse theory, a set of formulations for calculating the static responses of a changed finite element structure are given in this paper. Using these formulations in structural analysis may eliminate the need of assembling the stiffness matrix and solving a set of simultaneous equations.

Key words topology modification, structural analysis, M_P inverse, finite element structures