

简支矩形复合材料薄板压缩屈曲后的极限强度

周祝林^①

(蒋咏秋推荐, 1995 年 8 月 1 日收到, 1996 年 6 月 10 日收到修改稿)

摘 要

本文通过 283 块简支矩形玻璃钢薄板的压缩屈曲后极限强度的试验, 证明了复合材料薄板在屈曲失稳后仍能继续承载, 以玻璃钢为例, 可以超过临界载荷的十几倍。文中对薄板的极限强度进行了大挠度和小挠度理论分析, 结合复合材料的能量强度理论, 最后得出有关极限强度计算公式的 C 参数曲线, 对于 45° 方向的薄板与试验结果较符合, 对于经纬向薄板当 $\beta < 0.11$ 时比试验结果略大。文中给出的 C 参数可供产品设计时参考。

关键词 极限强度 复合材料 屈曲 薄板 大挠度

中图分类号 TB332

§ 1. 引 言

众所周知, 金属薄板屈曲失稳后仍能继续承载, 对于有些薄板, 极限强度超过临界应力可达 30 倍^[1]。为了从试验和理论上研究复合材料薄板的承载能力, 我们前后进行了 283 块简支矩形玻璃钢薄板压缩极限强度的试验研究, 证实了玻璃钢薄板屈曲失稳后仍有较大的承载能力。我们所进行过的试验, 极限强度为临界应力的 4~25 倍, 大多数在 10 倍以上。由此可见, 复合材料薄板屈曲后, 同样蕴藏着巨大的承载潜力, 采用极限强度的设计法, 比用临界应力的设计法可以使航天、航空、高速船舶等结构产品重量有较显著的减轻。当然在重复和长期使用时, 还应计及交变载荷和持久强度等因素, 并应适当选用设计应力或安全系数。

本文采用大挠度和小挠度理论, 分别得出理论计算公式。大挠度理论结合复合材料能量强度理论, 得出的理论结果, 对于 45° 方向薄板, 与试验结果较符合, 对于经纬向薄板, $\beta < 0.11$ 时, 理论值比试验值大, 其他与试验值符合。小挠度理论的结果是大挠度理论的一种特例, 接近大挠度理论的极小值, 因此, 也可供较保守的产品设计时使用, 是较安全可靠的。

§ 2. 极限强度的试验结果

我们所进行过的试样长度 a 为 200mm, 宽度 b 有 150、140、120、100、90、80mm 等, 厚度 t 为

① 上海玻璃钢研究所, 上海 200126

0.6~ 1.4mm。用我所自制的试验夹具进行屈曲的极限强度试验,该试验夹具对测薄板屈曲临界载荷较合适^[2],对测薄板屈曲后的极限强度,往往因夹具上的原因,使试样提前破坏,测得的极限强度较低。试验夹具经我们几次修改后,避免了因夹具上原因的过早破坏,结果薄板屈曲后的极限强度大有提高。

薄板压缩屈曲后的破坏现象如图 1 所示。图 1 中(a)、(b)是试验夹具改进前的破坏现象,属于不合理。(c)、(d)是试验夹具改进后的破坏现象。(d)的破坏现象是属于较理想一类。薄板屈曲后破坏时的挠度有(4~ 7) *t*, 挠度最大值的有超过 10mm。破坏过程一般是当载荷达到某载荷值时,在板四角附近挠曲面凹的经纬纤维交叉点处开始发白,然后白点沿一定的角度扩展,载荷再增大就出现微裂纹,也能听见响声,随着裂纹的扩展,响声增大,载荷下降。角度 α 与纵向半波数 *m* 及板尺寸有下列关系:

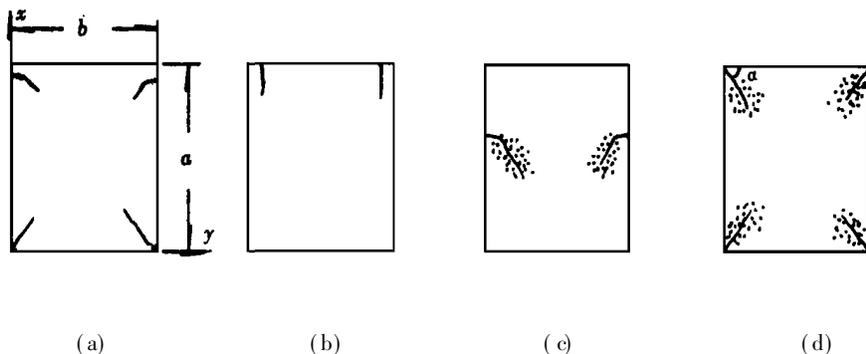


图 1 试样破坏现象

$$\text{tg}\alpha = a/mb \tag{2.1}$$

如图 1(c)所示的是当夹具纵向支承导杆间隙处薄板因屈曲而折断,板边一折断,载荷马上下降,这往往是纵向半波数较多的试样,也是比较合理的一类。

板宽 *b* 为 80~ 90mm,板厚 *t* 为 1.1mm 的矩形薄板,屈曲后的纵向半波数 *m* 多数为 4,个别为 5;板宽 *b* 为 100~ 120mm,板厚 *t* 为 1.0mm 的, *m* 多数为 3,个别为 4;板宽 *b* 为 140~ 150mm,板厚 *t* 为 0.7~ 0.8mm 的矩形薄板, *m* 多数为 2,个别为 3。

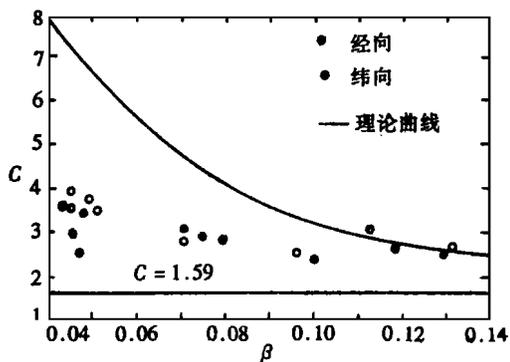


图 2 经纬向矩形薄板压缩极限强度中 C 参数与 β 的关系曲线

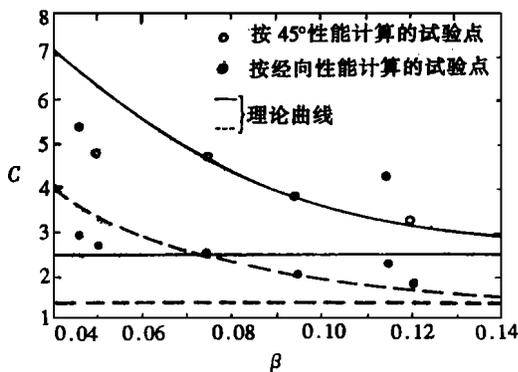


图 3 45°方向矩形薄板压缩极限强度中 C 参数与 β 的关系曲线

试验表明,板出现白点时的载荷约为破坏载荷的 70% 左右。试验结果把薄板的极限载荷表达为卡门的形式^[3]:

$$P_{ult} = C \sqrt{E\sigma_B} t^2 \tag{2.2}$$

式中 E, σ_B 依次为薄板材料在受压方向的压缩弹性模量和强度, C 为与材料性能和板尺寸有关的参数,部分试验结果(改进试验夹具后)列于图 2.3。图中 β 参数为 $\sqrt{E/\sigma_B} t/b$ 。

§ 3. 极限强度的理论分析

矩形薄板压缩屈曲后的承载能力问题,最早由 G. Schrade 提出^[4],他采用能量法提出了四边简支单轴受压板的近似解。B. Friedrich 在文献[5]中报导了金属薄板大挠度的精确解。下面我们用大挠度和小挠度理论分别推导四边简支正交复合材料矩形板的极限强度计算公式。

1. 大挠度理论

采用下列应力函数:

$$\sigma_x = \phi_{,yy}, \quad \sigma_y = \phi_{,xx}, \quad \tau_{xy} = \phi_{,xy} \tag{3.1}$$

则正交各向异性矩形板大挠度理论的平衡方程和协调方程式如下:

$$D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} = t(\phi_{,yy}w_{,xx} - 2\phi_{,xy}w_{,xy} + \phi_{,xx}w_{,yy}) + g \tag{3.2}$$

$$d \frac{1}{ME_2} \phi_{,xxxx} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_1}{E_1} \right) \phi_{,xxyy} + \frac{1}{E_1} \phi_{,yyyy} = (w_{,xy})^2 - (w_{,xx})(w_{,yy}) \tag{3.3}$$

边界条件为:

$$\begin{aligned} x = 0, a: w = 0, w_{,xx} + \mu_2 w_{,yy} &= 0 \\ y = 0, b: w = 0, w_{,yy} + \mu_1 w_{,xx} &= 0 \end{aligned}$$

为了求解板屈曲后的应力状态,作下列假设:(1)板边在整个变形过程中保持直线;(2)板边在平面内可沿支承移动,而不产生剪切力。

于是,设板的挠曲面为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{3.4}$$

为了分析简便起见,以下仅取一级近似,设:

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \tag{3.5}$$

我们曾取式(3.4)中更多项进行求解,计算结果比一级近似的极限强度下降 10%,对于 $\lambda = a/b = 1.3 \sim 2.0$ 的板,降低仅 6% 左右。把式(3.5)代入式(3.3),积分得应力函数为:

$$14\phi = \frac{f^2}{32} \left[E_2 \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + E_1 \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{p_x}{2} y^2 - \frac{p_y}{2} x^2 \right] \tag{3.6}$$

式中后二项是方程通解。

于是,由式(3.1)得板的中面应力为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -E_1 \frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{mf^2}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - p_x \right\} \\ \sigma_y &= -E_2 \frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{f^2}{b} \cos \frac{2m\pi x}{a} - p_y \right\} \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

由布勃诺夫—伽辽金方程可以求出平均压力 p_x :

$$p_x = \sigma_{cr} + \frac{\pi^2 f}{16b^2} \left[E_1 \frac{m^2}{\lambda^2} + E_2 \frac{\lambda^2}{m^2} \right] \quad (3.8)$$

式中 σ_{cr} 是临界应力。把式(3.8)代入式(3.7), 应用最大正应力强度理论, 最后求得 p_x :

$$p_x = \frac{1 + (\mathcal{N}m)^4 \mu_2 / \mu_1}{(\mathcal{N}m)^4 \mu_2 / \mu_1 + 3} \left(\sigma_B + \frac{2\sigma_{cr}}{1 + (\mathcal{N}m)^4 \mu_2 / \mu_1} \right) \quad (3.9)$$

板的极限载荷为:

$$P_{ult} = p_x b t \quad (3.10)$$

从前面所叙的破坏过程知, $m \gg 2$, 所以板的极限载荷为:

$$P_{ult} = \frac{1}{3} (\sigma_B + 2\sigma_{cr}) b t \quad (3.11)$$

板的极限强度为:

$$\sigma_{ult} = \frac{1}{3} (\sigma_B + 2\sigma_{cr}) \quad (3.12)$$

2. 小挠度理论 ϕ

薄板屈曲后应力分布不均匀, 当中部分承受临界应力, 而板的两侧继续增加, 板边达最大值。

对于这种应力分布, 卡门假设板的应力分布如图 4(b) 所示, 把应力集中分布在板两侧的二条 b_e 宽度的板条上, 用如式(3.5)类似的挠曲面, 用能量法最后可求得薄板折合宽度为:

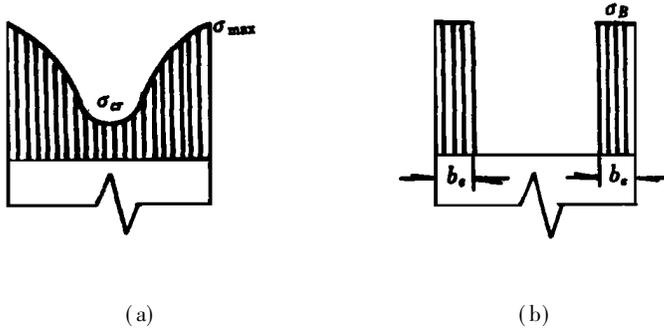


图 4

$$2b_e = t \left\{ \frac{\pi^2 (E_1 E_2)^{1/2} [1 + \mu_2 (E_1 / E_2)^{1/2} + 2G_{12} (1 - \mu_1 \mu_2) / (E_1 E_2)^{1/2}]}{6\sigma_B (1 - \mu_1 \mu_2)} \right\}^{1/2} \quad (3.13)$$

则板的极限载荷为:

$$P_{ult} = 2b_e t \sigma_B \quad (3.14)$$

对于 $E_1 = E_2$, $G_{12}/E_1 = 0.2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.15$ 的正交复合材料薄板, 则得:

$$P_{ult} = 1.59 (E \sigma_B)^{1/2} t^2 \quad (3.15)$$

对于 45° 方向的玻璃钢复合材料, 用试验值 $G_{45}/E_{45} = 0.8$, $\mu_{45} = 0.47$ 代入时, 则板的极限载荷为:

$$P_{ult} = 2.49 (E_{45} \sigma_{45}^B)^{1/2} t^2 \quad (3.16)$$

以我们这批玻璃钢薄板试样为例, 化为以经向性能表示时为:

$$P_{ult} = 1.38 (E \sigma_B)^{1/2} t^2 \quad (3.17)$$

§ 4. 按复合材料能量强度理论的薄板极限强度

从薄板屈曲后的破坏现象可知,较理想的破坏是在挠曲面凹的一面从板角某一点开始发白,也即从纤维交叉点的基体开始开裂,然后沿一定的角度发白区扩大,最后出现肉眼可见的裂纹,同时出现较大的响声。因此,对于矩形薄板屈曲后的强度控制也可以认为与复合材料的强度理论一致,是由基体强度控制^[7]。薄板屈曲后基体处于三向应力状态,由基体控制的强度理论可以求出薄板压缩的极限强度。一方面由于复杂性,另一方面从资料[7]可知,对于平面应力状态,虽由基体控制的强度理论更为精确,但复合材料的能量强度理论也符合试验结果。为分析上的简便,本文暂用复合材料的能量强度理论来进行薄板屈曲后的极限强度的计算,并仅取平面应力状态。

复合材料能量强度理论有几种,如 Tsai Hill, Hoffman, Tsai Wu 等,皆为二次函数强度准则,在平面应力状态下一般表达式为^{[6][8]}:

$$\text{极限} \left\{ \sigma^T \left[F + \left\{ \sigma^T [F] \right\} \sigma \right] \right\} = 1 \quad (4.1)$$

式中:

$$\left\{ \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \left\{ F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & 0 \\ F_{xy} & F_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & F_{ss} \end{bmatrix} \right. \right.$$

对于不同强度理论, $F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{ss}, F_x, F_y$ 是不同的。

根据破坏现象,薄板屈曲后的应力状态必须计及弯曲应力:

$$\left. \begin{aligned} \acute{\sigma}_x &= -\frac{12z}{t^3} [D_{11}w_{,xx} + D_{12}w_{,yy} + 2D_{16}w_{,xy}] \\ \acute{\sigma}_y &= -\frac{12z}{t^3} [D_{12}w_{,xx} + D_{22}w_{,yy} + 2D_{26}w_{,xy}] \\ \acute{\tau}_{xy} &= \frac{12z}{t^3} [D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy} + 2D_{66}w_{,xy}] \end{aligned} \right\}, \text{则} \quad (4.2)$$

与式(3.7)叠加,则为薄板中的应力:

$$\sigma_x = \sigma_x + \acute{\sigma}_x, \sigma_y = \sigma_y + \acute{\sigma}_y, \tau_{xy} = \tau_{xy} + \acute{\tau}_{xy} \quad (4.3)$$

按式(4.1)和(4.3),最后可求得简支矩形复合材料薄板的极限载荷中的 C 系数,计算结果绘在图 2、3 中。从图 2 中可见,对于经纬向薄板,当 $\beta < 0.11$ 时,理论值偏大,当 $\beta \geq 0.11$ 时,理论值与试验值符合。从图 3 中可见,对于 45° 方向薄板,理论与实测值较符合。

§ 5. 讨论与结论

把式(3.10)化为与式(2.2)同样的形式,系数 C 则为:

$$C = (A + B) / \beta \quad (5.1)$$

式中: $A = \frac{1 + (Nm)^4 \mu_2 / \mu_1}{3 + (Nm)^4 \mu_2 / \mu_1}, B = \frac{2\sigma_{cr}}{\sigma_B [3 + (Nm)^4 \mu_2 / \mu_1]}$

当 $m \gg 2$ 时,进一步简化为:

$$C = \frac{1}{3\beta} + \frac{2k}{3} \beta \quad (5.2)$$

式中 k 是矩形薄板屈曲系数, 对于我们这批试样, 经纬向的为 2.54, 45° 方向的为 $6.2^{[2]}$ 。式(5.2)对 β 求导, 最后求得 C 的最小值为: 经纬向的, $C_{\min} = 1.50$, $\beta = 0.444$; 45° 方向的, $C_{\min} = 2.35$, $\beta = 0.284$ 。

当 $\sigma_{cr} = \sigma_B$ 时, 求得相应的 β , C 如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{经纬向的: } \beta_{cr} = 0.625, C_{cr} = 1.59 \\ 45^\circ \text{ 方向: } \beta_{cr} = 0.401, C_{cr} = 2.49 \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

由此可见, 从大挠度理论, 假设 $\sigma_{cr} = \sigma_B$ 时, 求得的 C 值与小挠度理论求得的 C 值一致。

从上述研究可得出下列几点结论:

1. 改进后的试验夹具可以用来进行矩形薄板屈曲后极限强度试验。

2. 大挠度理论, 采用复合材料能量强度理论计算, 其理论的半波数与实测的很符合。经纬向薄板的极限强度, 当 $\beta < 0.11$ 时, 理论值大于试验值, 当 $\beta \geq 0.11$ 时, 理论值与试验值符合。对于 45° 方向, 理论值与试验值较符合, 仅当 $\beta < 0.06$ 时, 理论值偏大。若与金属材料一样, 采用最大正应力强度理论, 理论值均大于试验值。

3. 小挠度理论值是较实用的, 是大挠度理论的一个特例, 与大挠度理论的极小值相差很小, 可供产品设计时使用, 是偏于安全的。试验值均大于小挠度理论值。

4. 当 β 较小时, 大挠度理论应计及三向应力, 有待进一步理论分析。

参 考 文 献

- 1 A. de. Dan, Glass Fibre Reinforced Plastics, Academic Press (1958), 165.
- 2 周祝林, 纤维增强复合材料矩形薄板压缩稳定试验及最优设计, 应用数学和力学, **14**(11) (1993), 1017—1022.
- 3 T. von K urn un, et al., The strength of thin plates in compression, Trans. ASME, **54**, APM 54_5 (1937).
- 4 G. Schrade, Die  berschreitung der Knickgrn ze bei dunnen platten, Proc. 3d. Intern., Congr. Applied Mechanics, Stockhol (1939), 48.
- 5 Bleich Friedrich, Buckling Strength of Metal Structures, McGraw_Hill Book Company, Inc., New York (1952), 12.
- 6 R. M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Company (1975), 71.
- 7 周祝林, 纤维增强复合材料强度理论及应力—应变曲线的转折点, 《第八届全国玻璃钢/复合材料学术年会论文集》, 中国硅酸盐学会玻璃钢学会, 大连 (1989), C_11.
- 8 S. W. Tsai, 《复合材料设计》, 刘方龙、王弘生、徐厚华等译, 科学出版社 (1989), 132.
- 9 S. P. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, McGraw_Hill Book Company Inc. (1961), 360.
- 10 M. Stein, Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression, AIAA. J., **21** (1983), 1729—1735.

Ultimate Strength of Postbuckling for Simply Supported Rectangular Composite Thin Plates under Compression

Zhou Zhulin

(Shanghai FRP Research Institute, Shanghai 200126, P. R. China)

Abstract

It is proved that the ultimate strength of postbuckling for simply supported rectangular composite thin plates under compression is far higher than their buckling stress through the tests of 283 rectangular composite thin laminates in this paper. The ultimate strength of the composite thin plates is studied using large deflection theory and small deflection theory of thin plates. According to the failure criterion of the composites ultimate strength is found finally. It is in accordance with the experimental values for the plates having 45 degrees off axial, and for longitudinal and latitudinal plates, when $\beta < 0.11$, the theoretical values are higher. The coefficient C given in this paper may be referred to in product designing.

Key words compression, failure criterion, composites, postbuckling, ultimate strength