

匀速运动的线源荷载激励下 无限长梁动力分析^{*}

孙 璐^① 邓学钧^①

(陈山林推荐, 1996 年 1 月 3 日收到, 1997 年 8 月 18 日收到修改稿)

摘 要

基于线性叠加原理, 本文首先证明了广义 Duhamel 积分, 把运动线源荷载作用下梁的动力问题转化为求解位置固定的线源荷载作用下梁的动力响应即线源脉冲响应函数。然后, 利用 Laplace 变换和 Fourier 变换求解梁的动力方程, 获得了线源脉冲响应函数, 继而得到了运动线源荷载下梁的动力解答。对动力响应的进一步分析表明, 其最大值总是发生在线源的中心并随荷载运动而运动最后, 定义了运动动力系数。

关键词 广义 Duhamel 积分 积分变换 无限长梁 运动线源荷载 动力响应 运动效应

中图分类号 O343

§ 1. 引 言

弹性地基上无限长梁既可以作为斜拉桥的动力学模型^[1], 也可以看作是承受火车作用的轨道的力学模型, 因而运动荷载作用下无限长梁动力响应的研究引起许多研究人员的关注。如 Timoshenko^[2], Fryba^[3], Steele^[4], 李国豪^[5]等。然而, 我们发现, 在众多的研究中, 大都针对荷载是点源的情况给予分析。实际上不论汽车荷载还是火车轮载, 在空间上都是非点接触, 而是呈线源分布(在一维方向)。并且, 上述研究中, 主要采取的是本征函数叠加(振型分解)的方法获得级数解。对于有限长梁, 这种方法是较为有效的, 然而对无限长梁, 由于其振型有无穷多个, 因而用少数几项级数就不能精确地构造出解, 如此一来, 造成了计算量的增大。

本文则采用积分变换方法和叠加原理处理梁在线源荷载作用下的动力响应问题, 所获得的解答是精确的解析解。

§ 2. 问题的数学模型

首先对地基作如下假定

- (1) 地基符合 Winkler 地基假设, 即地基反力与梁的挠度(竖向位移)成正比;
- (2) 地基存在线性阻尼, 阻尼力与梁的挠度对时间的变化率成正比。

^{*} 国家自然科学基金资助项目

^① 东南大学交通运输工程系, 南京 210096

满足上述两个假定的 Bernoulli-Euler 梁的运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ku + c \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (2.1)$$

其中 $u = u(x, t)$ 为梁的挠度, EI 和 m 分别为梁的抗弯刚度和单位长度质量, k 和 c 分别为地基反应模量和地基阻尼常数, $F(x, t)$ 为梁上所受外力. 对于运动的线源荷载, 它由下式来描述

$$F(x, t; r_0) = P_0 \frac{H[r_0^2 - (x - vt)^2]}{2r_0} H(t) \quad (2.2)$$

其中 $H(\cdot)$ 为 Heaviside 跃阶函数. 而初始位移和初始速度则不妨取为零, 即有初始条件

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.3)$$

方程(2.1)~(2.3)就构成定解问题的完整的数学模型.

§ 3. 广义 Duhamel 积分

从方程(2.1)可知, 梁的动力学系统为线性系统. 考虑无限长梁 $t = 0$ 时刻在坐标原点两侧的 $[-r_0, r_0]$ 范围内受一量值为 P_0 的突加线源荷载, 随后该线源荷载沿 x 轴正向匀速运动, 见图 1. 定义线源荷载中心作用于固定坐标系 xO 的原点 O 处时(此时荷载为 $F\delta(x, t) = [H(r_0^2 - x^2)/2r_0]\delta(t)$) 激发的梁的动力响应为该线性系统的挠度脉冲响应函数, 记为 $h_u(x, t)$. 当荷载运动至 $\tau(0 \leq \tau \leq t)$ 时刻, 瞬时线源荷载中心已不再处于固定坐标系 xO 的原点, 而位于 $x\tau = v\tau$ 处. 为了利用前面定义的荷载中心在 $x = 0$ 处的挠度脉冲响应函数 $h_u(x, t)$ 来表示 τ 时刻的线源脉冲荷载在梁内任意一点 A 处 t 时刻的挠度响应, 必须进行坐标变换.

为此, 设原坐标系为 xO , 新坐标系为 $x'O'$, 其坐标原点 O' 建立在 τ 时刻运动线源荷载中心所处的位置. 设 A 点在旧坐标系中的坐标为 x_a , 在新坐标系中的坐标为 x'_a , 则新旧坐标系之间满足变换(参见图 1)

$$x'_a = x_a - v\tau \quad (3.1)$$

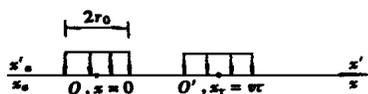


图 1 运动的线源荷载

那么, 在 τ 时刻作用于梁上的瞬时线源荷载激发出的 A 点在 t 时刻的挠度响应应为 $h_u(x'_a, t - \tau)$ 其中 $t - \tau$ 是由于运动耗时造成的时间位移. 根据线性系统叠加原理, 梁上 A 点在 t 时刻由运动线源产生的挠度应由上述 $h_u(x'_a, t - \tau)$ 关于时滞 τ 的积分而得到

$$u(x_a, t) = \int_0^t P_0 h_u(x'_a, t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

A 点选择的任意性使我们可以改写上式成为

$$u(x, t) = \int_0^t P_0 h_u(x - v\tau, t - \tau) d\tau \quad (3.3)$$

我们把(3.3)称为广义 Duhamel 积分. 如果荷载是在时间 $t = -\infty$ (对应于方程(2.2)中不含 $H(t)$) 就已作用在梁上, 那么, 只须把(3.3)式的积分下限从 $0 \rightarrow -\infty$ 即可.

§ 4. 挠度脉冲响应函数

从上面的分析可知, 只须求出了挠度脉冲响应函数 $h_u(x, t)$ (即对应于方程(2.1)右端荷载项

为 $F_{\delta}(x, t) = [H(r_0^2 - x^2)/2r_0] \delta(t)$ 的解), 只须把 $h_u(x, t)$ 中的变量作代换 $x = x - v\tau, t = t - \tau$ 并代入(3.3)式, 即可得到梁内任一点的挠度动力响应。

定义 Laplace 正、逆变换和 Fourier 正、逆变换为

$$\left. \begin{aligned} \text{应} \quad f(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty} f(s) \exp(st) dt \\ f(\omega) &= \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \end{aligned} \right\} \text{为地} \quad (4.1)$$

令 $a^2 = EI/m$, 对方程(2.1) 两边关于时间进行 Laplace 变换, 变换参数为 s , 则有

$$a^2 \frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{k}{m} u + \frac{c}{m} s u + s^2 u = \frac{F_{\delta}(x, s)}{m} \quad (4.3)$$

其中 $u = u(x, s)$ 。这里用到了零初始条件(2.3) 以及 Laplace 变换的微分性质

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t) \Big|_{t=0} \quad \text{冲响} \quad h \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(t) \Big|_{t=0} - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} \end{aligned} \right\} \text{(的线)} \quad (4.5)$$

对方程(4.3) 两边关于空间 x 进行 Fourier 变换, 变换参数为 ω , 得

$$a^2 \omega^4 \bar{u} + \frac{k}{m} \bar{u} + \frac{c}{m} s \bar{u} + s^2 \bar{u} = \frac{\bar{F}_{\delta}(\omega, s)}{m} \quad (4.6)$$

其中 $\bar{u} = \bar{u}(\omega, s)$ 。式(4.6) 是双重变换域中关于挠度的代数方程, 可解得

$$\bar{u}(\omega, s) = \bar{F}_{\delta}(\omega, s) \left[m(a^2 \omega^4 + \frac{k}{m} + \frac{c}{m} s + s^2) \right]^{-1} \quad (4.7)$$

要得到时域中的挠度 $u(x, t)$, 必须对上式进行积分反演。根据 Laplace 变换和 Fourier 变换的线性性质, 先进行哪种逆变换不影响最终结果。对(4.7) 式进行 Laplace 逆变换, 并利用 Laplace 卷积定理得

$$\begin{aligned} u(\omega, t) &= \frac{1}{m} F_{\delta}(\omega, t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ (a^2 \omega^4 + \frac{k}{m} + \frac{c}{m} s + s^2)^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{m} F_{\delta}(\omega, t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \exp(-\alpha t) [q_1(\omega)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot [\exp[q_1(\omega)t] - \exp[-q_1(\omega)t]] \right\} \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t F_{\delta}(\omega, \tau) \exp[-\alpha(t-\tau)] [q_1(\omega)]^{-1} \left\{ \exp[q_1(\omega)(t-\tau)] \right. \\ &\quad \left. - \exp[-q_1(\omega)(t-\tau)] \right\} d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 $* \mathcal{L}$ 表示拉氏卷积算子。

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad q_1(\omega) = \left[\alpha^2 - \frac{k}{m} - a^2 \omega^4 \right]^{1/2}$$

对(4.8) 式两边进行 Fourier 反演, 并运用 Fourier 卷积定理, 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (2\pi m)^{-1} \int_0^t F_{\delta}(x, t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp[-\alpha(t-\tau)] [q_1(\omega)]^{-1} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \exp[q_1(\omega)(t-\tau)] - \exp[-q_1(\omega)(t-\tau)] \right\} d\tau \end{aligned} \quad a$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\mathcal{I}m)^{-1} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F_{\delta}(\xi, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha(t-\tau)] [q_1(\omega)]^{-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \exp[q_1(\omega)(t-\tau)] - \exp[-q_1(\omega)(t-\tau)] \right\} \\
 &\quad \cdot \exp[i\omega(x-\xi)] d\xi d\omega d\tau
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中* F 为傅氏卷积算子。注意到下述积分

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \tau) \exp(-i\omega\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H[r_0^2 - \xi^2]}{2r_0} \delta(\tau) \exp(-i\omega\xi) d\xi \\
 &= \frac{\delta(\tau)}{2r_0} \int_{-r_0}^{r_0} \exp[-i\omega\xi] d\xi = \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \delta(\tau)
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

以及 δ 函数的位移性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) d\tau = f(\tau_0) \quad (4.11)$$

把(4.10)、(4.11)两式代入(4.9), 并利用函数的奇偶性, 经化简整理, 最终可得

$$\begin{aligned}
 h_u(x, t) &= (\mathcal{I}m)^{-1} \exp(-\alpha t) \int_0^{\infty} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \left\{ \exp[q_1(\omega)t] - \exp[-q_1(\omega)t] \right. \\
 &\quad \cdot [q_1(\omega)]^{-1} \exp(i\omega x) d\omega
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

当 $c \leq 2\sqrt{km}$ 时, 利用欧拉公式

$$\exp(+i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \quad (4.13)$$

则(4.12)式还可写为

$$h_u(x, t) = 2(\mathcal{I}m)^{-1} \exp(-\alpha t) \int_0^{\infty} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)t]}{q(\omega)} \exp(i\omega x) d\omega \quad (4.14a)$$

当 $c \geq 2\sqrt{km}$ 时, (4.12)则应为

$$\begin{aligned}
 h_u(x, t) &= 2(\mathcal{I}m)^{-1} \exp(-\alpha t) \left\{ \int_0^{\omega_0} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\text{sh}[q_1(\omega)t]}{q_1(\omega)} \exp(i\omega x) d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)t]}{q(\omega)t} \exp(i\omega x) d\omega \right\}
 \end{aligned} \quad (4.14b)$$

这里 $\text{sh}(\cdot)$ 为双曲正弦函数。当 $c = 2\sqrt{km}$ 时, (4.14a)与(4.14b)相同。为了下文分析的方便起见, 仅以(4.14a)为准。

§ 5. 动力响应精确解

根据广义 Duhamel 积分(3.3), 梁在突加运动的线源荷载(2.2)作用下的动挠度为

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= 2 \int_0^t \int_0^{\infty} P_0 (\mathcal{I}m)^{-1} \exp[-\alpha(t-\tau)] \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)(t-\tau)]}{q(\omega)} \\
 &\quad \cdot \exp[i\omega(x-v\tau)] d\omega d\tau
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

在稳态运动的线源荷载

$$F(x, t) = P_0 \frac{H[r_0^2 - (x-u)^2]}{2r_0} \quad (5.2)$$

作用下, 梁的动挠度则为

$$u(x, t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P_0 \frac{\exp[-\alpha(t-\tau)]}{\mathcal{I}m} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)(t-\tau)]}{q(\omega)}$$

$$\cdot \exp[i\omega(x - v\tau)] d\omega d\tau \tag{5.3}$$

作变量代换 $\theta = t - \tau$, 则上式又可写为

$$u(x, t) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty P_0 (\pi m)^{-1} \exp[-\alpha\theta] \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \exp[i\omega(x - vt + v\theta)] d\omega d\theta \tag{5.4}$$

点源运动荷载作用下梁的动力响应应该是线源运动荷载解(5.4)的极限情况。为此, 对(5.4)两边取极限 $r_0 \rightarrow 0$, 得点源情况下的动挠度为

$$u(x, t) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty P_0 \frac{\exp(-\alpha\theta)}{\pi m} \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \exp[i\omega(x - vt + v\theta)] d\omega d\theta \tag{5.5}$$

这里用到了极限 $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} = 1$ 。(5.5) 与文献[7]一致。

§ 6. 稳态响应极值分析

动挠度的最大值发生在何时何处是工程设计中最关心的问题。下面, 我们利用极值定理来分析稳态动力响应(5.4)式的极值。极值定理指出, 函数 $u(x, t)$ 取极值的必要条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.1}$$

把(5.4)代入(6.1)得

$$\frac{\partial \exp[i\omega(x - vt)]}{\partial x} = 0 \tag{6.2}$$

从上式解得

$$x = vt \tag{6.3}$$

由此可见, $u(x, t)$ 取得极值的条件为 $x = vt$, 并且可以证明这个条件是使(5.4)取最大值的条件。从(6.3)看出, 动挠度的最大值总是发生在线源荷载中心处, 同时还随着荷载的运动而运动。

把(6.3)代入(5.4)即可得到最大动挠度

$$h \quad u(x, t)_{\max} = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty P_0 \frac{\exp(-\alpha\theta)}{\pi m} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \cos \omega v \theta d\omega d\theta \tag{6.4}$$

在此过程中, 用到了欧拉公式并取其实际部

$$\operatorname{Re}[\exp(i\omega v \theta)] = \cos \omega v \theta \tag{6.5}$$

§ 7. 静力解答

当荷载运动速度 $v = 0$ 时, 稳态响应(5.4)就退化为静力解答

$$u(x) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty P_0 \frac{\exp(-\alpha\theta)}{\pi m} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \exp(i\omega x) d\omega d\theta \tag{7.1}$$

注意到下述积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \exp(-\alpha\theta) d\theta = \mathcal{L} \left\{ \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} \right\} \tag{7.2}$$

由 Laplace 变换可以求得

$$I = [\alpha^2 + q^2(\omega)]^{-1} \tag{7.3}$$

把(7.3)代入(7.1), 并利用 $q(\omega)$ 的表达式, 最后可得

$$u(x) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \cdot \frac{\cos \omega x}{EI \omega^4 + k} d\omega \quad (7.4)$$

不难发现,当线源分布半径 $r_0 \rightarrow 0$ 时,上述挠度将成为点源荷载 P_0 引起的梁的静挠度

$$u(x) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{EI \omega^4 + k} d\omega \quad (7.5)$$

对(7.5)利用极值条件(6.1),并类似前文的分析,可知最大静挠度发生在 $x=0$ 处,且最大值为

$$\begin{aligned} u(x)_{\max} &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_0 \frac{\exp(-\alpha\theta)}{\pi m} \frac{\sin r_0 \omega}{r_0 \omega} \frac{\sin[q(\omega)\theta]}{q(\omega)} d\omega d\theta \\ &= \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} (EI \omega^4 + k)^{-1} d\omega \end{aligned} \quad (7.6)$$

§ 8. 运动动力系数

如果我们定义运动动力系数 $K_m(v)$ 是动力挠度最大值(6.4)式与静力挠度最大值(7.6)式的比,即

$$K_m(v) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-1} \exp(-\alpha\theta) \sin r_0 \omega \sin[q(\omega)\theta] \cos \omega v \theta d\omega d\theta}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-1} \exp(-\alpha\theta) \sin r_0 \omega \sin[q(\omega)\theta] d\omega d\theta} \quad (8.1)$$

那么,可以看出,运动动力系数 $K_m(v)$ 是荷载运动速度 v 的函数。并且,动力效应比静力效应只是多了 $\cos \omega v \theta$ 这一项。由于 $|\cos \omega v \theta| \leq 1$, 故始终有 $K_m(v) \leq 1$, 这表明动挠度总是小于静挠度。当然,式(8.1)的分母也可写成(7.6)式的形式,不过按(8.1)这样写可以比较清楚地看出动、静之差别。

§ 9. 结 语

本文首先利用线性叠加原理建立了广义的 Duhamel 积分,然后用积分变换的方法求得了弹性地基上无限长梁的挠度脉冲响应函数,并最终获得了线源运动荷载作用下梁的动挠度的精确解。在分析了动挠度和静挠度的最大值之后,还从理论上提出了反映运动效应的动力系数,可用于结构设计规范之中。

参 考 文 献

- 1 李国豪编著,《桥梁结构稳定与振动》,中国铁道出版社(1993),367—402.
- 2 S. Timoshenko, Method of analysis of statical and dynamical stress in rail, Proc. of the Sec. Inter. Con. for Appl. Mech., Zurich (1926), 407—418.
- 3 L. Fryba, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noordhoff International Publishing (1971), 214—233.
- 4 C. R. Steele, The finite beam with a moving load, J. Appl. Mech., 35(4) (1967), 111—119.
- 5 李国豪,拱桥振动问题,同济大学学报, (3) (1956), 140—148.
- 6 郑小平、王尚文、陈百屏,弹性地基无限长梁动力学问题的一般解,应用数学和力学, 12(7) (1991), 593—597.
- 7 陆振球编著,《经典和现代数学物理方程》,上海科学技术出版社(1992), 394—425.

Dynamic Analysis to Infinite Beam under a Moving Line Load with Uniform Velocity

Sun Lu Deng Xuejun

(Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)

Abstract

Based on the principle of linear superposition, this paper proves generalized Duhamel's integral which reverses moving dynamical load problem to fixed dynamical load problem. Laplace transform and Fourier transform are used to solve partial differential equation of infinite beam. The generalized Duhamel's integral and deflection impulse response function of the beam make it easy for us to obtain final solution of moving line load problem. Deep analyses indicate that the extreme value of dynamic response always lies in the center of the line load and travels with moving load at the same speed. Additionally, the authors also present definition of moving dynamic coefficient which reflects moving effect.

Key words generalized Duhamel's integral, integral transform, infinite beam, dynamic response, moving effect