

半无限及含孔无限平面在各种边界条件下的复位势基本解*

唐寿高^① 曹志远^①

(吴家龙推荐,1996年5月24日收到,1997年5月15日收到修改稿)

摘要

运用 Riemann_Schwarz 对称原理和线弹性力学解的叠加原理建立了半无限平面及含孔无限平面在各种边界条件下基本解的一般求解方法,并分别导出边界上受不同荷载以及边界固定等各种边界条件下的复位势基本解。

关键词 基本解 Riemann_Schwarz 对称原理 叠加原理
中图分类号 O345

§ 1. 引言

边界元法目前已广泛用于地下洞室等结构的线性及非线性分析。如图 1 所示地基与管道耦合问题,常见的边界单元划分表示在图 2 中。比较有限元分析这类问题,边界元已有很大优越性。本文借助文献[1]的方法,在[2](已讨论了自由边界问题)的基础上,运用 Riemann_Schwarz 对称原理和弹性力学解的叠加原理建立半无限平面及含孔无限平面在各种边界条件下基本解的一般求解方

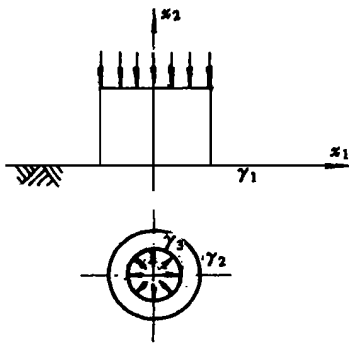


图 1 地基与管道耦合

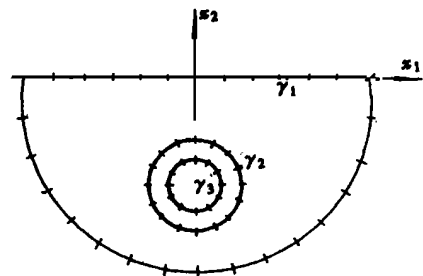


图 2 常规边界元离散

* 固体力学开放研究实验室项目
① 同济大学工程力学与技术系,上海 200092

法,并分别导出了满足各种边界条件的复位势基本解。当用复变边界元^[2]求解同样问题时,由于对不同区域可根据具体边界条件调用相应的复位势基本解,故仅需对管道与地基的接触边界 γ_2 布置单元(图3),引入连续条件就可进行耦合计算。这不仅很大程度地减少了计算机内存用量和运算时间以及输入输出工作量等,还能在孔洞等边界及附近区域内给出精确的计算结果而不存在解的奇异性。因此,本文工作不仅具有理论意义,还具有重要的实际意义。

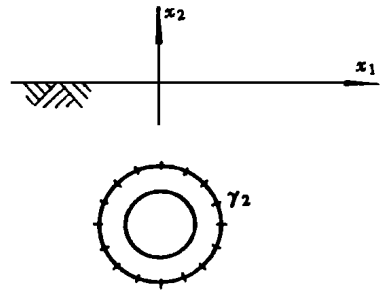


图3 复变边界元离散

§2. 基本定理

Riemann_Schwarz 对称原理,可以按边界为直线和圆弧两种情形表述为如下两个定理^[1]:

定理1 设 γ 为 z 平面上的实轴, $f(z)$ 为在 z 平面被 γ 所分开的上半平面 G^+ 和下半平面 G^- 中的一个,不妨设在 G^+ 上的解析函数,且存在边界值 $f^+(t), t \in \gamma$ 。则 $f(z)$ 为在 G^- 上解析的函数,并且存在边界值 $f^-(t)$, 满足 $\overline{f^+(t)} = f^-(t), t \in \gamma$ 。式中 $\overline{f^+(t)}$ 表示对 $f^+(t)$ 整个表达式取共轭; $f^-(t)$ 表示对 $f^-(t)$ 除 t 外,取共轭。

定理2 设 γ 为半径为 R 的圆, $f(z)$ 为在圆外区域 $G^+ (|z| > R)$ 上的解析函数,且存在边界值 $f^+(t), t \in \gamma$ 。则 $f(z^*)$ 为在 $G^- (|z| < R)$ 上解析的函数,并且存在边界值 $f^-(t^*)$, 满足 $f^+(t) = \overline{f^-(t^*)}$ 。其中 $z^* = R^2/z, t^* = R^2/t, t = Re^{i\theta}$ 。

由上面两个定理可导出如下新的定理^[2]:

定理3 如果给定 $f_0(z)$ 和 $F_0(z)$ 为在 G^+ 解析,并在 $G^+ + \gamma$ 上连续的函数,则存在着在 G^- 解析,在 $G^- + \gamma$ 上连续的函数 $f_1(z)$ 和 $F_1(z)$, 使函数

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z); F(z) = F_0(z) + F_1(z) \quad (\text{a, b})$$

满足边界条件

$$\overline{f(t)} + F(t) = 0 \quad t \in \gamma \quad (\text{c})$$

并且, 1) 当 γ 为直线($\text{Im}z = 0$) 时, $f_1(z) = -F_0(z), F_1(z) = -f_0(z)$;

2) 当 γ 为圆($|z| = R$) 时: $f_1(z) = -\overline{F_0(z^*)}, F_1(z) = -\overline{f_0(z^*)}$ 。

证明 因 $f_0(z)$ 和 $F_0(z)$ 在 G^+ 解析,在 $G^+ + \gamma$ 上连续,所以

1) 当 γ 为直线(实轴) 时,由定理1知 $f_0(z)$ 和 $F_0(z)$ 在 G^- 解析,且存在边界值 $\overline{f_0(t)}$ 及 $\overline{F_0(t)}$, 满足 $\overline{f_0^+(t)} = \overline{f_0(t)}$ 和 $\overline{F_0^+(t)} = \overline{F_0(t)}$ 。于是,当取 $f_1(z) = F_0(z)$ 及 $F_1(z) = -f_0(z)$, 则式(a) 和(b) 的 $f(z)$ 和 $F(z)$ 满足边界条件(c);

2) 当 γ 为圆($|z| = R$) 时,由定理2知 $f_0(z^*)$ 和 $F_0(z^*)$ 在 G^- 解析,且存在边界值 $\overline{f_0(t^*)}$ 和 $\overline{F_0(t^*)}$, 满足 $\overline{f_0^+(t)} = \overline{f_0(t^*)}$ 及 $\overline{F_0^+(t)} = \overline{F_0(t^*)}$ 。于是,当取 $f_1(z) = -\overline{F_0(z^*)}$ 和 $F_1(z) = -\overline{f_0(z^*)}$ 时, 式(a) 和(b) 表示的 $f(z)$ 和 $F(z)$ 满足边界条件(c)。证毕。

§ 3. 二类边值问题的复位势基本解的一般解法

文献[1]给出了二类边值问题边界条件的复位势表示:

第一类边值问题

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\phi(z)} = f_1 + if_2 + \text{const} \quad (3.1)$$

式中 $\varphi(z)$ 和 $\phi(z)$ 为复位势基本解;

$$\varphi'(z) = d\varphi(z)/dz; f_1 + if_2 = i \int_0^s (X_N + iY_N) ds$$

为已知函数, X_N 和 Y_N 为面力分量.

第二类边值问题

$$(3-4\nu)\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\phi(z)} = 2\mu(u + iv) \quad (3.2)$$

对固定边有 $u = v = 0$, 对自由边有 $f_1 = f_2 = 0$. 如为非齐次边界条件, 根据叠加原理, 可先求得齐次边界条件下的解, 再求出非齐次边界条件下的特解, 然后相叠加即得原问题的解. 故为方便, 我们考虑上述两类边值问题为齐次的情况. 此时边界条件(3.1)和(3.2)可统一表达为

$$\varphi_l(z, z_0) - [z \overline{\varphi_l'(z, z_0)} + \overline{\phi_l(z, z_0)}] / K = 0, \quad z \in \gamma \quad (3.3)$$

式中 z 为场点, z_0 为源点; 对第一类边值问题: $K = -1$; 对第二类边值问题: $K = 3-4\nu$ (平面应变). 令

$$F_l(z, z_0) = - [z \overline{\varphi_l'(z, z_0)} + \overline{\phi_l(z, z_0)}] / K \quad (a)$$

则(3.3)式可写成

$$\varphi_l(z, z_0) + \overline{F_l(z, z_0)} = 0 \quad z \in \gamma \quad (3.4)$$

因此, 若

$$\varphi_l(z, z_0) = \varphi_{pl}(z, z_0) + \varphi_{bl}(z, \overline{z_0}); \quad \phi_l(z, z_0) = \phi_{pl}(z, z_0) + \phi_{bl}(z, \overline{z_0}) \quad (3.5)$$

为边值问题(3.4)的解, 则

$$\varphi_l(z, z_0) = \varphi_{pl}(z, z_0) + \varphi_{bl}(z, \overline{z_0}); \quad F_l(z, z_0) = F_{pl}(z, z_0) + F_{bl}(z, \overline{z_0}) \quad (3.6)$$

为边值问题(3.4)的解, 其中

$$\left. \begin{aligned} F_{pl}(z, z_0) &= - [z \overline{\varphi_{pl}'(z, z_0)} + \overline{\phi_{pl}(z, z_0)}] / K \\ F_{bl}(z, \overline{z_0}) &= - [z \overline{\varphi_{bl}'(z, \overline{z_0})} + \overline{\phi_{bl}(z, \overline{z_0})}] / K \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

式中 $\varphi_{pl}(z, z_0)$ 和 $\phi_{pl}(z, z_0)$ 为无限平面在 z_0 点作用单位力时的复位势基本解; $\varphi_{bl}(z, \overline{z_0})$ 和 $\phi_{bl}(z, \overline{z_0})$ 是为满足指定边界条件而叠加的关于边界的映射函数. 于是, 由定理3可得

$$\overline{\varphi_{pl}(z, z_0)} + \overline{\varphi_{bl}(z, \overline{z_0})} + F_{pl}(z, z_0) + F_{bl}(z, \overline{z_0}) = 0, \quad z \in \gamma \quad (3.8)$$

并且, 当 γ 为直线边界 ($\text{Im}z = 0$) 时 $t = \bar{t}$, 将(3.7)代入由定理3得来的(3.8)式:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varphi_{bl}(z, \overline{z_0})} &= - \overline{F_{pl}(z, z_0)} = [z \overline{\varphi_{pl}'(z, z_0)} + \overline{\phi_{pl}(z, z_0)}] / K \\ \phi_{bl}(z, \overline{z_0}) &= K \overline{\varphi_{pl}'(z, z_0)} - \overline{\phi_{pl}(z, z_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

同理, 当 γ 为圆周 ($|z| = R$ 时 $t = t^*$, $z^* = R^2/z$, $z_0^* = R^2/z_0$) 时, 有

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varphi_{bl}(z, z_0^*)} &= - \overline{F_{pl}(z^*, z_0)} = [z \overline{\varphi_{pl}'(z^*, z_0)} + \overline{\phi_{pl}(z^*, z_0)}] / K \\ \phi_{bl}(z, z_0^*) &= K \overline{\varphi_{pl}'(z^*, z_0)} - \overline{\phi_{pl}(z^*, z_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

由此可见, 对于给定的 φ_{pl} 和 ϕ_{pl} , 便可由(3.9) 或(3.10) 求出映射函数 φ_{bl} 和 ϕ_{bl} , 然后再代入(3.5) 式即得所求的复位势基本解。若为非齐次边界条件, 可求出相应的特解, 再与齐次解相叠加即可。对于其它孔形问题, 可先将该孔外域映射成单位圆外域, 利用上述圆孔的基本解求出该单位圆外域的解, 然后再反映射变换得到原问题的解。这样, 含各种孔形的基本解的求解问题即得到解决。

§ 4. 无限平面复位势基本解

为叙述上的完整性, 文献[2] 的自由边界基本解也分别在本文中给出。关于在无限平面中 z_0 点沿 l 方向作用单位力的基本解, 可由文献[1] 的结果就 z 点无位错条件导出:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pl}(z, z_0) &= A_l \ln(z - z_0) + \varphi_{0l}(z) \\ \phi_{pl}(z, z_0) &= B_l \ln(z - z_0) - A_l \bar{z}_0 / (z - z_0) + \phi_{0l}(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中 $A_l = i^{(h-1)} / [8\pi(1-\nu)]$, $B_l = i^{2l}(3-4\nu)A_l$, $i = \sqrt{-1}$; $l = 1, 2$

对平面应力问题, 只须对弹性常数作相应代换。设当沿任意路径 $z \rightarrow \infty$ 时应力趋于零, 并考虑位移对称条件后可得 $\varphi_{0l} = 0$, $\phi_{0l} = \bar{A}_l$ 。于是有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pl}(z, z_0) &= A_l \ln(z - z_0) \\ \phi_{pl}(z, z_0) &= B_l \ln(z - z_0) - A_l \bar{z}_0 / (z - z_0) + \bar{A}_l \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

由(4.2) 式求得的位移和应力即为弹性平面问题的 Kelvin 解。

§ 5. 半无限平面问题的复位势基本解

5.1 自由直边界问题(图4)

将 $K = -1$ 代入(3.9) 式可得相应的映射函数

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= -z \overline{\varphi_{pl}(z, z_0)} - \overline{\phi_{pl}(z, z_0)} \\ \phi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= -\overline{\varphi_{pl}(z, z_0)} - \bar{z} \overline{\phi_{pl}(z, z_0)} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将(4.2) 式代入上式, 并考虑 $z \rightarrow \infty$ 无应力条件及保留极点 z_0 的主部, 经运算后得到^[2]

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= -\bar{B}_l \ln(z - \bar{z}_0) + \bar{A}_l (z - z_0) / (z - \bar{z}_0) + C_l \\ \phi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= -\bar{A}_l \ln(z - \bar{z}_0) + \bar{B}_l z / (z - \bar{z}_0) + \bar{A}_l z (z_0 - \bar{z}_0) / (z - \bar{z}_0)^2 + D_l \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

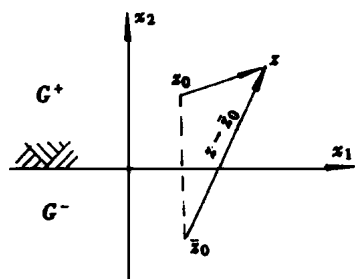


图4 半无限平面直边界自由

式中复常数 C_l 和 D_l 可由位移对称条件定出为 $C_l = A_l$, $D_l = -2B_l - 0.5(1-2\nu)(-i)^l$ 。将(4.2) 式与(5.1) 式代入(3.5) 式即得所求的复位势基本解。此结果与[4] 的结果一样。

5.2 直边界作用分布荷载 $N + iT$

此问题可在上节自由边界基本解上叠加仅在边界上作用 $N + iT$ 而体内无集中源的特解而求得。此特解可按[1] 的方法求出。命 $\Phi(z) = \varphi_s(z)$, $\Psi(z) = \phi_s(z)$, 设区域为上半平面, 则应力边界条件为

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = N - iT \quad (\text{b})$$

对式(b)沿直边界积分,并注意到 $\Psi(t)$ 为在上半平面(G^+)解析,在无穷远点等于零的某函数的边界值,有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N+iT}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\Phi(t)}}{t-z} dt \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\overline{\Phi'(t)}}{t-z} dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{c})$$

其中 z 为上半平面(G^+)内任意点。注意到 $\Phi(t)$ 为在上半平面 G^+ 解析,在无穷远点等于零的某函数 $\Phi(z)$ 的边界值, $\overline{\Phi(t)}$ 和 $t\overline{\Phi'(t)}$ 为在下半平面解析并在无穷远点也为零的函数 $\overline{\Phi(z)}$ 和 $z\overline{\Phi'(z)}$ 的边界值,于是由Cauchy定理可推出(c)式中第二项积分等于 $\Phi(z)$,后两项积分等于零。

从而求得特解为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(z) &= \int \Phi(z) dz = \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N+iT}{t-z} dt \right] dz \\ \psi_s(z) &= \int \Psi(z) dz = \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N-iT}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N+iT}{t-z} t dt \right] dz \end{aligned} \right\} \quad (\text{5.2})$$

对于确定的外荷载,即可通过(5.2)式求得相应的特解,然后与自由直边界复位势基本解(4.2)和(5.1)相叠加即得所求的基本解。下面分别给出直边界受各种荷载时的特解。

5.3 直边界部分边界受法向均布力

当仅在 $-a \leq t \leq a$ 边界上有法向力作用时(图5),由(5.2)式可给出特解为

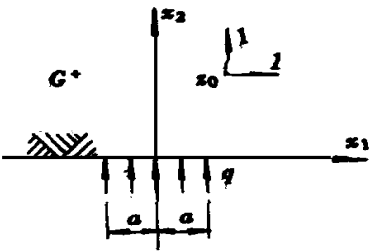


图5 部分直边界受法向均布力

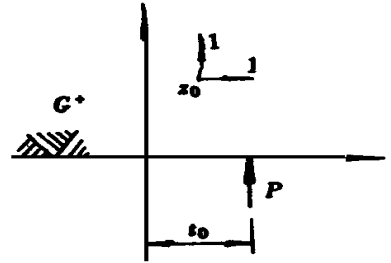


图6 直边界受法向集中力

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(z) &= \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{-p}{t-z} dt \right] dz = \frac{p}{2\pi i} \left[z \ln \frac{z-a}{z+a} - a \ln(z^2 - a^2) + 2a \right] + E_1 \\ \psi_s(z) &= \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{-p}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{-p}{(t-z)^2} t dt \right] dz = \frac{pa}{2\pi i} \ln(z^2 - a^2) + E_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{5.3})$$

其中 E_1, E_2 为任意复常数。

5.4 直边界受法向集中力 P

特别地,当边界上作用集中力 P 时,令(5.3)式中 $p = P/2a$ 并取极限,得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P}{2a} \left[z \ln \frac{z-a}{z+a} - a \ln(z^2 - a^2) + 2a \right] = \frac{-P}{2\pi i} \ln z + E_1 \\ \psi_s(z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow 0} a \frac{P}{2a} \ln(z^2 - a^2) = \frac{P}{2\pi i} \ln z + E_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

考虑一般性,设 P 作用在边界上点 t_0 (图6),则特解为

$$\varphi_s(z) = -\frac{P}{2\pi i} \ln(z - t_0) + E_1, \quad \psi_s(z) = \frac{P}{2\pi i} \ln(z - t_0) + E_2 \quad (\text{5.4})$$

5.5 直边界部分边界受切向均布力

当仅在 $-a \leq t \leq a$ 边界上有切向力 $T = q, N = 0$ 时, 同 5.3 节运算可得特解

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(z) &= \frac{q}{2\pi} \left[z \ln \frac{z-a}{z+a} - a \ln(z^2 - a^2) + 2a \right] + E_1 \\ \psi_s(z) &= \frac{-q}{2\pi} \left[2z \ln \frac{z-a}{z+a} - 3a \ln(z^2 - a^2) + 4a \right] + E_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

5.6 直边界受切向集中力

同 5.4 节, 当在 $t = t_0$ 点作用切向集中力时, 可令(5.5) 式中 $q = Q/2a$, 并取极限得到特解为

$$\varphi_s(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z - t_0) + E_1, \quad \psi_s(z) = \frac{3Q}{2\pi} \ln(z - t_0) + E_2 \quad (5.6)$$

5.7 直边界固定的半无限平面

半无限平面直边界固定时, 取 $K = 3 - 4\nu$ 代入(3.9) 式, 有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= \frac{1}{3-4\nu} \left[z \overline{\varphi_{pl}(z, z_0)} + \overline{\psi_{pl}(z, z_0)} \right] \\ \psi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= \frac{1}{(3-4\nu)} \left[\overline{\varphi_{pl}(z, z_0)} - z \overline{\psi_{pl}(z, z_0)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将(4.2) 式代入(e) 式, 考虑无穷远点无应力条件, 并保留极点 \bar{z}_0 的主部, 可求得映射函数为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= -\overline{A_l} \ln(z - \bar{z}_0) - \frac{\overline{A_l}}{3-4\nu} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + C_l \\ \psi_{bl}(z, \bar{z}_0) &= \frac{\overline{A_l}}{3-4\nu} \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\overline{B_l} z}{z - \bar{z}_0} + \frac{\overline{A_l} z(z_0 - \bar{z}_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} + D_l \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

其中复系数 A_l 和 B_l 同上; C_l 和 D_l 为任意复常数, 由无位错条件可求得 $C_l = -A_l, D_l = -2B_l$. (5.7) 与(4.2) 式相叠加即得满足直边界为固定条件的半无限平面复位势基本解. 此解与 [5] 的结果相同, 但本文的推导要简单得多.

§ 6. 含有圆孔的无限平面复位势基本解

6.1 自由孔边问题(图 7)

在(3.10) 式中令 $K = -1$, 可得

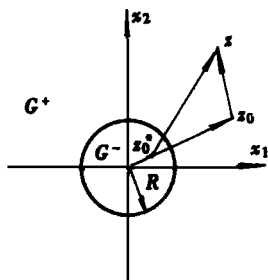


图 7 含圆孔的无限平面

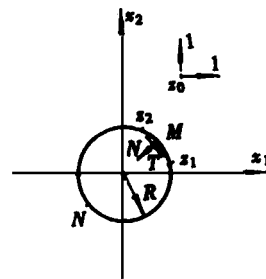


图 8 部分孔边受均布力

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, z_0^*) &= -z \overline{\varphi_{pl}(z^*, z_0)} - \overline{\varphi_{pl}(z^*, z_0)} \\ \psi_{bl}(z, z_0^*) &= -\overline{\varphi_{pl}(z^*, z_0)} - z^* \overline{\varphi'_{bl}(z, z_0^*)} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将(4.2)式代入(a)式,再利用无穷远点无应力条件并保留极点 z_0^* 的主部,就可求得满足孔边自由条件的映射函数:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{bl}(z, z_0^*) &= -\overline{B_l} \ln(z - z_0^*) + \overline{A_l} \frac{(z_0^* - z_0) z_0^*}{(z - z_0^*) z_0} + \overline{B_l} \ln z + C_l \\ \psi_{bl}(z, z_0^*) &= -\overline{A_l} \ln(z - z_0^*) + \frac{\overline{B_l} R^2}{z(z - z_0^*)} + \overline{A_l} \frac{(z_0^* - z_0) z_0^* R^2}{z_0(z - z_0^*)^2} \\ &\quad - \overline{B_l} \frac{R^2}{z^2} + \overline{A_l} \ln z + A_l \frac{z_0^*}{z} + D_l \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

式中 R 为圆孔半径, C_l 和 D_l 可由位移对称条件定出。映射函数(6.1)式与(4.2)式相叠加即给出孔边自由的基本解^[2]。

6.2 孔边受载的无限平面复位势基本解(图8)

与半无限平面分析相同,可将原问题分解为孔边自由的基本解和仅在孔边 $z_1 M z_2$ 部分受载而体内无集中源的特解两部分,而此特解容易应用[1]的方法求得为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(z) &= -\frac{N + iT}{2\pi\mu} \left[(z - z_2) \ln(z_2 - z) - (z - z_1) \ln(z_1 - z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 - 4\nu}{4(1 - \nu)} (z_2 - z_1) \ln z - \frac{z_1 - z_2}{4(1 - \nu)} \ln R \right] \\ \psi_s(z) &= \frac{N - iT}{2\pi\mu} \left[\frac{R^2}{z} \left[\ln \frac{z_2}{z_1} - \ln \frac{z_2 - z}{z_1 - z} + \overline{z_2} \ln(z_2 - z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \overline{z_1} \ln(z_1 - z) - \frac{1}{4(1 - \nu)} (\overline{z_2} - \overline{z_1}) \ln z + \frac{3 - 4\nu}{4(1 - \nu)} (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \ln R \right] \right. \\ &\quad \left. + i \frac{N + iT}{2\pi\mu} \left[\frac{R^2}{z} \ln \frac{z_2 - z}{z_1 - z} + \frac{3 - 4\nu}{4(1 - \nu)} (z_2 - z_1) \frac{R^2}{z} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

特解(6.2)与映射函数(6.1)以及无限平面基本解(4.2)相叠加即得到满足孔边部分边界 $z_1 M z_2$ 受分布荷载边界条件的复位势基本解。其中当 $N \neq 0$ 而 $T = 0$ 时即得该边界上受法向分布力时的基本解。当 $N = 0, T \neq 0$ 时就该部分边界受切向分布力时的基本解。

6.3 圆孔受均布内压力的复位势基本解

令(6.2)式中 $z_1 = z_2, N = -p$,并注意到 $\ln(z_2/z_1) = 2\pi i$,可得特解

$$\varphi_s(z) = 0, \quad \psi_s(z) = -pR^2/z \quad (6.3)$$

此式与(6.1)和(4.2)相叠加即得欲求的基本解。

6.4 圆孔边受均布切向力的复位势基本解

同上节,令(6.2)式中 $N = 0, T = q$,并且仍有 $\ln(z_2/z_1) = 2\pi i$,得

$$\varphi_s(z) = 0, \quad \psi_s(z) = qR^2 i/z \quad (6.4)$$

此式与(6.1)和(4.2)相叠加即得出在域内 z_0 点作用单位力,满足孔边受均布切向力边界条件的复位势基本解。

6.5 圆孔边受集中力的复位势基本解

设在孔边作用集中力 $P + iQ$ (图9),将

$$N + iT = \frac{P + iQ}{|z_2 - z_1|} = \frac{P + iQ}{\sqrt{z_2 - z_1} \sqrt{\overline{z_2 - z_1}}} = \frac{P + iQ}{Ri(z_2 - z_1)} \sqrt{z_1 z_2} \quad (b)$$

代入(6.2),并取极限,有

$$\begin{aligned} \varphi_s(z) &= -\frac{P + iQ}{2\pi i} \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \left[\frac{(z - z_2) \ln(z_2 - z) - (z - z_1) \ln(z_1 - z)}{0 \sqrt{z_2 - z_1} \sqrt{\overline{z_2 - z_1}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{(z_2 - z_1)(K \ln z + \ln R)}{\sqrt{z_2 - z_1} \sqrt{\overline{z_2 - z_1}}} \right] \\ \phi_s(z) &= \frac{P - iQ}{2\pi i} \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \left\{ \frac{[z_2(z_2 - z) - \overline{z_1} \ln(z_1 - z)] \sqrt{z_1 z_2}}{Ri(z_2 - z_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2(\ln z_2 - \ln z_1) \sqrt{z_1 z_2}}{z Ri(z_2 - z_1)} - \frac{R^2[\ln(z_2 - z) - \ln(z_1 - z)] \sqrt{z_1 z_2}}{z Ri(z_2 - z_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\overline{z_2} - \overline{z_1}) \sqrt{z_1 z_2} (\ln z + K \ln R)}{4(1-\nu) Ri(z_2 - z_1)} \right\} + \frac{P + iQ}{2\pi} \\ &= \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \left\{ \frac{R^2 \sqrt{z_1 z_2} [\ln(z_2 - z) - \ln(z_1 - z)]}{z Ri(z_2 - z_1)} + \frac{(3 - 4\nu) \sqrt{z_1 z_2} R^2}{4(1-\nu) Ri z^2} \right\} \end{aligned} \quad (c)$$

注意到 $\overline{z_1} = R^2/z_1$, $\overline{z_2} = R^2/z_2$, $z^* = R^2/z$, 并令 $\varepsilon = z_2 - z_1 \rightarrow 0$, 可得到

$$\begin{aligned} \varphi_s(z) &= -\frac{P + iQ}{2\pi R} z_1 \left[\ln(z_1 - z) - \frac{3 - 4\nu}{4(1-\nu)} \ln z + 1 - \frac{\ln R}{4(1-\nu)} \right] \\ \phi_s(z) &= \frac{P - iQ}{2\pi R} z_1 \left[\ln(z_1 - z) - \frac{4 \ln z}{4(1-\nu)} - \frac{3 - 4\nu}{4(1-\nu)} \ln R \right] \\ &\quad - \frac{P + iQ}{2\pi R} z_1 z^* \left[\frac{1}{z_1 - z} + \frac{3 - 4\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{z} \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

将特解(6.5)与映射函数(6.1)和(4.2)式相叠加即得出域内 z_0 点作用单位力,满足孔边 z_1 点受集中荷载的复位势基本解. 特别地,(6.5)式中若 $Q = 0, P \neq 0$,则叠加后得孔边作用法向集中力的基本解;若该式中 $Q \neq 0, P = 0$,则可得孔边作用切向集中力的基本解.

6.6 孔边固定的无限平面复位势基本解

将 $K = 3 - 4\nu$ 代入(3.10)式,得

$$\begin{aligned} \varphi_{bl}(z, z_0^*) &= \frac{1}{3 - 4\nu} \left[z \overline{\varphi_{pl}(z^*, z_0)} + \varphi_{pl}(z^*, z_0) \right] \\ \phi_{bl}(z, z_0^*) &= (3 - 4\nu) Q \overline{\varphi_{pl}(z^*, z_0)} - z^* \overline{\varphi_{bl}(z, z_0^*)} \end{aligned} \quad (d)$$

将(4.2)式的 φ_{pl} 和 ϕ_{pl} 代入上式,利用 $z \rightarrow \infty$ 无应力条件,并保留极点 z_0^* 的主部,即可求得映射函数为

$$\begin{aligned} \varphi_{bl}(z, z_0^*) &= -A_l \ln(z - z_0^*) - \frac{\overline{A_l} (z_0^* - z_0) z_0^*}{3 - 4\nu (z - z_0^*) z_0^*} + A_l \ln z + C_l \\ \phi_{bl}(z, z_0^*) &= -B_l \ln(z - z_0^*) + \frac{A_l R^2}{z(z - z_0^*)} + \frac{\overline{A_l} (z_0^* - z_0) z_0^* R^2}{(3 - 4\nu) z (z - z_0^*)^2 z_0^*} \\ &\quad + \frac{A_l R^2}{z^2} + B_l \ln z - \frac{A_l}{3 - 4\nu} \frac{\overline{z_0^*}}{z} + D_l \end{aligned} \quad (6.6)$$

其中复系数 A_l, B_l 同上, C_l 和 D_l 为任意复常数.(6.6)式与(6.1)式和(4.2)式相叠加即得满足固

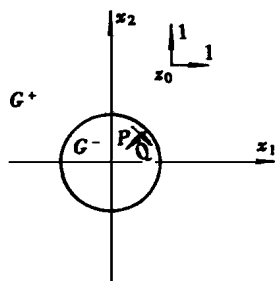


图9 孔边受集中力

定孔边条件的无限平面复位势基本解•

§ 7. 小 结

提出了基于 Riemann_Schwarz 对称原理及弹性力学解的叠加原理的复位势基本解的一般求解方法,且方法十分简单• 所导出的各种基本解当用于边界元解题时,对于半无限平面在直边界上无论受到集中力还是分布力或者是边界固定,均无需对该边界离散,并且在该边界及附近区域可给出精确的数值解• 同样,当求解开圆孔的问题时,也无论孔边荷载形式如何或是孔边固定情形,也不必对该孔边进行单元分割,并且边界元数值解可直接收敛到该边界•

上述基本解可以组合灵活应用• 例如对耦合力学问题,根据不同区域选用相应的基本解(例如图3),从而只需对极少部分边界作边界单元离散(最少只需一个单元),即可作线性或非线性的耦合力学分析,极大程度地提高了传统边界元的计算效率• 因而,本文工作具有重要的实际意义•

参 考 文 献

- 1 《数学弹性力学的几个基本问题》,赵惠元译,北京:科学出版社(1958), 10.
- 2 黄弘量、唐寿高,复变函数论的边界元法,同济大学学报,14(2)(1986),179—191.
- 3 《解析函数论》,北京:高等教育出版社(1957),135.
- 4 J. C. F. Telles and C. A. Brebbia, Boundary element solution for half plane problems, Int. J. Solid Structures, 17(2)(1981), 1149—1158.
- 5 林武中等,求弹性半平面问题基本解的一个新方法,应用力学学报,7(2)(1990),103—108.

Complex Fundamental Solutions for Semi_Infinite Plane and Infinite Plane with Hole under Various Boundary Conditions

Tang Shougao Cao Zhiyuan

(Department of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract

A general method of finding the complex fundamental solutions for semi_infinite plane and infinite plane with hole under various boundary conditions has been established by using Riemann_Schwarz symmetric principle and superposition principle of the solutions of elasticity. More than ten solutions have been derived respectively.

Key words fundamental solution, Riemann_Schwarz symmetric principle, superposition principle