应用数学和力学, 第 19 卷 第 4 期(1998 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

线性等式约束系统广义 Riccati 代数方程的求解*

邓子辰[1] 钟万勰[2]

(1996 年 6 月 18 日收到, 1997 年 12 月 17 日收到修改稿)

摘 要

本文基于定常离散 LQ 控制问题的动力学方程、价值泛函及系统的约束方程, 根据极大值原理, 给出了线性等式约束系统下的广义 Riccati 方程, 进而对上述方程进行了深入的探讨, 并给出了相应的数值例题•

关键词 约束方程 广义 Riccati 代数方程 线性二次控制
中图分类号 O232

§1. 引 言

计算结构力学与最优控制之间的模拟理论, 是基于结构力学中的串连式子结构理论与最优控制中的线性二次(LQ)控制问题而建立的[1]• 基于上述理论在处理控制问题时, 已显示出了结构力学方法的有效性, 但目前的工作大多限于系统无约束的情况[2, 3], 对于系统受约束的情况讨论得甚少• 文献[4]曾对于线性二次控制问题, 基于广义变分原理, 给出了系统解存在的条件, 为受约束控制系统的求解从理论上提供了依据• 文献[5]借助于结构力学中的子结构消元法和混合能概念, 对线性约束线性二次控制问题进行了求解, 本文则基于定常离散 LQ 控制问题的动力学方程、价值泛函和约束方程, 根据极大值原理, 给出系统的广义 Riccati 方程, 并证明本文的结果与文献[5]中的结果是一致的•

§2. 基 本 方 程

定常离散 LQ 控制问题的动力学方程及相应的价值泛函分别为

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k, \qquad x_0 = \text{给定向量} \tag{2.1}$$

$$J = \frac{1}{2} x_f^T S_f x_f + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \tag{2.2}$$

其中, $x_k \in R^n$ 为状态向量; $u_k \in R^m$ 为控制向量; k 为离散的时间步; $\Phi \in R^{n\times n}$; $\Gamma \in R^{n\times m}$; $R \in$

* 国家自然科学青年基金资助项目
① 西北工业大学 15 系, 西安 710072
② 大连理工大学工程力学研究所, 大连 116023

$R^{m\times m}$为对称正定阵; $Q\in R^{n\times n}$为对称非负阵•

设线性约束方程为

$$C(x_k, u_k) = C_x x_k + C_u u_k = 0 \tag{2.3}$$

价值泛函分别对方程(2.1)和(2.3)引入 Lagrange 乘子向量 λ_{k+1}和 γ_k, 并根据驻值原理求出 u_k 后, 可进一步得到

$$x_{k+1} = \Phi x_k - G\lambda_{k+1} - C_\lambda^T \gamma_k \tag{2.4}$$

$$\lambda_k = Qx_k + \Phi^T\lambda_{k+1} + C_x^T\gamma_k \tag{2.5}$$

$$C_x x_k - C_\lambda\lambda_{k+1} - C_\gamma\gamma_k = 0 \tag{2.6}$$

其中, $G = \Gamma R^{-1}\Gamma^T,\ C_\lambda = C_u R^{-1}\Gamma^T,\ C_\gamma = C_u R^{-1} C_u^T$

§3. 广义 Riccati 代数方程的建立

由式(2.6)可得

$$\gamma_k = C_\gamma^{-1}(C_x x_k - C_\lambda\lambda_{k+1}) \tag{3.1}$$

代入式(2.4)和(2.5), 得

$$x_{k+1} = (\Phi - C_\lambda^T C_\gamma^{-1} C_x) x_k - (G - C_\lambda^T C_\gamma^{-1} C_\lambda)\lambda_{k+1} \tag{3.2}$$

$$\lambda_k = (Q + C_x^T C_\gamma^{-1} C_x) x_k + (\Phi - C_\lambda^T C_\gamma^{-1} C_\lambda)\lambda_{k+1} \tag{3.3}$$

进一步可表示为

$$x_{k+1} = \Phi_e x_k - G_e\lambda_{k+1} \tag{3.4}$$

$$\lambda_k = Q_e x_k + \Phi_e^T\lambda_{k+1} \tag{3.5}$$

其中, $Q_e = Q + C_x^T C_\gamma^{-1} C_x,\ G_e = G - C_\lambda^T C_\gamma^{-1} C_\lambda,\ \Phi_e = \Phi - C_\lambda^T C_\gamma^{-1} C_\lambda$

方程(3.4)和(3.5)与无约束 LQ 控制问题的对偶方程在形式上相同, 只是这时用 Q_e, G_e 和 Φ_e 分别代替了 Q, G 和 Φ•

由于是定常系统, 有关系式 $\lambda_k = Sx_k$, S 为解, 于是可得:

$$x_{k+1} = (I + G_e S)\Phi_e x_k \tag{3.6}$$

$$\lambda_k = (S^{-1} + G_e)^{-1}\Phi_e x_k \tag{3.7}$$

而关于 S 的 Riccati 代数方程, 由一般线性二次控制理论, 得[6, 7]

$$Q_e - S + \Phi_e^T(S^{-1} + G_e)^{-1}\Phi_e = 0 \tag{3.8}$$

这就是线性等式约束系统下的 Riccati 代数方程, 称为广义 Riccati 代数方程•

以上是对于关系式 $\lambda = Sx$ 建立的 Riccati 方程, 为时间正向的• 对于逆向时间的关系式 $x_k = -T\lambda_k$, 同样可得关于 T 的广义 Riccati 代数方程, 为

$$G_e - T + \Phi_e(T^{-1} + Q_e)^{-1}\Phi_e^T = 0 \tag{3.9}$$

§4. 广义 Riccati 代数方程的进一步讨论

上节我们得到了关于 S 和 T 的二个广义 Riccati 方程(3.8)和(3.9), 在文献[5]中, 利用结构力学中的子结构概念和混合能算式, 曾得到另一形式的 Riccati 方程, 为

$$\left.\begin{aligned} &Q - S + \Phi^T(S^{-1} + G)^{-1}\Phi + C_1^T D_1^{-1} C_1 = 0 \\ &D_1 = C_\gamma - C_\lambda(S^{-1} + G)^{-1} C_\lambda^T \\ &C_1 = C_x - C_\lambda(S^{-1} + G)^{-1}\Phi \end{aligned}\right\} s \tag{4.1}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&G-T+\Phi(T^{-1}+Q)^{-1}\Phi^T-C_2^TD_2^{-1}C_2=0\\&D_2=C_\gamma+C_x(T^{-1}+Q)^{-1}C_x^T\\&C_2=C_\lambda+C_x(T^{-1}+Q)^{-1}\Phi^T\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

本节将证明方程(3.8)及(3.9)和方程(4.1)及(4.2)是一致的• 为此,先给出下列矩阵求逆引理•

引理　设 A, B, C, D 为有适当尺度的矩阵或向量,则存在

$$(A^{-1}+B-C^TD^{-1}C)^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}-(A^{-1}+B)^{-1}C^T[C(A^{-1}+B)^{-1}C^T-D]^{-1}(A^{-1}+B)^{-1}$$

在下面的证明中,用到关于 D_1, C_1, D_2, C_2 的关系式,并利用了上述引理•

方程(3.8)成为

$$\begin{aligned}&Q-S+C_x^TC_\gamma^{-1}C_x+(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)^T(S^{-1}+G-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_\lambda)^{-1}(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)\\&=Q-S+C_x^TC_\gamma^{-1}C_x+\Phi^T(S^{-1}+G)^{-1}\Phi-C_x^TC_\gamma^{-1}(C_x-C_1)-(C_x-C_1)^TC_\gamma^{-1}C_x\\&\quad+C_x^TC_\gamma^{-1}(C_\gamma-D_1)C_\gamma^{-1}C_x+(C_x-C_1)^TD_1^{-1}(C_x-C_1)+C_x^TC_\gamma^{-1}(C_\gamma-D_1)D_1^{-1}(C_x\\&\quad-C_1)-(C_x-C_1)^TD_1^{-1}(C_\gamma-D_1)C_\gamma^{-1}C_x+C_x^TC_\gamma^{-1}(C_\gamma-D_1)D_1^{-1}(C_\gamma-D_1)C_\gamma^{-1}C_x\\&=Q-S+C_1^TD_1^{-1}C_1+\Phi^T(S^{-1}+G)\Phi=0\end{aligned}\tag{4.3}$$

推导中有许多项可相互抵消,这就证明了方程(3.8)和方程(4.1)是一致的•

现讨论方程(3.9),其可写为

$$G-T-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_\lambda+(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)(T^{-1}+Q+C_x^TC_\gamma^{-1}C_x)^{-1}(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)^T=0\tag{4.4}$$

利用上述引理

$$\begin{aligned}&G-T-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_\lambda+(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)\Big\{(T^{-1}+Q)^{-1}-(T^{-1}+Q)^{-1}C_x^T\\&\qquad\bullet[C_x(T^{-1}+Q)^{-1}C_x+C_\gamma^{-1}]^{-1}C_x(T^{-1}+Q)^{-1}\Big\}(\Phi-C_\lambda^TC_\gamma^{-1}C_x)^T\\&\quad=0\end{aligned}\tag{4.5}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}&G-T+\Phi(T^{-1}+Q)^{-1}\Phi^T-C_\lambda^TD_2^{-1}C_\lambda-(C_2-C_\lambda)^TD_2^{-1}C_\lambda\\&\quad-C_\lambda^TD_2^{-1}(C_2-C_\lambda)-(C_2-C_\lambda)^TD_2^{-1}(C_2-C_\lambda)\\&\quad=G-T+\Phi(T^{-1}+Q)^{-1}\Phi^T-C_2^TD_2^{-1}C_2\\&\quad=0\end{aligned}\tag{4.6}$$

这同样证明了方程(3.9)和方程(4.2)是一致的•

§5. 例　　题

已知 $n=4,\ m=3$

$$Q=\begin{bmatrix}1.0&&&\\&0.0&&\\&&\overset{*2}{0.0}&\\&&&0.0\end{bmatrix},\qquad\Phi=\begin{bmatrix}0.5&1.0&0.0&0.0\\0.0&0.0&1.0&0.0\\0.0&0.0&0.0&1.0\\0.0&0.0&0.0&0.0\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1.0&&\\&1.0&\\&&1.0\end{bmatrix},\qquad\Gamma=\begin{bmatrix}0.0&0.0&0.0\\0.0&0.0&0.0\\0.0&0.0&0.0\\0.0&0.0&2.0\end{bmatrix}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad C_u = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.2 \\ 4.0 & 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

先确定 Q_e, G_e 和 Φ_e, 为

$$Q_e = \begin{bmatrix} 1.8667 & 3.4000 & -0.0333 & -0.0167 \\ 3.4000 & 15.3004 & 0.3500 & 0.1750 \\ -0.0333 & 0.3500 & 1.2416 & 0.1208 \\ -0.0167 & 0.1750 & 0.1208 & 1.0604 \end{bmatrix}$$

$$G_e = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 3.3334 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.5000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.6666 \end{bmatrix}$$

这样便可求得

$$S = \begin{bmatrix} 1.6461 & 1.2921 & 2.5526 & 1.1025 \\ 1.2921 & 2.5842 & 5.1052 & 2.2050 \\ 2.5526 & 5.1052 & 22.0274 & 6.0687 \\ 1.1025 & 2.2050 & 6.0687 & 21.0064 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.0706 & -0.0775 & -0.0438 & -0.1826 \\ -0.0775 & 1.2290 & -1.1378 & -0.1051 \\ -0.0438 & -1.1378 & 3.1703 & -0.2206 \\ -0.1826 & -0.1051 & -0.2206 & 3.8757 \end{bmatrix}$$

而 $C_u = C_x = 0$ 时

$$S = \begin{bmatrix} 1.3289 & 0.6578 & 0.3157 & 0.1313 \\ 0.6578 & 1.3157 & 0.6313 & 0.2626 \\ 0.3157 & 0.6313 & 1.2626 & 0.5252 \\ 0.1313 & 0.2626 & 0.5252 & 1.0505 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4.2019 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

通过大量计算, 我们发现, 存在约束时, S 阵比无约束时增加, 而 T 则减小• 上述规律也可从理论上给予证明•

§6. 结 束 语

本文基于定常离散 LQ 控制问题, 给出了一套处理受约束线性控制系统的简便方法, 它为处理连续时间系统、非定常系统、非线性系统等受约束时的情况, 打下了基础; 同时为研究无约束系统问

题,提供了一定的依据•

参 考 文 献

1 钟万勰、欧阳华江、邓子辰,《计算结构力学与最优控制》,大连理工大学出版社 (1993)•

2 钟万勰、钟翔翔,LQ控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用,自动化学报,**18**(3) (1992),325—331.

3 邓子辰,多重子结构法在非线性控制系统中的应用,力学学报,**26**(2) (1994),239—246•

4 邓子辰、钟万勰,受约束控制系统中变分原理的应用,应用数学和力学,**15**(6) (1994),489—494•

5 邓子辰,连续时间线性等式约束LQ控制问题的混合能消元法,自动化学报,**20**(5) (1994),600—604.

6 解学书,《最优控制理论与应用》,清华大学出版社 (1986)•

7 R.F. Stengel, *Stochastic Optimal Control*, John Wiley & Sons (1986).

The Solution for the Generalized Riccati Algebraic Equations of Linear Equality Constraint System

Deng Zichen

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

Zhong Wanxie

(Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R. China)

Abstract

Based on the dynamic equation, the performance functional and the system constraint equation of time_invariant discrete LQ control problem, the generalized Riccati equations of linear equality constraint system are obtained according to the minimum principle, then a deep discussion about the above equations is given, and finally the numerical example is shown in this paper.

Key words constraint equation, generalized Riccati algebraic equation, linear quadratic control