应用数学和力学, 第 19 卷 第 4 期(1998 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于一类一阶脉冲微分系统的初值问题

张石生　　王　凡

(1996 年 4 月 26 日收到, 1997 年 10 月 6 日收到修改稿)

摘　要

本文的目的是利用单调迭代方法研究一类一阶脉冲微分系统的初值问题的最小最大拟解的存在性及其迭代逼近程序

关键词　一阶脉冲微分系统　最小最大拟解　迭代程序

中图分类号　O175

1 引　　言

脉冲微分方程理论是微分方程的一个新的重要分支(见[1])　文[2]讨论了一阶微分系统初值问题解的存在性　本文考察一阶脉冲微分系统初值问题

$$\left.\begin{aligned} &u = f(t, u, u), && t \quad t_i \\ &u|_{t=t_i} = I_i(u(t_i)) && (i = 1, 2, \quad, m) \\ &u(0) = x_0 \end{aligned}\right\} \tag{1 1}$$

其中 $f = (f_1, f_2, \quad, f_k)$　$C[J \quad R^k \quad R^k, R^k]$, $J = [0, T]$ $(T > 0)$, $0 < t_1 < t_2 < \quad < t_m < T$, I_i $C[R^k, R^k]$, $u|_{t=t_i} = u(t_i^+) - u(t_i^-)$, $i = 1, 2, \quad, m$ 和 x_0　R^k　我们利用单调迭代方法研究初值问题(1 1) 的最小最大拟解的存在性, 并给出了收敛于最小和最大拟解的迭代程序　作为直接推论, 我们还得到了一阶脉冲微分系统初值问题

$$\left.\begin{aligned} &u = f(t, u), && t \quad t_i \\ &u|_{t=t_i} = I_i(u(t_i)) && (i = 1, 2, \quad, m) \\ &u(0) = x_0 \end{aligned}\right\} \tag{1 2}$$

最小解和最大解的存在性及收敛于最小解和最大解的迭代程序

2 预 备 知 识

令 $PC[J, R^k] = \Big\{ u BJ \quad R^k | u(t)$ 在 $t \quad t_i$ 时连续, 在 $t = t_i$ 时左连续且右极限 $u(t_i^+)$ 存在, $i = 1, 2, \quad, m \Big\}$　设 R^k 中的半序　　由锥 $P = \Big\{ x = (x_1, x_2, \quad, x_k) | x_i \quad 0, i = 1, 2, \quad, k \Big\}$ 导出,

国家自然自然科学基金资助课题
四川大学数学系, 成都 610064
江苏南通师范专科学校数学系, 江苏南通 226007

对 $u = u(t), v = v(t) \quad PC[J, R^k]$, 若 $u(t) \quad v(t), t \quad J$, 则记 $u \quad v$ 记 $J_0 = [0, t_1], J_1 = (t_1, t_2], \quad , J_{m-1} = (t_{m-1}, t_m], J_m = (t_m, T], J = J \setminus \{t_1, t_2, \quad , t_m\}$

称 $v, w \quad PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$ 是初值问题(1 1) 的一对拟解, 如果

$$\begin{cases} v = f(t, v, w), t \quad t_i, \quad v|_{t=t_i} = I_i(v(t_i)), i = 1, 2, \quad , m, v(0) = x_0 \\ w = f(t, w, v), t \quad t_i, \quad w|_{t=t_i} = I_i(w(t_i)), i = 1, 2, \quad , m, w(0) = x_0 \end{cases}$$

称 $x \quad PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$ 为初值问题(1 2) 的解, 如果 x 满足(1 2) 中各等式

称 $v, w \quad PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$ 为初值问题(1 1) 的一对拟下上解, 如果

$$\begin{cases} v \quad f(t, v, w), t \quad t_i, \quad v|_{t=t_i} \quad I_i(v(t_i)), i = 1, 2, \quad , m, v(0) \quad x_0 \\ w \quad f(t, w, v), t \quad t_i, \quad w|_{t=t_i} \quad I_i(w(t_i)), i = 1, 2, \quad , m, w(0) \quad x_0 \end{cases}$$

3 主 要 结 果

定理 设 $f \quad C[J \quad R^k \quad R^k, R^k]$, 如果下列假设成立:

(H_1) 存在 $v_0, w_0 \quad PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$, 使 $v_0 \quad w_0$, 并且 v_0, w_0 是初值问题(1 1) 的一对拟下上解, 即

$$\left.\begin{aligned} & v_0 \quad f(t, v_0, w_0), \qquad t \quad t_i \\ & v_0|_{t=t_i} \quad I_i(v_0(t_i)) \qquad (i = 1, 2, \quad , m) \\ & v_0(0) \quad x_0, \end{aligned}\right\} \tag{3 1}$$

$$\left.\begin{aligned} & w_0 \quad f(t, w_0, v_0), \qquad t \quad t_i \\ & w_0|_{t=t_i} \quad I_i(w_0(t_i)) \qquad (i = 1, 2, \quad , m) \\ & w_0(0) \quad x_0 \quad / \end{aligned}\right\} \tag{3 2}$$

(H_2) 存在 $k \quad k$ 非负矩阵 M, 使对任给 $x_1, x_2, y_1, y_2 \quad [v_0, w_0] = \{u \quad PC[J, R^k] | v_0 \quad u \quad w_0$, $x_1 \quad x_2, y_2 \quad y_1$, 都有

$$f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1) \quad - M(x_2 - x_1);$$

(H_3) $I_i(x) \quad I_i(y), \quad v_0(t_i) \quad x \quad y \quad w_0(t_i) \ (i = 1, 2, \quad , m)$

则初值问题(1 1) 在 $[v_0, w_0]$ 中存在最小最大拟解对 x^*, y^*, 即若 $v, w \quad [v_0, w_0]$ 是(1 1) 的一对拟解, 则必有 $x^* \quad v, w \quad y^*$ 更进一步, 以 v_0, w_0 为初始元, 作迭代序列

$$\left.\begin{aligned} v_n(t) = {} & e^{-Mt}\Big[x_0 + \int_0^t (f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s)) + Mv_{n-1}(s)) e^{Ms} ds \\ & + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)] I_i(v_{n-1}(t_i)) \\ w_n(t) = {} & e^{-Mt}\Big[x_0 + \int_0^t (f(s, w_{n-1}(s), v_{n-1}(s)) + Mw_{n-1}(s)) e^{Ms} ds \\ & + \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)] I_i(w_{n-1}(t_i)) \qquad (i = 1, 2, \quad) \end{aligned}\right\} \tag{3 3}$$

则 $\{v_n(t)\}$ 和 $\{w_n(t)\}$ 在 J 上分别一致收敛于 $x^*(t)$ 和 $y^*(t)$, 且满足 6a

$$v_0 \quad v_1 \quad v_n \quad x^* \quad y^* \quad w_n \quad w_1 \quad w_0 \tag{3 4}$$

证 对任何给定的 $g, h \quad [v_0, w_0] \quad PC[J, R^k]$, 考虑一阶线性脉冲微分系统初值问题

$$\left.\begin{array}{ll} u = f(t, g, h) - M(u - g), & t \quad t_i \\ u\,|_{t=t_i} = I_i(g(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m) \\ u(0) = x_0 & \end{array}\right\} \qquad (3\ 5)$$

直接验证可知,

$$u(t) \text{ PC } e^{-Mt}\left[x_0 + \int_0^t (f(s, g(s), h(s)) + Mg(s))e^{Ms}ds\right]$$

$$+ \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)]\,I_i(g(t_i))$$

是初值问题(3 5)在 $PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$ 中的唯一解 对 $g, h \quad [v_0, w_0]$, 令

$$A(g, h)(t) = e^{-Mt}\left[x_0 + \int_0^t (f(s, g(s), h(s)) + Mg(s))e^{Ms}ds\right]$$

$$+ \sum_{0<t_i<t} \exp[-M(t - t_i)]\,I_i(g(t_i)) \qquad t \quad J \qquad (3\ 6)$$

则 A 映 $[v_0, w_0] \quad [v_0, w_0]$ 入 $PC[J, R^k] \quad C^1[J, R^k]$, 且迭代序列(3 3)可以表为

$$v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \quad) \qquad (3\ 7)$$

对 $g_1, g_2, h_1, h_2 \quad [v_0, w_0]$, $g_1 \quad g_2, h_2 \quad h_1$ 由假设(H_2), 有

$$f(t, g_1(t), h_1(t)) + Mg_1(t) \quad f(t, g_2(t), h_2(t)) + Mg_2(t), \qquad t \quad J$$

又由假设(H_3), 有

$$I_i(g_1(t_i)) \quad I_i(g_2(t_i)) \qquad (i = 1, 2, \quad , m)$$

因而由(3 6)知, $A(g_1, h_1)(t) \quad A(g_2, h_2)(t)$, $t \quad J$, 即有

$$A(g_1, h_1) \quad A(g_2, h_2) \qquad g_1, g_2, h_1, h_2 \quad [v_0, w_0], g_1 \quad g_2, h_2 \quad h_1 \qquad (3\ 8)$$

现证

$$v_0 \quad v_1 = A(v_0, w_0), \quad A(w_0, v_0) = w_1 \quad w_0 \qquad (3\ 9)$$

记 $= v_1 - v_0$, 由(3 6)知 v_1 满足

$$\left\{\begin{array}{ll} v_1 = f(t, v_0, w_0) - M(v_1 - v_0), & t \quad t_i \\ v_1|_{t=t_i} = I_i(v_0(t_i)) & (i = 1, 2, \quad , m) \\ v_1(0) = x_0 & \end{array}\right.$$

故由(3 1)式可得

$$\left.\begin{array}{l} = v_1 - v_0 \\ \quad f(t, v_0, w_0) - M(v_1 - v_0) - f(t, v_0, w_0) \\ = - M \ , \qquad t \quad t_i \\ |_{t=t_i} = \quad v_1|_{t=t_1} - \quad v_0|_{t=t_i} \\ \qquad I_i(v_0(t_i)) - I_i(v_0(t_i)) = \qquad (i = 1, 2, \quad , m) \\ (0) = v_1(0) - v_0(0) \quad x_0 - x_0 = \end{array}\right\} \qquad (3\ 10)$$

从而

$$(\ e^{Mt}) = (\ + M\ )e^{Mt} \quad , \qquad t \quad t_i, (i = 1, 2, \quad , m) \qquad (3\ 11)$$

于是

$$(t) \quad (0)e^{-Mt} \quad , \qquad t \quad J_0$$

特别地, (t_1) , 因而由(3 10)式, 有

$$(t_1^+) = (t_1) + \quad |_{t=t_1}$$

因此, 由(3 11) 式可得

$$(t) \quad (t_1^{+})\exp[- M(t- t_1)] \quad , \quad t \quad J_1$$

类似地, 我们可得 (t) , t J_2, , t J_m 于是 (t) , t J, 即 v_0 $v_1= A(v_0, w_0)$ 同理可证 $A(w_0, v_0)= w_1$ w_0 由 v_0 w_0, (3 8) 和(3 9) 式, 利用归纳法易推得

$$v_0 \quad v_1 \quad\quad v_n \quad\quad w_n \quad\quad w_1 \quad w_0 \tag{3 12}$$

下证$\{v_n\}$ 在J 上一致收敛于某个x^*, $PC[J, R^k]$ 由假设(H_2), 有

$$f(t, v_0, w_0)+ Mv_0 \quad f(t, v_{n-1}, w_{n-1})+ Mv_{n-1}$$
$$f(t, w_0, v_0)+ Mw_0$$

因而有

$$f(t, v_{n-1}(t), w_{n-1}(t))+ Mv_{n-1}(t)$$
$$2(\quad f(t, v_0(t), w_0(t))+ Mv_0(t) \quad + \quad f(t, w_0(t), v_0(t))+ Mw_0(t) \quad) \tag{3 13}$$

又由假设(H_3) 和(3 12) 式, 有 $I_i(v_0(t_i))$ $I_i(v_n(t_i))$ $I_i(w_0(t_i))$ ($i= 1, 2,$ $, m$), 因而有

$$I_i(v_n(t_i)) \quad 2(\quad I_i(v_0(t_i)) \quad + \quad I_i(w_0(t_i)) \quad) \quad (i = 1, 2, \quad , m) \tag{3 14}$$

(3 13) 和(3 14) 式中 是 R^k 中的范数

令 $S_0=\{v_n|_{J_0}\}$, 因为 v_n 在J_0 上连续, 所以 S_0 是 $C[J_0, R^k]$ 的子集 由(3 7) 和(3 6) 式知

$$v_n(t) = e^{-Mt}\left[x_0 + {}_0^t(f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))+ Mv_{n-1}(s))e^{Ms}ds\right], \quad t \quad J_0$$

因而由(3 13) 式知 S_0 是一致有界的 对任给 $_1$, $_2$ J_0, $_1$ $_2$, 有

$$v_n(\ _2)- v_n(\ _1) = (e^{-M\ _2}- e^{-M\ _1})x_0$$
$$+ (e^{-M\ _2}- e^{-M\ _1}) {}_0^{\ _1}(f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))+ Mv_{n-1}(s))e^{Ms}ds$$
$$+ e^{-M\ _2} {}_{\ _1}^{\ _2}(f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))+ Mv_{n-1}(s))e^{Ms}ds$$

从而由矩阵 e^{-Mt} 的连续性和 (3 13), 易知 S_0 是等度连续的 由 Arzela_Ascoli 定理知 S_0 是 $C[J_0, R^k]$中的列紧集 从而 S_0 中有子列在J_0 上一致收敛于某个 x_0^* $C[J_0, R^k]$, 再由(3 12) 式知 S_0 在 J_0 上一致收敛于 x_0^*

令 $S_1=\{v_n|_{J_1}\}$, 因为 $v_n(t_1^{+})$ ($n= 1, 2,$)存在, 所以 S_1 可以看作是 $C[J_1, R^k]$的子集, 其中 $J_1= [t_1, t_2]$ 由(3 7) 和(3 6) 式知

$$v_n(t) \equiv e^{-Mt}\left[x_0 + {}_0^t(f(s, v_{n-1}(s), w_{n-1}(s))+ Mv_{n-1}(s))e^{Ms}ds\right]$$
$$+ e^{-M(t-t_1)}I_1(v_{n-1}(t_1)), \quad t \quad J_1$$

从而由(3 13) 和(3 14) 式易知 S_1 是一致有界的, 又由 e^{-Mt} 的连续性和(3 13)、(3 14) 式易证 S_1 是等度连续的, 因而 S_1 在 J_1 上一致收敛于某个 x_1^* $C[J_1, R^k]$ 类似地, 可证$\{v_n|_{J_2}\}$ 在 $J_2= [t_2, t_3]$ 上一致收敛于某个 x_2^* $C[J_2, R^k]$, , $\{v_n|_{J_m}\}$ 在$J_m = [t_m, T]$ 上一致收敛于某个 x_m^* $C[J_m, R^k]$ 令 $x^*(t) = x_i^*(t)$, t J_i, 则 x^* $PC[J, R^k]$, 且$\{v_n\}$ 在J 上一致收敛于x^*

同理可证$\{w_n\}$ 在J 上一致收敛于某个y^* $PC[J, R^k]$ 由(3 12) 式知(3 4) 式成立

由(3 13) 式和 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{n} {}_0^t(f(s, v_n(s), w_n(s))+ Mv_n(s))e^{Ms}ds$$

$$= \int_0^t (f(s, x^*(s), y^*(s)) + Mx^*(s))e^{Ms}ds$$

又因 $I_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是连续的, 故由(3.7)和(3.16)式可得

$$x^*(t) = e^{-Mt}\Big[x_0 + \int_0^t (f(s, x^*(s), y^*(s)) + Mx^*(s))e^{Ms}ds + \sum_{0<t_i<t} e^{-M(t-t_i)} I_i(x^*(t_i))\Big] = A(x^*, y^*)(t)$$

于是 $x^* \in C^1[J', R^k]$, 且有

$$\begin{cases} x^{*\prime} = f(t, x^*, y^*), & t \neq t_i \\ \Delta x^*|_{t=t_i} = I_i(x^*(t_i)) & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x^*(0) = x_0 \end{cases}$$

同理可得 $y^* \in C^1[J', R^k]$, 且满足

$$\begin{cases} y^{*\prime} = f(t, y^*, x^*), & t \neq t_i \\ \Delta y^*|_{t=t_i} = I_i(y^*(t_i)) & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ y^*(0) = x_0 \end{cases}$$

即 x^*, y^* 是初值问题(1.1)的一对拟解。

设 $v, w \in [v_0, w_0]$ 是初值问题(1.1)的一对拟解, 则由(3.16)式知

$$v = A(v, w), \quad w = A(w, v)$$

由 $v_0 \le v, w \le w_0$ 和(3.18)式可得 $v_1 = A(v_0, w_0) \le A(v, w) = v, w = A(w, v) \le A(w_0, v_0) = w_1$, 利用归纳法易得

$$v_n \le v, \quad w \le w_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由于 $\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 在 J 上分别一致收敛于 x^* 和 y^*, 令 $n \to \infty$ 取极限, 即得 $x^* \le v, w \le y^*$, 即 x^*, y^* 是初值问题(1.1)的最小最大拟解对。

推论　设 $f \in C[J \times R^k, R^k]$, 如果下列假设成立:

(i) 存在 $v_0, w_0 \in PC[J, R^k] \cap C^1[J', R^k]$, 使 $v_0 \le w_0$, 并且 v_0, w_0 分别是初值问题(1.2)的下、上解, 即

$$\begin{cases} v_0' \le f(t, v_0), & t \neq t_i \\ \Delta v_0|_{t=t_i} \le I_i(v_0(t_i)) & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ v_0(0) \le x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0' \ge f(t, w_0), & t \neq t_i \\ \Delta w_0|_{t=t_i} \ge I_i(w_0(t_i)) & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ w_0(0) \ge x_0 \end{cases}$$

(ii) 存在 $k \times k$ 非负矩阵 M, 使对任给 $x_1, x_2 \in [v_0, w_0]$, $x_1 \le x_2$, 有

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) \ge -M(x_2 - x_1);$$

(iii) $I_i(x) \le I_i(y)$, $\quad \forall v_0(t_i) \le x \le y \le w_0(t_i) \; (i = 1, 2, \cdots, m)$。

则初值问题(1.2)在 $[v_0, w_0]$ 中必有最小解 x^* 和最大解 y^*, 并且以 v_0, w_0 为初始元, 作迭代序列

$$v_n(t) = e^{-Mt}\Big[x_0 + \int_0^t (f(s, v_{n-1}(s)) + Mv_{n-1}(s))e^{Ms}ds\Big]$$

$$+\sum_{0<t_i<t} e^{-M(t-t_i)} I_i(v_{n-1}(t_i))$$

$$w_n(t) = e^{-Mt}\Big[x_0 + \int_0^t (f(s, w_{n-1}(s)) + Mw_{n-1}(s))e^{Ms}ds$$

$$+\sum_{0<t_i<t} e^{-M(t-t_i)} I_i(w_{n-1}(t_i)) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

则$\{v_n(t)\}$ 和$\{w_n(t)\}$ 在 J 上分别一致收敛于$x^*(t)$和 $y^*(t)$, 且有

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n \le \cdots \le x^* \le y^* \le \cdots \le w_n \le \cdots \le w_1 \le w_0$$

参 考 文 献

1 V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Sci. Publishing Co., Singapore (1989).

2 M. Khavanin and V. Lakshmikantham, The method of mixed monotone and first order differential systems, Nonlinear Anal. TMA, 10(9) (1986), 873–877.

3 L. H. Erbe and X. Liu, Quasi_solutions of nonlinear impulsive equations in abstract cones, Appl. Anal., 34(2) (1989), 231–250.

On the Initial Value Problems of First Order Impulsive Differential Systems

Zhang Shisheng
(Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China)

Wang Fan
(Nantong Teacher's College, Nantong, Jiangshu 226007, P. R. China)

Abstract

The purpose of this paper is to study the existence and iterative approximation of minimax quasi_solutions for a class of initial value problems of first order impulsive differential systems by using monotone iterative methods.

Key words first order impulsive differential systems, minimax quasi_solution, iterative process