应用数学和力学, 第 19 卷 第 5 期(1998 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

变质量非线性非完整系统相对运动动力学方程的积分方法*

陈向炜[①] 罗绍凯[①]

(林宗池推荐, 1996 年 5 月 17 日收到)

摘 要

本文给出积分变质量非线性非完整系统相对于非惯性系动力学方程的梯度法, 单分量法和场方法• 首先, 将这类问题的动力学方程表示为正则形式和场方程形式; 然后, 分别用梯度法, 单分量法和场方法积分相应常质量完整系统相对于惯性系的动力学方程, 并加上非完整约束对初始条件的限制而得到变质量非线性非完整系统相对于非惯性系动力学方程的解•

关键词 分析力学 非线性非完整约束 变质量 非惯性系 梯度法
中图分类号 O316, O313

§ 1. 引 言

随着近代科学技术的发展, 对复杂系统动力学的研究越来越重要• 用分析力学的理论与方法研究变质量力学系统的相对运动动力学, 不仅可在表现形式上达到统一, 而且对复杂系统显示出优越性• ÅÂÎ¶ . 在 60 年代初给出完整系统相对运动的动力学方程[1]• 近年来, 我国学者相继给出了多种形式的变质量非完整系统相对运动的动力学方程[2~4]• 但是, 这些研究均限于方程的建立, 对方程本身的研究甚少, 对这些复杂系统动力学方程的积分问题尚未解决•

著名的 Hamilton_Jacobi 方法是积分完整保守系统动力学方程的非常有效的工具• 然而, 这一传统方法在积分非保守系统和非完整系统的方程时, 却遇到了严重困难, 并有极苛刻的限制[5, 6]• 为解决这一问题, 必须寻求新的积分手段• 1979~ 1984 年间, 南斯拉夫学者 Vujanovic B. 相继提出了积分完整非保守力学系统的梯度法[7], 单分量法[8] 和场方法[9]; 最近, 梅凤翔教授把这些方法用于积分非完整非保守系统的动力学方程[10~12], 具有重要的理论与实际意义•

本文给出变质量非线性非完整系统相对运动动力学方程的积分方法• 首先, 将变质量非线性非完整系统相对运动的动力学方程表为正则方程和场方程形式, 并作为完整系统来考虑; 其次, 分别用梯度法, 单分量法和场方法积分相应常质量完整系统相对于惯性系的动力

* 河南省自然科学基金资助课题
① 商丘师专物理系, 河南商丘 476000

学方程; 最后, 将非完整约束对初始条件的限制加上去, 便得原来变质量非完整系统相对运动的解•

§ 2. 变质量非线性非完整系统相对运动的场方程和正则方程

研究复杂变质量系统的相对运动动力学, 假定复杂系统由一个大质量刚体(载体)和 N 个变质量质点(被载系统)组成, 设第 i 个质点的质量 m_i, 质量微元 dm_i 分离或并入 m_i 时的相对速度 $\boldsymbol{u}_i$, 载体极点 0 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 以及载体的角速度 ω 为时间 t 的已知函数, 不受被载系统运动的影响• 被载系统在动坐标系中的位形由广义坐标 $q_s (s=1, \cdots, n)$ 确定, 系统的运动受有 g 个理想 ¶Ä-¶³ 型非完整约束

$$f_\beta(q_s, \dot q_s, t) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g;\ s = 1, \cdots, n) \tag{2.1}$$

则此变质量非线性非完整系统相对于非惯性系的动力学方程可表为[2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D}{Dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(V^0 + V^\omega) + Q_s^{\dot\omega} + \Gamma_s + \Psi_s + \Lambda_s \\ &\Psi_s = \sum_{i=1}^N \dot m_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \text{和} \Lambda_s = \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s} \quad (s = 1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中, T_r 为系统相对运动的动能, λ_β 为待定乘子, 而 Q_s, V^0, V^ω, $Q_s^{\dot\omega}$, Γ_s, Ψ_s, Λ_s 分别依次为广义力、均匀力场势能、惯性离心势能、广义回旋惯性力、广义陀螺力、广义反推力和广义约束反力, $\frac{D}{D(\cdots)}$, $\frac{\partial}{\partial(\cdots)}$ 分别表示把质量视作常量时的导数记号和偏导数记号•

把 Q_s 分为有势和非势力两部分, 即

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} + Q_s', \qquad V = V(q_k) \tag{2.3}$$

构造变质量系统相对运动的 Lagrange 函数 $L_r = T_r - V - V^0 - V^\omega$, 则方程(2.2)可写为

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} = Q_s' + Q_s^{\dot\omega} + \Gamma_s + \Psi_s + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.4}$$

1. 方程(2.4)的场方程形式

方程(2.4)左端为 q, $\dot q$, $\ddot q$, t 的函数, 且对 $\ddot q$ 是线性的; 右端为 q, $\dot q$, t 的函数• 方程(2.4)可以写为显形式

$$\begin{aligned} \ddot q_l + \sum_{s=1}^n A_{sl}^{-1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n [k, m; s] \dot q_k \dot q_m = \sum_{s=1}^n A_{sl}^{-1} \Bigg\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k} \right) \dot q_k + Q_s' + Q_s^{\dot\omega} \\ + \Gamma_s + \Psi_s + \Lambda_s - \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial L_{r0}}{\partial q_s} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot q_k + \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s} \Bigg\} \quad (l = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中, $L_r = L_{r2} + L_{r1} + L_{r0}$, 而

$$L_{r2} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n A_{sk} \dot q_s \dot q_k, \qquad L_{r1} = \sum_{s=1}^n B_s \dot q_s$$

$$[k, m; s] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m} + \frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k} - \frac{\partial A_{km}}{\partial q_s} \right)$$

而 L_{r0} 为广义速度的零次项• 将方程(2.1)对时间 t 求导数, 得

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l} \dot q_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q_l} \ddot q_l \right) + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} = 0 \qquad (\gamma = 1, \cdots, g) \tag{2.6}$$

把(2.5)代入(2.6), 有

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot q_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot q_k\dot q_m\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot q_k+Q_s'+Q_s^{\omega}+\Gamma_s+\Psi_s+\Lambda_s+\frac{\partial T_r}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot q_k\right\}=0$$

$$(\gamma=1,\cdots,g) \qquad (2.7)$$

由方程(2.7)解得

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(q_s,\dot q_s,t) \qquad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (2.8)$$

将(2.8)代入方程(2.5), 便可解得广义加速度

$$\ddot q_s=g_s(q_k,\dot q_k,t) \qquad (s,k=1,\cdots,n) \qquad (2.9)$$

令

$$x_s=q_s,\quad x_{n+k}=\dot q_s \qquad (s,k=1,\cdots,n) \qquad (2.10)$$

则(2.9)表为场方程的形式

$$\dot x_k=x_{n+k},\quad \dot x_{n+k}=g_k(x_s,x_{n+s},t) \qquad (k,s=1,\cdots,n) \qquad (2.11)$$

而条件(2.1)成为

$$f_\beta(x_s,x_{n+s},t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (2.12)$$

方程(2.11)可作为某一个有条件的常质量完整系统相对于惯性系的运动问题来研究, 当运动的初始条件满足(2.12)式时, 即

$$f_\beta(x_{s_0},x_{n+s,0},0)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \qquad (2.13)$$

2. 方程(2.4)的正则形式

对于一般的动力学系统, 总可以满足

$$\det\left|\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot q_s\partial \dot q_k}\right|\neq 0$$

而且广义约束反力可以表为

$$\Lambda_s=\Lambda_s(q_k,\dot q_k,t) \qquad (s=1,\cdots,n)$$

那么, 方程(2.4)可以写为正则形式. 引入 Hamilton 函数

$$H_r(q,p,t)=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot q_s-L_r \qquad (2.14)$$

其中

$$p_s=\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s} \qquad (2.15)$$

为广义动量, 由方程(2.4)可以得到

$$\dot p_s=-\frac{\partial H_r}{\partial q_s}+Q_s'+Q_s^{\varepsilon}+\Gamma_s+\Psi_s+\Lambda_s$$

$$\dot q_s=\frac{\partial H_r}{\partial p_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (2.16)$$

其中(…)为(…)中 $\dot q_k$ 用 q,p,t 替代所得表达式.

方程(2.16)可以作为一个有条件的常质量完整系统相对于惯性系的运动问题来研究, 该问题具有 n 个自由度, 其 Hamilton 函数为 H_r, 而广义力为 $(Q_s'+Q_s^{\omega}+\Gamma_s+\Psi_s+\Lambda_s)$. 当运动

的初始条件 q_{s_0}, p_{s_0} 满足约束(2.1)时, 即

$$f_\beta(q_{s_0}, p_{s_0}, 0) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g;\ s = 1, \cdots, n) \tag{2.17}$$

则方程(2.16)给出原变质量非线性非完整系统的相对运动动力学方程的解• 方程(2.11)给出原变质量非线性非完整系统的相对运动动力学方程(2.1)、(2.4)的解•

§3. 变质量非线性非完整系统相对运动的梯度法

方法一

假设广义动量 p_s 可表为所有广义坐标 q_k 和时间 t 的函数, 即

$$p_s = \phi_s(q_k, t) \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.1}$$

于是有

$$\dot{p}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{3.2}$$

把(3.2)代入(2.16)中第一组方程并利用第二组方程, 得到一组拟线性偏微分方程

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_s}{\partial q_k}\frac{H_r}{p_k} + \frac{H_r}{q_s} - Q_s' - Q_s^{\circ} - \Gamma_s - \Psi_s - \Lambda_s = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.3}$$

(3.3)称为基本偏微分方程, 利用(3.1), 方程组(3.3)的完全解表为

$$p_s = \phi_s(q_k, t, C_A) \qquad (s, k = 1, \cdots, n;\ A - 1, \cdots, 2n) \tag{3.4}$$

考虑到初始条件

$$q_s(0) = q_{s_0}, \quad p_s(0) = p_{s_0} \tag{3.5}$$

将(3.5)代入(3.4), 可得 $C_{n+1}, \cdots, C_{2n}$ 用 q_{s_0}, p_{s_0} 和 C_s 表示, 于是

$$p_s = \phi_s(q_k, t, q_{s0}, p_{s0}, C_k) \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.6}$$

这样我们可以建立如下定理

定理 1 如方程组

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial C_k} = 0 \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.7}$$

对于 $q_1, \cdots, q_n$ 是一次代数方程组, 且在 t, q_s 的定义域内都有

$$\det\left(\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial C_k \partial q_l}\right) \neq 0 \qquad (k, l = 1, \cdots, n) \tag{3.8}$$

成立, 那么联合方程(3.7)和(3.6)便可确定初值问题(2.7)、(3.5)的解• 把约束方程限制(2.8)加到相应完整系统的解(3.6)、(3.7)上, 就得到变质量非线性非完整系统相对运动的解•

证明 将(3.7)对时间 t 求导数, 得

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial t \partial C_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial q_l \partial C_k}\dot{q}_l = 0 \tag{3.9}$$

将基本偏微分方程(3.3)对 C_k 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial t \partial C_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial q_l \partial C_k}\frac{H_r}{p_l} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \phi_s}{\partial q_l}\frac{{}^2 H_r}{p_l\ p_m}\frac{\partial \phi_m}{\partial C_k}$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{}{p_l}\left(\frac{H_r}{q_s} - Q_s' - Q_s^{\circ} - \Gamma_s - \phi_s - \Lambda_s\right)\frac{\partial \phi_s}{\partial C_k} = 0$$

利用(3.7), 上式成为

$$\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t \partial C_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial q_l \partial C_k} \frac{H_r}{p_l} = 0 \tag{3.10}$$

比较(3.9)、(3.10), 得(2.16)的第二组方程, 同理, 将(3.6)对时间求导数并利用(3.3), 可以证明(2.16)的第一组方程

方法二

替代(3.1), 可令广义坐标 q_s 是广义动量 p_k 和时间 t 的函数, 即

$$q_s = \varphi_s(p_k, t) \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.11}$$

则基本偏微分方程组可表为

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_k} \frac{H_r}{q_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_k} \left(Q_k' + Q_k^{\omega} + \Gamma_k + \Psi_k + \Lambda_k - \frac{H_r}{p_s} \right) = 0 \tag{3.12}$$

设(3.12)的完全解为

$$q_s = \varphi_s(p_k, t, C_B) \qquad (s, k = 1, \cdots, n; B = 1, \cdots, 2n) \tag{3.13}$$

利用初始条件(3.5), 我们可得

$$q_s = \varphi_s(p_k, t, q_{k_0}, p_{k_0}, C_k) \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.14}$$

同理我们可得到

定理 2 如方程组

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial C_k} = 0 \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{3.15}$$

对于 $p_1, \cdots, p_n$ 是一次代数方程组, 且在 t, p_s 的定义域内都有

$$\det\left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial C_k \partial p_l} \right) \neq 0 \qquad (k, l = 1, \cdots, n) \tag{3.16}$$

成立, 那么联合方程(3.15)和(3.14)便可确定初值问题(2.16)、(3.5)的解• 把约束方程限制(2.7)加到相应完整系统的解(3.14)、(3.15)上, 就得到变质量非线性非完整系统相对运动的解•

§4. 变质量非线性非完整系统相对运动的单分量法

方法一

令系统的一个广义动量, 例如 p_1 作为所有广义坐标、时间和其余广义动量的函数, 即

$$p_1 = u(q_s, p_a, t) \quad (s = 1, \cdots, n; a = 2, \cdots, n) \tag{4.1}$$

把(4.1)对时间 t 求导数并利用(2.16), 得到基本偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{H_r}{p_1} + \sum_{a=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_a} \frac{H_r}{p_a} + \sum_{a=2}^{n} \left(- \frac{H_r}{q_a} + Q_a' + Q_a^{\omega} + \Gamma_a + \Psi_a + \Lambda_a \right.$$
$$\left. + \frac{H_r}{q_1} - Q_1' - Q_1^{\omega} - \Gamma_1 - \Psi_1 - \Lambda_1 = 0 \right. \tag{4.2}$$

若方程组(4.2)的完全解为

$$p_1 = u(q_s, p_a, t, C_1, \cdots, C_{2n}) \qquad (s = 1, \cdots, n; a = 2, \cdots, n) \tag{4.3}$$

利用初始条件(3.5), 可将积分常数 C_1 用初始条件和其余积分常数 C_A $(A = 2, \cdots, 2n)$ 表出, 这样(4.3)可写为

$$p_1 = u(q_s, p_a, q_{s_0}, p_{s_0}, t, C_A) \qquad (s = 1, \cdots, n; a = 2, \cdots, n; A = 2, \cdots, 2n) \tag{4.4}$$

于是我们可建立如下定理

定理 3　如方程组

$$\frac{\partial u}{\partial C_A}=0 \qquad (A=2,\cdots,2n) \tag{4.5}$$

对于 $q_1, \cdots, q_n; p_2, \cdots, p_n$ 是一次代数方程组, 且在 t, q_s, p_a 的定义域内都有

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial q_n}; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial p_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial p_n} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_{2n} \partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_{2n} \partial q_n}; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_{2n} \partial p_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial C_{2n} \partial p_n} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{4.6}$$

成立, 那么联合方程(4.5)和(4.6)便可确定初值问题(2.16)、(3.5)的解, 把约束方程限制(2.17)加到相应完整系统的解(4.4)和(4.5)上, 就得到变质量非线性非完整系统相对运动的解•

证明　将(4.5)对时间 t 求导数, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial p_a}\dot{p}_a=0 \tag{4.7}$$

将基本偏微分方程(4.2)对 C_A 求偏导数, 得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_1}\frac{H_r}{p_1}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_a}\frac{H_r}{p_a}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial p_a}\left(-\frac{H_r}{q_a}+Q'_a+Q^{*}_a+\Gamma_a\right.\\ &\left.+\Psi_a+\Lambda_a\right)+\left[\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_r}{q_1}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_r}{p_a}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{H_r}{q_a}+Q'_a\right.\right.\\ &\left.\left.+Q^{*}_a+\Gamma_a+\Psi_a+\Lambda_a\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_r}{q_1}-Q'_1-Q^{*}_1-\Gamma_1-\Psi_1-\Lambda_1\right)\right]\frac{\partial u}{\partial C_A}=0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

利用(4.5), 并把(4.7)减去(4.8), 得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_1}\left(\dot{q}_1-\frac{H_r}{p_1}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial q_a}\left(\dot{q}_a-\frac{H_r}{p_a}\right)+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial p_a}\left(\dot{p}_a+\frac{H_r}{q_a}\right.\\ &\left.-Q'_s-Q^{*}_a-\Gamma_a-\Psi_a-\Lambda_a\right)=0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

根据(4.7), 我们得到

$$\dot{q}_s=\frac{H_r}{p_s}, \quad \dot{p}_a=\frac{H_r}{q_a}+Q'_a+Q^{*}_a+\Gamma_a+\Psi_a+\Lambda_a$$

$$(s=1,\cdots,n;\ a=2,\cdots,n) \tag{4.10}$$

使用(4.3), 并考虑到(4.10), 我们有

$$\dot{p}_1=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{H_r}{p_1}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{H_r}{p_a}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial p_a}\left(-\frac{H_r}{q_a}+Q'_a+Q^{*}_a+\Gamma_a+\Psi_a+\Lambda_a\right. \tag{4.11}$$

联合(4.2)和(4.11), 可得(2.7)的第一对方程

$$\dot{p}_1=-\frac{H_r}{q_1}+Q'_1+Q^{*}_1+\Gamma_1+\Psi_1+\Lambda_1 \tag{4.12}$$

方法二

替代(4.1), 令系统的一个广义坐标, 例如 q_1 作为所有广义动量、时间和其余广义坐标的函数, 即

$$q_1=V(q_a, p_s, t) \qquad (a=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n) \tag{4.13}$$

将(4.13)对时间 t 求导数, 并利用(2.16)得基本偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_a}\frac{H_r}{q_a}+\frac{\partial V}{\partial p_1}\left(-\frac{H_r}{q_1}+Q_1'+Q_1^{*}+\Gamma_1+\Psi_1+\Lambda_1\right.$$

$$\left.+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial V}{\partial p_a}\left(-\frac{H_r}{q_a}+Q_a'+Q_a^{*}+\Gamma_a+\Psi_a+\Lambda_a-\frac{H_r}{q_1}\right.\right.=0 \tag{4.14}$$

若方程(4.14)的完全解为

$$q_1=V(q_a,p_s,t,C_1,\cdots,C_{2n}) \tag{4.15}$$

利用初始条件(3.5), 我们可得

$$q_1=V(q_a,p_s,t,q_{s0},p_{s0},C_B)\quad(a=2,\cdots,n;s=1,\cdots,n;B=2,\cdots,2n) \tag{4.16}$$

同理我们得到

定理4 如方程组

$$\frac{\partial V}{\partial C_B}=0\qquad(B=2,\cdots,n) \tag{4.17}$$

对于 $q_2,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n$ 是一次代数方程组, 且在 t,q_a,p_s 的定义域内都有

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial q_2},&\cdots,&\frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial q_n};&\frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial p_1},&\cdots,&\frac{\partial^2 V}{\partial C_2\partial p_n}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial q_2},&\cdots,&\frac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial q_n};&\frac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial p_1},&\cdots,&\frac{\partial^2 V}{\partial C_{2n}\partial p_n}\end{bmatrix}\neq 0 \tag{4.18}$$

成立, 那么联合方程(4.17)和(4.16)便可确定初值问题(2.16)、(3.3)的解, 把约束方程限制(2.17)加到相应完整系统的解(4.16)和(4.17), 就得到变质量非线性非完整系统相对运动的解•

§5. 变质量非线性非完整系统相对运动的场方法

选一个场变量, 例如 x_1, 作为依赖于时间 t 和其余场变量 $x_A\,(A=2,\cdots,2n)$ 的场函数, 即

$$x_1=w(t,x_A)\qquad(A=2,\cdots,2n) \tag{5.1}$$

将(5.2)对时间 t 求导数, 并利用方程(2.11)的后面 $(2n-1)$ 个方程, 得到基本偏微分方程•

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_a}x_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_{n+b}}g_b(t,w,x_A)-x_{n+1}=0 \tag{5.2}$$

设已找到方程(5.2)的一个完全解

$$x_1=w(t,x_A,C_\alpha)\qquad(A=2,\cdots,2n,\ \alpha=1,\cdots,2n) \tag{5.3}$$

将(5.3)代入(5.2), 则(5.2)对所有 t,x_A,C_α 恒满足, 令相应完整系统运动的初始条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha_0}\qquad(\alpha=1,\cdots,2n) \tag{5.4}$$

将(5.4)代入(5.3), 并将一个常数, 例如 C_1 表为 x_{α_0} 和 C_A 的函数, 于是有

$$x_1=w(t,x_A,x_{\alpha_0},C_A)\qquad(\alpha=1,\cdots,2n;A=2,\cdots,2n) \tag{5.5}$$

这样我们可建立如下定理

定理5 如方程组

$$\frac{\partial w}{\partial C_A}=0\qquad(A=2,\cdots,2n) \tag{5.6}$$

对于 $x_2, \cdots, x_{2n}$ 是一次代数方程组, 且在 t, x_B 的定义域内都有

$$(\qquad \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_A \partial x_B} \right) \neq 0 \tag{5.7}$$

成立, 那么联合方程(5.6)和(5.5)便可确定初值问题(2.11)和(5.4)的解, 把约束方程限制(2.13)加在相应完整系统的解(5.5)和(5.6)上, 就得到变质量非线性非完整系统相对运动的解•

证明 将(5.6)对时间 t 求导数, 得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial t} + \sum_{a=2}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial x_a} \dot{x}_a + \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial x_{n+b}} \dot{x}_{n+b} = 0 \tag{5.8}$$

将基本偏微分方程(5.2)对 C_A 求偏导数, 有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial t} + \sum_{a=2}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial x_a} x_{n+a} + \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial C_A \partial x_{n+b}} g_b + \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_{n+b}} \cdot \frac{\partial g_b}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial C_A} = 0 \tag{5.9}$$

比较(5.8)、(5.9), 并利用(5.6), 我们得到

$$\dot{x}_{n+a} = x_{n+a}, \quad \dot{x}_{n+b} = g_b \quad (a = 2, \cdots, n;\ b = 1, \cdots, n) \tag{5.10}$$

这即方程(2.11)的后面$(2n-1)$个方程, 将(5.5)对时间 t 求导, 并利用(5.1), 我们可以证明方程(2.15)的第一个方程成立•

§6. 讨论与结论

本文给出了变质量非线性非完整系统相对运动动力学方程的积分方法, 这些方法自然适用于: 1° 常质量非线性非完整系统的相对运动; 2° 变质量非线性非完整系统的绝对运动; 3° 变质量完整系统的相对运动或绝对运动; 4° 常质量非线性非完整系统的绝对运动; 5° 常质量完整系统的相对运动或绝对运动•

本文的方法具有通用性, 没有像 Hamilton_Jacobi 方法那样苛刻的限制条件• 本文的方法具有灵活性, 在单分量法中, 任一 p 都可取代 p_1、任一 q 都可取代 q_1; 在场方法中, 任一场变量都可取代 x_1, 对某个具体问题可选取适当的变量, 以使基本偏微分方程较易求解• 本文方法的主要困难均在于求基本偏微分方程的完全解, 但是, 只要找到完全解就不用任何积分而求得运动方程的解•

参 考 文 献

1 . . ÅÂÎ¶, ¿±½º Äº¹¶Ã¼±Ñ ¶Ç±º¼± . Ã¼³±(1961), 426—436.

2 刘桂林、乔永芬、张解放、梅凤翔, 变质量非完整力学系统的相对运动动力学, 力学学报, **21**(6)(1989), 742—748.

3 罗绍凯, 变质量系统相对于非惯性系的高阶 Gibbs_Appell 方法, 黄淮学刊, **7**(3) (1991), 11—21.

4 罗绍凯, 变质量高阶非完整系统相对于非惯性系的 B_H 方程, 科学通报, **37**(10) (1992), 878—880.

5 R. Van Dooren, Generalized methods for nonholonomic systems with application in various fields of class mechanics, Proc 14th TUTAM Congress, Delft, (1976), 373—391.

6 V. V. Rumjantsev and A. S. Sumbatov, On the problem of a generalization of Hamilton_Jacobi method for nonholonomic system, ZAMM, **58**(4) (1978), 477—481.

7 B. Vujanovic, On a gradient method in nonconservative mechanics system, Acta Mechanica, **34**(2)(1979), 167—169.

8 B. Vujanovic, On the integration of the nonconservative Hamilon dynamics equations, Int. J. Eugng.

Sci., **19**(12) (1981), 1739—1741.

9 B. Vujanovic, A field method and its application to the theory of vibrations, Int. J. Nonlinear Mech., **19**(4) (1984), 383—396.

10 梅凤翔, 非完整系统力学积分方法的研究进展, 力学进展, **21**(1) (1991), 83—95.

11 Mei Fengxiang, A method of integration of nonholonomic nonconservative systems, Proc. ICDVC, Peking University Press, (1990), 653—658.

12 Mei Fengxiang, A field method for solving the equation of motion of nonholonomic systems, Acta Mechanica Sinica, **5**(3) (1989), 260—268.

Integration Method for the Dynamics Equation of Relative Motion of Variable Mass Nonlinear Nonholonomic System

Chen Xiangwei　　Luo Shaokai

(Department of Physics, Shangqiu Teachers, College, Shangqiu, Henan 476000, P. R. China)

Abstract

In this paper, the integration methods of dynamics equations of relative motion of variable mass nonlinear nonholonomic system, such as the gradient method, the single_component method and the field method, are given. Firstly, the dynamics equations are written in the canonical form and the field form. Secondly, the gradient method, the single_component method and the field method are used to integrate the dynamics equations of the corresponding constant mass holonomic system in inertial reference frame respectively. With the restriction of nonholonomic constraints to the initial conditions being considered, the solutions of the dynamics equations of variable mass nonlinear nonholonomic system in noninertial reference frame are obtained.

Key words analytical mechanics, integration method, nonlinear nonholonomic constraint, variable mass system, noninertial reference frame