应用数学和力学, 第 19 卷 第 5 期(1998 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

具有交互神经传递时滞的神经网络的稳定性

曹进德　　李继彬

(1997 年 1 月 27 日收到)

摘　要

本文研究了具有交互神经传递时滞的神经网络模型

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + p_i \quad (t > 0;\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

平衡点的全局渐近稳定性, 并获得了若干充分条件

关键词　神经网络　平衡点　稳定性
中图分类号　O175　TN711

1 引　　言

本文研究具有 n 个神经元的神经网络模型

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + p_i \qquad (t > 0;\ i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1}$$

其中, $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在时刻 t 的膜电位; $f_j(x_j)$ 表示第 j 个神经元的膜电位对其激发率的转换; α_{ij} 表示第 j 个神经元作用在第 i 个神经元上的力; τ_j 表示沿着第 j 个神经轴突的传递时滞; 常数 p_i 表示外电压倾向或从外部神经网络到第 i 个神经元的以电压箱形式输入的电位差; b_i 表示在与神经网络不连通并且无外部附加电压差的情况下第 i 个神经元恢复孤立静息状态的速率

对于没有时滞的系统(1.1), 已有大量文献研究过其动力学性质, 读者可参考文献[1~6]及文中引用的文献, 本文的目的在于对具有时滞的系统(1.1), 通过构造不同的 Liapunov 泛函给出平衡点全局渐近稳定的一系列与参数 b_i, α_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 有关的充分条件　方程组(1.1) 的平衡点渐近稳定性的生物学意义在于该神经网络的结构使得瞬时输入的外部电压向量 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 编码为系统(1.1) 的平衡状态　由于该网络的全局动力学是收敛到平衡状态的, 并且这种收敛性与初值无关, 因此网络能够持续地保持这种编码信号状态　由此可见, 从数学模型角度来研究系统(1.1) 的全局渐近稳定性是非常重要和基本的　本文所得结果比以往的参考文献结果更为一般, 同时一些相关文献的结果被推广与改进

云南省应用基础研究基金资助课题
云南大学成人教育学院, 昆明 650091
昆明理工大学, 昆明 650093

2 全局渐近稳定性的若干充分条件

如所周知, 对于模型(1 1)这个时滞微分方程, 通常取初值为:

$$x_i(s) = \phi_i(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max_{1 \le i \le n} \tau_i \tag{2 1}$$

其中, $\phi_i: [-\tau, 0] \to R (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是连续函数

兹设每一个输出响应 $f_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 具有以下性质:

(H$_1$) $f_j: R \to R$ 是连续可微的;

(H$_2$) f_j 在 R 上有界;

(H$_3$) $0 < \dfrac{df_j(u)}{du} \le \mu_j, (j = 1, 2, \cdots, n, u \in (-\infty, \infty))$

引理 1 若响应函数 $f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足假设(H$_1$)~(H$_3$), 则模型(2 1)必存在平衡点

证明 易见, 若 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ 是(2 1)的平衡点, 则 x^* 一定满足非线性方程

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} f_j(x_j^*) + \frac{p_i}{b_i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j^*) + q_i \end{aligned} \tag{2 2}$$

这里, $B = (b_{ij})_{n \times n} = \left(\dfrac{\omega_{ij}}{b_i}\right)_{n \times n}$, $q = (q_1, q_2, \cdots_j, q_n)^T$, $q_i = \dfrac{p_i}{b_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 于是系统(2 2)可以表为如下的向量 矩阵形式

$$x^* = F(x^*) = Bf(x^*) + q \tag{2 3}$$

其中, $f(x^*) = (f_1(x_1^*), f_2(x_2^*), \cdots, f_n(x_n^*))^T$ 这样 x^* 就是映射 $F: R^n \to R^n$ 的不动点

利用众所周知的Brouwer不动点定理可以证明映射 F 的不动点的存在性 事实上, 定义一个超立方体:

$$\Omega = \{x \in R^n \mid \|x - q\| \le \|B\| M\} \tag{2 4}$$

其中, $M = \max_i \sup_s |f_i(s)|$

由(2 3)、(2 4)可知

$$\|F(x) - q\| = \|Bf(x)\| \le \|B\| \|f\| \le \|B\| M \tag{2 5}$$

又由(2 3)~(2 5)易见映射 F 是连续的, 且 F 将一个有界的闭凸集 Ω 映成自身, 于是由Brouwer不动点定理知, F 至少有一个不动点, 兹记该不动点为 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$

Q. E. D

注意到Brouwer定理并不能确保不动点的唯一性, 然而, 在本文中我们获得的关于参数的充分条件, 不仅可以确保平衡点的唯一性(这样的平衡点表示对应输入向量 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的编码信号), 而且可以保证其全局渐近稳定性 平衡点的唯一性可以从下述定理中的全局渐近稳定性结论推出来

引理 2 设 $f_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 满足(H$_1$)~(H$_3$), 则(1 1)所有解在[0, +∞)上均有界

证明 易见(1 1)的任意解都满足微分不等式

$$-b_i x_i(t) - \alpha_i \le \dot{x}_i(t) \le -b_i x_i(t) + \alpha_i$$

其中, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} |\omega_{ij}| \sup_{s \in R} |f_j(s)| + |p_i|$

由上面的不等式即知,(2.1) 的解在$[0, +\infty)$上均有界. Q.E.D

定理 1 设响应函数$f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$满足$(H_1) \sim (H_3)$, 且参数$b_i, \alpha_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$满足下列条件之一:

$$(\mathrm{I})\quad \rho = \max_{1\le i\le n} \frac{\mu_i}{b_i}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ji}| < 1 \quad (b_i > 0);$$

$$(\mathrm{II})\quad \rho_1 = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{2b_i}\sum_{j=1}^{n} (|\alpha_{ij}|\mu_j + |\alpha_{ji}|\mu_i) < 1 \quad (b_i > 0);$$

$$(\mathrm{III})\quad \rho_2 = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{2b_i}\sum_{j=1}^{n} (\mu_j^2|\alpha_{ij}| + |\alpha_{ji}|) < 1 \quad (b_i > 0);$$

$$(\mathrm{IV})\quad \rho_3 = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{2b_i}\sum_{j=1}^{n} (|\alpha_{ij}| + \mu_i^2|\alpha_{ji}|) < 1 \quad (b_i > 0)$$

则平衡点x^*是全局渐近稳定的, 且与滞量无关, 此时, 对应于形式(2.1) 的初始条件的任一解满足收敛关系:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = x_i^* \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

证明 如果这个网络动力系统收敛于一个与p有关的平衡点, 则相应任意允许初值的(1.1) 的解一定满足关系

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^*| = 0$$

由(1.1) 可知 $y_i(t) \triangleq x_i(t) - x_i^*(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的导数满足方程

$$\dot{y}_i(t) = -b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j'(\xi_j(t)) y_j(t-\tau_j) \tag{2.6}$$

其中, $\xi_j(t)$介于$x_j(t-\tau_j)$与x_j^*之间, $j = 1, 2, \cdots, n$. 方程(1.1) 与(2.6) 解的局部存在性可通过分步法来确定, 而解在$[0, +\infty)$上存在性将通过以下的分析来确定.

(Ⅰ) 考虑 Lyapunov 泛函 $V(t) = V(y)(t)$:

$$V(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j|\alpha_{ij}|\int_{t-\tau_j}^{t}|y_j(s)|\,ds\right) \tag{2.7}$$

沿(2.6) 的解计算V的上右导数D^+V, 简化整理后可得

$$\begin{aligned}
D^+V(t) &\le \sum_{i=1}^{n}\left(-b_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_j|\alpha_{ij}||y_j(t-\tau_j)|\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|\alpha_{ij}||y_j(t)| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j|\alpha_{ij}||y_j(t-\tau_j)| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(-b_i|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\mu_i|\alpha_{ji}||y_i(t)|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(b_i - \mu_i\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ji}|\right)|y_i(t)|\right] \\
&= -\sum_{i=1}^{n} b_i\left(1 - \frac{\mu_i}{b_i}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ji}|\right)|y_i(t)| \\
&\le -\delta\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中, $\delta = \min_{1\le i\le n} b_i(1-\rho)$, 由(2.7)、(2.8) 可知$\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|$当$t \ge 0$时有界, 于是(2.6) 的解

在$[0,+\infty)$上存在，再根据(2.7)、(2.8)，我们有

$$V(y)(t)+\int_0^t\sum_{i=1}^{n}|y_i(s)|\,ds\le V(y)(0)\tag{2.9}$$

利用上式得到

$$\int_0^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|\,dt<\infty\tag{2.10}$$

由引理2知 $x_i(t)$ 在$(0,\infty)$上有界，于是可推出 $y_i(t)$，$\dot y_i(t)$ 在$(0,+\infty)$上有界，故 $y_i(t)$ 在$(0,+\infty)$上一致连续，从而 $\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|$ 在$(0,\infty)$上也一致连续。利用 Barbalat 引理[1]即知

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|=0\tag{2.11}$$

由(2.11)可知，定理1的结论成立。

( ) 考虑 Lyapunov 泛函

$$V(t)=V(y)(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|\int_{t-\tau_j}^{t}y_j^2(s)\,ds\right)\tag{2.12}$$

沿(2.6)的解计算 V 的变化率，可得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\sum_{i=1}^{n}\Big[y_i(t)\Big(-b_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\xi_j(t))y_j(t-\tau_j)\Big)\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t-\tau_j)\Big]\end{aligned}\tag{2.13}$$

利用不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 与 $0<f_j(u)\le\alpha_j$ 来估计(2.13)的右端，可得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\le&\sum_{i=1}^{n}\Big[-b_iy_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}|\beta_{ij}||f_j(\xi_j(t))||y_i(t)||y_j(t-\tau_j)|\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t-\tau_j)\Big]\\\le&\sum_{i=1}^{n}\Big[-b_iy_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i|\beta_{ij}|(y_i^2(t)+y_j^2(t-\tau_j))\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t-\tau_j)\Big]\\=&\sum_{i=1}^{n}\Big[-b_iy_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_i^2(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j|\beta_{ij}|y_j^2(t)\\=&-\sum_{i=1}^{n}\Big[b_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i|\beta_{ij}|+\alpha_i|\beta_{ji}|)\Big]y_i^2(t)\\\le&-\lambda_1\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t)\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中，$\lambda_1=\min_{1\le i\le n}b_i(1-\rho_1)>0$

由(2.14)可得

$$V(y)(t)+\lambda_1\int_0^t\sum_{i=1}^{n}y_i^2(s)\,ds\le V(y)(0)\tag{2.15}$$

从而

$$_0 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)\,dt <$$

用类似于( )的分析, 由 Barbalat 引理可知

$$\lim_{t} \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) = 0 \qquad (2\ 16)$$

上式表明定理 1 的结论成立

( ) 考虑 Lyapunov 泛函

$$V(t) = V(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |\ \ _{ij}| \int_{t-\ \ _j}^{t} y_j^2(s)\,ds\right) \qquad (2\ 17)$$

与( )完全类似, 沿(2 6)的解计算 V 的变化率, 然后进行估计, 简化整理后得

$$\frac{dV}{dt} \quad - \sum_{i=1}^{n}\left[b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\ \ _j^2|\ \ _{ij}| + |\ \ _{ji}|)\ \ y_i^2(t)\right.$$

$$- \ \ _2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \qquad (2\ 18)$$

其中, $_2 = \min_{1\ \ i\ \ n} b_i(1-\ \ _2)$, 利用(2 17), (2 18) 仿( ) 可推出定理 1 的结论

( ) 考虑 Lyapunov 泛函 y

$$V(t) = V(\bar{y})(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}y_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\ \ _j^2|\ \ _{ij}| \int_{t-\ \ _j}^{t} y_j^2(s)\,ds\right) \qquad (2\ 19)$$

沿(2 6)的解, 计算 V 的变化率, 然后仿( )进行估计, 可得

$$\frac{dV}{dt} \quad -2\sum_{i=1}^{n}\left[b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|\ \ _{ij}| + \ \ _i^2|\ \ _{ji}|)\ \ y_i^2(t)\right.$$

$$- \ \ _3 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \qquad (2\ 20)$$

其中, $_3 = \min_{1\ \ i\ \ n} b_i(1-\ \ _3) > 0$, 由(2 19), (2 20) 仿( ) 的分析, 然后利用 Barbalat 引理可知定理 1 的结论成立

综上定理 1 获证

我们还可以考虑连续分布滞量的情形, 只要将(1 1)中含有离散滞量的项 $x_j(t-\ \ _j)$ 换为 $\int_0^{]} k_j(s)x_j(t-s)\,ds \quad (j = 1, 2, , , n)$ 即可, 在此情形下, (111) 就变为

$$x_i^c(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} f_j\left(\int_0^{]} k_j(s)x_j(t-s)\,ds\right) + p_i \qquad (2121)$$

其中, $k_j:[0, +]) \ y\ [0, +])\ (j = 1, 2, , , n)$ 是连续的, 且积分满足

$$\int_0^{]} k_j(s)\,ds = 1, \quad \int_0^{]} sk_j(s)\,ds <],\ (j = 1, 2, , , n) \qquad (2122)$$

同前面一样, 我们能证明(2121) 的解必为有界解, 且注意到(2121) 的初始条件为定义在(-], 0] 上的有界连续函数# 由(2122) 易知: (2121) 的平衡点与(111) 的平衡点 x^* 重合, 于是, 我们只需将定理 1 的证明过程作微小的修改, 即可证下面的定理成立#

定理 2 设定理 1 的条件成立, 则(2121) 的平衡点 x^* 是全局渐近稳定的, 且在此情形下(2121) 的任一解满足收敛条件

$$\lim_{t\ y\ ]} x_i(t) = x_i^* \qquad (i = 1, 2, , , n)$$

参考文献

1 K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Dordrecht (1992).

2 K. Mastsuoka, stability conditions for nonlinear continuous neural networks with asymmetric conneection weight, Neural Networks, 5 (1992), 495) 500.

3 D. G. Kelly, stability in contractive nonlinear neural networks, IEEE Trans. Biomedical Engineering, 37 (1990), 231) 242.

4 K. Gopalsamy and X. Z. He, stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, Physica D, 76 (1994), 344) 358.

5 C. M. Marcus and R. M. Westervelt, stability of along neural network with time delay, Phys. Rev. A, 39 (1989), 347) 359.

6 T. A. Burton, Neural networks with memory, Applied Math. Stoch. Anal., 4 (1991), 313) 332.

The Stability in Neural Networks with Interneuronal Transmission Delays

Cao Jinde

(Adult Education College, Yunnan University, Kunming 650091, P.R.China)

Li Jibin

(Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P.R.China)

Abstract

In this paper, some sufficient conditions are obtained for the global asymptotic stability of the equilibrium of neural networks with interneuronal transmission delays of the type

$$x_i^c(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} f_j(x_j(t - S_j)) + p_i \qquad (t > 0; i = 1, 2, \ldots, n)$$

Key words *neural networks, equilibrium, stability*