

# 小波变换在分叉与混沌研究中的应用<sup>\*</sup>

郑吉兵<sup>①</sup> 高行山<sup>②</sup> 郭银朝<sup>②</sup> 孟 光<sup>②</sup>

(张汝清推荐, 1996 年 10 月 28 日收到, 1997 年 12 月 29 日收到修改稿)

## 摘 要

非线性振动系统中的运动形式有三种可能: 周期运动、拟周期运动和混沌。用 Poincar 映射可确定出系统周期运动, 用谐波小波变换可区分拟周期运动和混沌。由此可准确地确定出参数空间中各种不同形式运动所对应的存在域。

**关键词** 小波变换 非线性振动 分叉 混沌

**中图分类号** O322

## § 1. 引 言

非线性振动系统中有可能出现周期、拟周期、混沌运动等动力学现象。对应于一组固定的参数, 要判断系统响应是否进入了混沌, 往往要通过 Poincar 图、功率谱、相图、波形图和李亚普诺夫指数等多种方法。光从图形上来作出判断只能得出粗略的结论, 而李亚普诺夫指数的计算又比较费时间, 因而在参数空间或初值空间研究各种运动形态的存在域或吸引域仍缺乏有效的方法。由于小波变换在时域或频域中同时具有良好的局部性质, 而混沌的一个重要特征是它所含的谐波分量不能完全随时间变化周期重复, 因此, 通过小波变换可以很好地将这一特征反映出来。本文成功地利用了 Newland<sup>[1][2]</sup> 提出的谐波小波(harmonic wavelet)变换来识别混沌。鉴于任何非线性振动系统, 其解最多有三种不同形式, 即各种形式的周期、拟周期和混沌响应, 将小波变换和 Poincar 映射结合起来, 用 Poincar 映射来确定周期解及周期数, 用小波变换来区分拟周期和混沌, 可对系统运动的各种形式作出准确的判断。本文用这种方法计算了参数空间中对应于各种形式解的存在域。

## § 2. 谐波小波

小波变换(WT)定义为<sup>[3]</sup>:

$$WT_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} h^* \left( \frac{t-b}{a} \right) x(t) dt \quad n \quad (2.1)$$

\* 国家自然科学基金和国家教委博士后基金资助项目

① 西南交通大学应用力学及工程系, 成都 610031

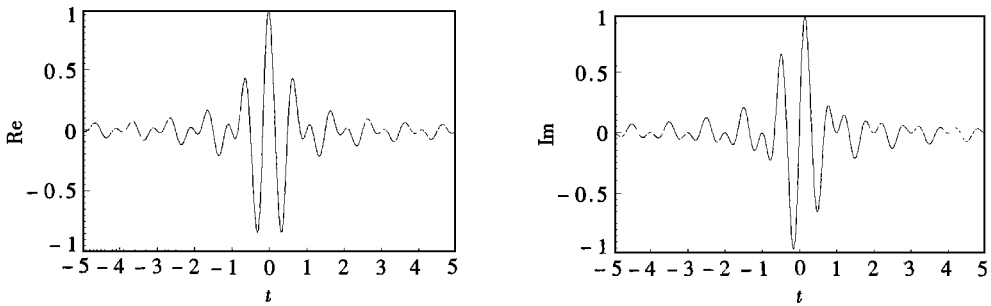
② 西北工业大学振动工程研究所, 西安 710072

等效的频域表示为:

$$WT_x(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H^*(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (2.2)$$

其中,  $X(\omega)$ ,  $H(\omega)$  分别是  $x(t)$ ,  $h(t)$  的富氏变换.

工程应用中, 更关心的是离散小波变换(DWT), 并希望所分析的信号能快速、准确地在正交小波基上分解或通过逆 DWT(IDWT) 重构出信号. 由于 Mallat 和 Daubechies 的工作, 使这种希望在二进小波中得到了实现. 二进小波虽然在某些方面取得了成功, 但由于分解出的信号各层之间的中心频率也是二进的, 每层的带宽相差二倍, 难于得到灵活多样的带宽. 而用 Newland 提出的谐波小波(如图 1) 就可解决这个困难, 谐波小波定义为:



(a) 实部

(b) 虚部

图 1 谐波小波图形

$$W_{m,n}(t) = \frac{e^{i2n\pi t} - e^{i2m\pi t}}{i2(n-m)\pi t} \quad (2.3)$$

再作平移:

$$W_{m,n}\left(t - \frac{k}{n-m}\right) = \frac{\exp\left[i2n\pi\left(t - \frac{k}{n-m}\right)\right] - \exp\left[i2m\pi\left(t - \frac{k}{n-m}\right)\right]}{i2(n-m)\pi\left(t - \frac{k}{n-m}\right)} \quad (2.4)$$

其中  $n, m$  为正整数,  $k$  为整数. (2.4) 式所示小波具有如下特点:

- 1) 其频带宽为  $2(n-m)\pi$ , 作用的时间中心在  $t = k/(n-m)$  处, 因此其时间频率特性由三个参数来描述, 这对分析信号中我们感兴趣的频带和时刻带来了极大的方便.
- 2) 不同频带在不混叠的情形下所对应的小波是相互正交的.
- 3) 相同频带但不同整数  $k$  所对应的小波也是相互正交的.

这样就可以避免各层之间的频带必须为二进的缺陷.

### § 3. 用谐波小波变换和 Poincaré 映射 判断非线性动力系统解的形式

本文以非线性裂纹转子系统为例, 来说明谐波小波变换在混沌研究中的应用. 非线性裂纹转子系统的方程为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \frac{2D}{\Omega} \begin{Bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \end{Bmatrix} + \frac{1}{\Omega^2} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \frac{\Delta K f(\Psi)}{2\Omega^2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\Phi & \sin 2\Phi \\ \sin 2\Phi & 1 - \cos 2\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = U \begin{Bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

其中,  $\Psi = \Phi - \arctg(Y/X)$ ,  $\Phi = t + \beta$

$$f(\Psi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \Psi - \frac{2}{3\pi} \cos 3\Psi + \frac{2}{5\pi} \cos 5\Psi$$

$t$  为无量纲时间,  $\beta$  为裂纹角,  $\Delta K$  为刚度变化比,  $U$  为不平衡参数,  $\Omega$  为转速比。

如果方程(3.1)的响应为周期解,在 Poincaré 图上可得到孤立的点,孤立点的个数对应着周期解的周期数,拟周期和混沌响应则没有这个特性。拟周期运动是由于出现了不可公约的频率而导致系统的运动不能随时间变化周期地重复,但是其中的频率成分是稳定不变的,混沌运动某些谐波分量必然不能随时间变化周期地重复,即其中某些频率成分的幅值随时间是变化的。因此,如果能得到系统响应信号时域或频域的局部特性,就可将混沌信号和拟周期区分开了,这正是 Newland 提出的谐波小波能做到的。对于方程(3.1)的响应,取其中分量  $X(t)$  作小波变换,小波变换的实部和虚部分别为:

$$HR = (n-m) \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \frac{\sin \left[ 2n\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right] - \sin \left[ 2m\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right]}{2(n-m)\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right)} dt \quad (3.2)$$

其中,  $n, m$  为整数,  $k$  为任意实数,

$$HI = -(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \frac{\cos \left[ 2n\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right] - \cos \left[ 2m\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right) \right]}{2(n-m)\pi \left( t - \frac{k}{n-m} \right)} dt \quad (3.3)$$

由(3.2)、(3.3)式即可得到  $X(t)$  的谐波小波变换的幅值  $|a_{m,n,k}|$ 。

实际上,谐波小波也存在快速算法,即注意到小波变换的频域表示,故有:

$$a_{m,n,k} = \frac{1}{4\pi^2(n-m)^2} \int_{m/2\pi}^{n/2\pi} X(\omega) \exp \left[ i\omega \frac{k}{n-m} \right] d\omega \quad (3.4)$$

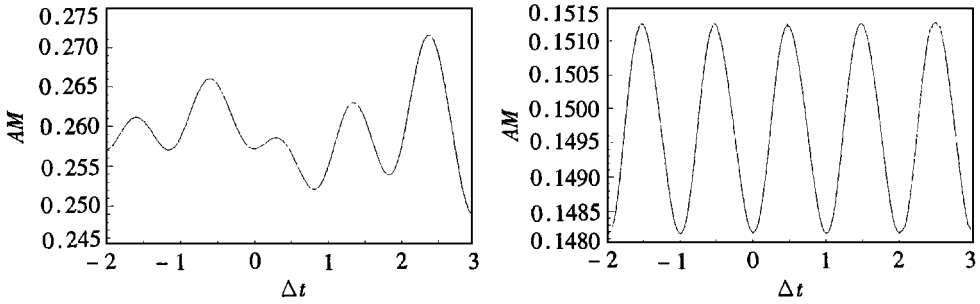
因此,先将所采样的信号作 FFT,通过一些乘法运算后,再作 IFFT,即可求得  $a_{m,n,k}$  和  $|a_{m,n,k}|$ 。

取一些我们感兴趣的  $(n-m)$  值,在一系列  $k$  值下,如果对应某些  $(n-m)$  的小波变换的幅值没有随  $k$  变化出现周期性,则系统响应一定是混沌运动,否则,就是拟周期或周期解,再通过 Poincaré 映射,可将周期解与拟周期区分开。由此,在系统的参数空间中可准确地确定出解的形式。

在具体运用的时候,往往须对信号  $X(t)$  作适当变换。如果将  $X(t)$  的时间压缩  $C$  倍,则其频率就将增大  $C$  倍,因此,原来较窄的频带就对应着变换后较宽的频带,即  $m, n$  均取较大的值,且  $(n-m)$  仍有适当带宽,而对应原信号的频带都非常集中,以达到预期的目的。

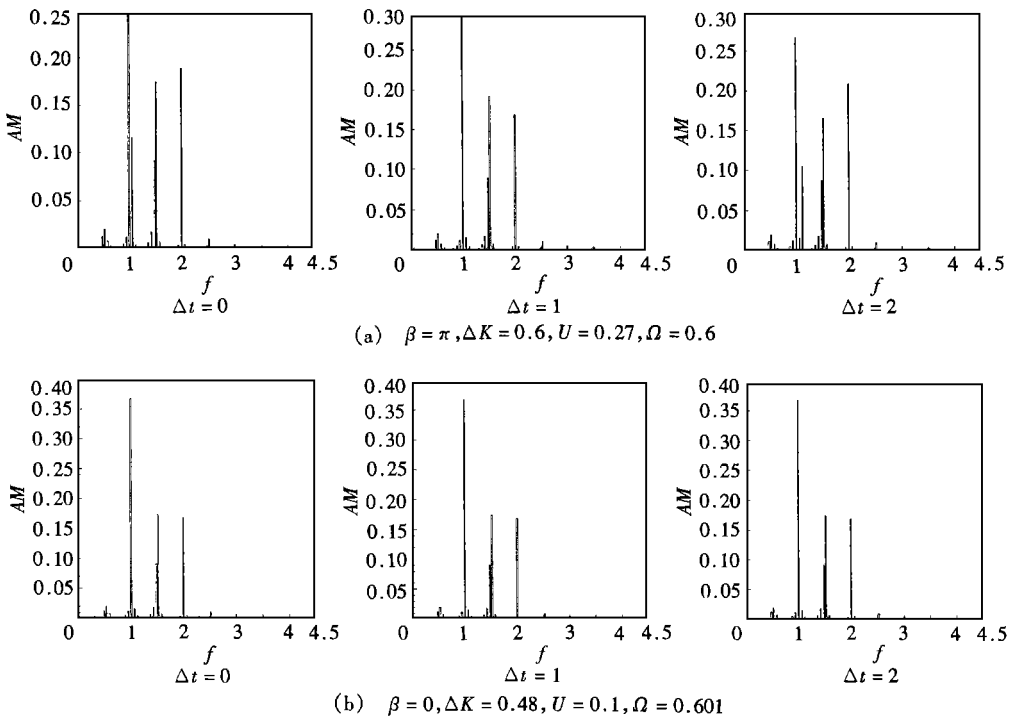
## § 4. 数值计算及结论

图2计算了包含主谐波频带小波变换的幅值  $|a_{m,n,k}|$  随位置参数  $\Delta t = k/(n-m)$  变化的情形,图2(a) ( $\beta = 0.0, \Delta K = 0.58, U = 0.1, \Omega = 0.565$ ) 为一混沌信号<sup>[4]</sup>通过小波变换的结果。随  $\Delta t$  的变化,主谐波幅值  $|a_{m,n,k}|$  变化没有任何周期性,因而它是混沌信号。图2(b) ( $\beta = 0.0, \Delta K = 0.4, U = 0.1, \Omega = 0.62$ ) 为拟周期信号<sup>[4]</sup>通过小波变换的结果,随  $\Delta t$  的变化,主谐波随  $\Delta t$  周期性地变化。图3表示了三个不同位置处各频带小波变换幅值变化的情形,图3(a) ( $\beta = \pi, \Delta K = 0.6, U = 0.27, \Omega = 0.6$ ) 表明混沌信号<sup>[4]</sup>中,  $1 \times, (3/2) \times, 2 \times$  谐波所在的频带的幅值在图中的三个位置各不相同。图3(b) ( $\beta = 0.0, \Delta K = 0.48, U = 0.1, \Omega = 0.601$ ) 为拟周期运动<sup>[4]</sup>,各频带的小波变换幅值在图中的三个位置是不变的。



a) 混沌 ( $\beta = 0, \Delta K = 0.58, U = 0.1, \Omega = 0.565$ )      b) 拟周期 ( $\beta = 0, \Delta K = 0.4, U = 0.1, \Omega = 0.62$ )

图 2 小波变换的含主谐波频带幅值随  $\Delta t$  变化的情形



(a)  $\beta = \pi, \Delta K = 0.6, U = 0.27, \Omega = 0.6$

(b)  $\beta = 0, \Delta K = 0.48, U = 0.1, \Omega = 0.601$

图 3 三个不同  $\Delta t$  处小波变换各频带幅值变化的情形 (a) 混沌, (b) 拟周期

用本文所提出的方法,可以清楚地看出系统解的形式随参数变化的情形。例如,在方程(3.1)中,当  $\beta = 0, \Delta K = 0.56, U = 0.1$  时,  $\Omega$  从 0.5702 逐渐增加到 0.573 的过程中,系统解的形式变化过程为: 周期 7—周期 14—周期 28—拟周期—周期 21—混沌。为了显示这个过程的正确性,图 4 用 Poincaré 图反映了这种变化。

图 5 表示在参数平面  $\Omega$ - $\Delta K$  解的形式变化的情形。从图 5(a) 看,拟周期与混沌之间并不存在明显的分界线,而且拟周期和混沌都可能锁相到各种周期解,混沌的发生很难说是按某种方式进入的。图 5(b) 反映了各种周期解在参数平面的分布情形,其周期数的分布情形符合 Farey 树规律中分母分布的特征,形成了多个“Arnol'd Tongue”。

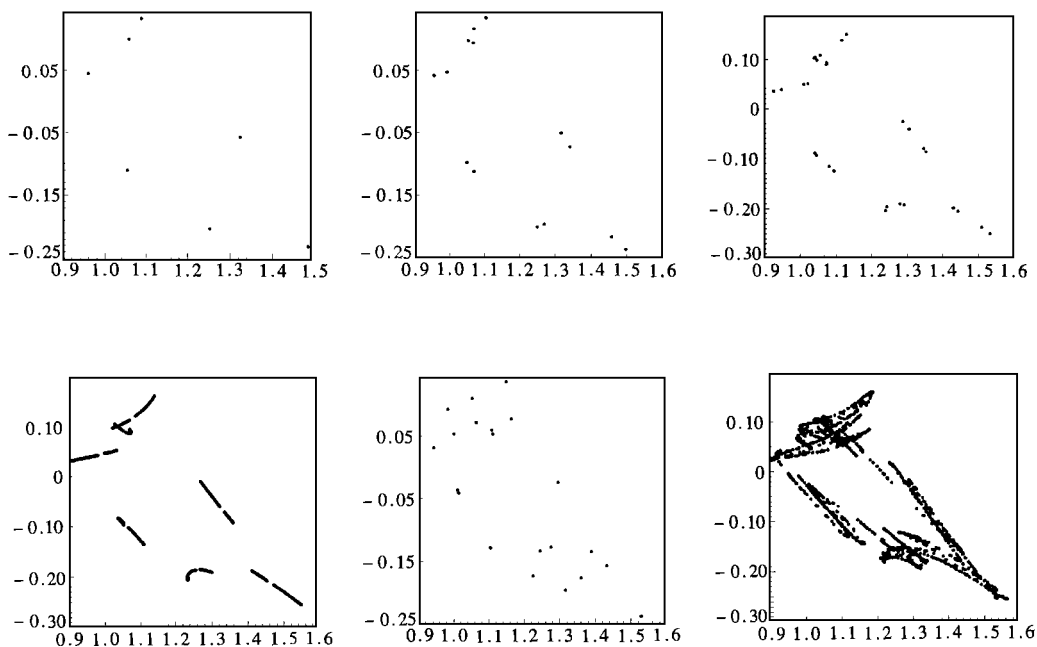


图4 系统响应随  $\Omega$  变化 Poincaré 截面变化的情形( $\Omega= 0.5702, 0.5711, 0.5715, 0.5722, 0.5728, 0.5730$ )

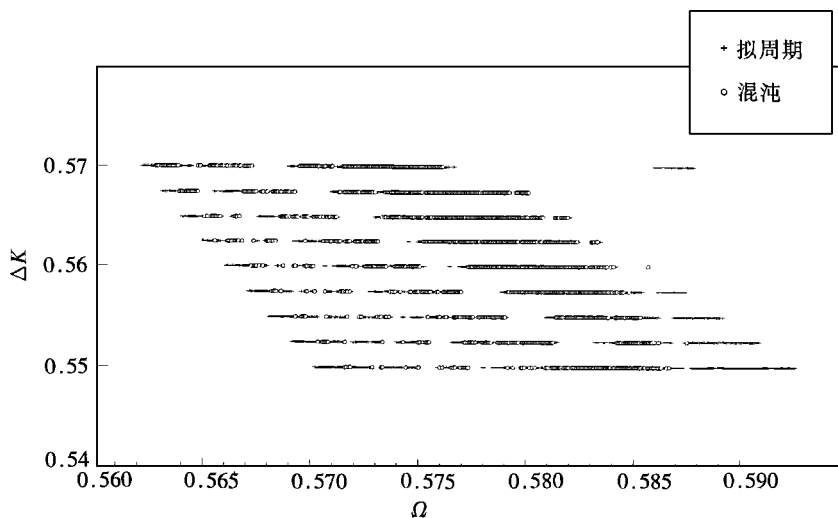


图5(a) 拟周期及混沌在  $\Omega_{\Delta K}$  平面上分布的情形

图6呈现了在参数平面  $U_{\beta}$  解的情形。随  $U$  逐渐增加, 混沌区域越来越小, 并到一定值处消失, 由此看来, 不平衡激励对混沌有抑制作用, 我们还可以看到, 随着  $U$  的增加, 在混沌发生之前, 拟周期运动总是先发生了, 因此可以认为在这种情形下, 拟周期运动进一步分叉是导致混沌的原因。

由上述结果看出, 小波变换与 Poincaré 映射相结合是分析非线性系统在参数空间中解的

结构的有效工具, 从而可方便地揭示非线性系统的响应特性. 这种方法同样可用于对初值空间及吸引域的分析.

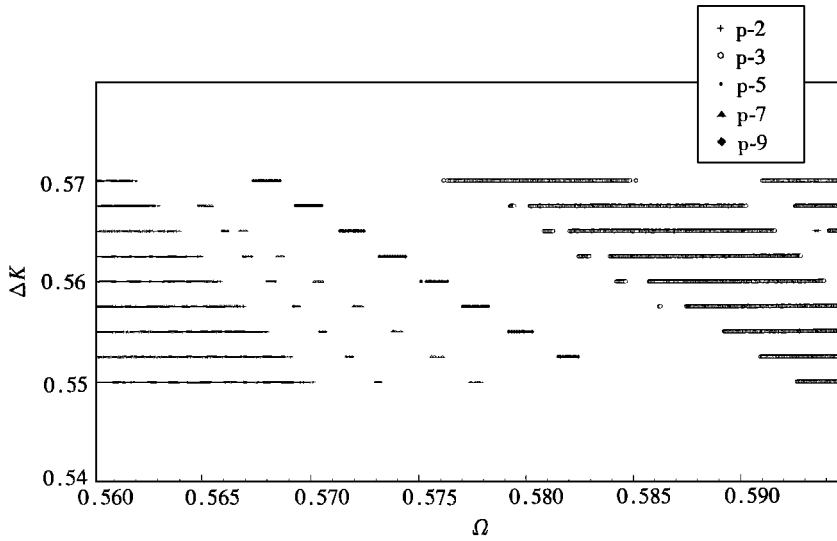


图 5(b) 各种周期解在  $\Omega-\Delta K$  平面上分布的情形

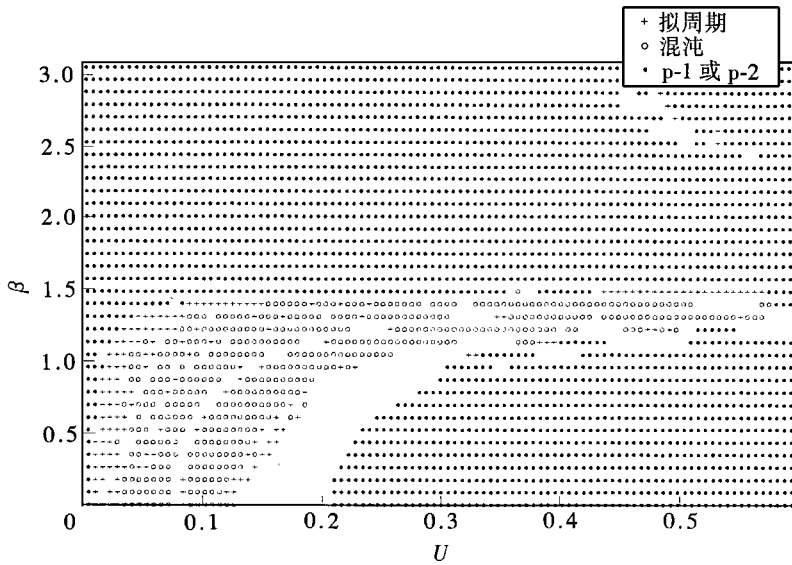


图 6 系统解的形式在  $U-\beta$  平面上分布的情形  
(空白处为周期 1 或周期 2 以外的周期解)

## 参 考 文 献

- 1 D. E. Newland, Wavelet analysis of vibration, Part I : Theory, ASME, J. Vibration and Acoustics, **116**(3) (1994), 409—416.
- 2 D. E. Newland, Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis, 3rd Edition, Longman, Harlow and John Wiley, New York (1993), 295—374.
- 3 C. K. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego (1992), 49—74.
- 4 郑吉兵, 裂纹转子的稳定性、分叉及混沌, 西北工业大学博士学位论文 (1996), 29—41.

## Application of Wavelet Transform to Bifurcation and Chaos Study

Zheng Jibing

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P. R. China)

Gao Hangshan Guo Yinchao Meng Guang

(Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University,  
Xi'an 710072, P. R. China)

### Abstract

The response of a nonlinear vibration system may be of three types, namely, periodic, quasiperiodic or chaotic, when the parameters of the system are changed. The periodic motions can be identified by Poincaré map, and harmonic wavelet transform (HWT) can distinguish quasiperiod from chaos, so the existing domains of different types of motions of the system can be revealed in the parametric space with the method of HWT joining with Poincaré map.

**Key words** wavelet transform, nonlinear vibration, bifurcation chaos