

# 有限宽板在裂纹面受两对反平面集中力时 裂纹线场的弹塑性分析

王 成<sup>①</sup> 张录坤<sup>②</sup>

(1997 年 7 月 15 日收到)

## 摘 要

本文采用线场分析方法对理想弹塑性材料有限宽板中心裂纹在裂纹面上受两对反平面集中力的情形进行弹塑性分析, 求得了裂纹线附近的弹塑性解析解, 裂纹线上的塑性区长度随外荷载的变化规律及有限宽板具有中心裂纹的承载力。本文的分析不受小范围屈服假设的限制, 并且不附加其他假设条件, 其结果在裂纹线附近足够精确。

**关键词** 线场分析方法 两对反平面集中力 有限宽板 弹塑性解析解  
**中图分类号** O346

## § 1. 前 言

文[1, 2]采用线场分析方法, 对理想弹塑性 III型加载下的经典裂纹问题进行了成功的分析; 文[3]对裂纹面任意点受一对反平面集中力时无限大板裂纹线场的弹塑性解的问题进行了分析。这些分析都完全放弃了采用多年的小范围屈服假定条件, 并且, 在不附加其他假设条件下得出了裂纹线附近的弹塑性解析解。这些解答不仅适用于塑性区较小的情形, 而且也适用于塑性区不断增大的情形。

具有裂纹的有限宽板的弹塑性分析是弹塑性力学中最困难的问题之一。本文将对理想弹塑性材料具有中心裂纹的有限板在裂纹面受两对反平面集中力的问题进行分析, 该问题的分析比无限宽板的同一问题更有实际意义, 也便于试验研究, 因此, 对该问题的研究将具有重要的理论意义和实用价值。本文的分析方法与文[1~ 3]类似, 完全放弃小范围屈服的假设条件, 且不附加其它假定, 其结果在裂纹线附近足够精确。但是, 我们将看到本文的分析结果是与文[1~ 3]完全不同的新的结果。

## § 2. 基本方程

图 1 所示为带有一裂纹的理想弹塑性材料有限宽板在裂纹面受两对反平面集中力的问

① 重庆交通学院桥梁及结构工程系, 重庆 400074

② 无锡教育学院计算机系, 无锡 214063

题, 不为零的应力分量和位移分量分别为  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  和  $w$ 。

平衡微分方程:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

屈服条件:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (2.2)$$

其中  $k$  为剪切屈服极限。

应变定义为:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3 a, b)$$

弹塑性理论的应力应变关系:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} + \lambda\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} + \lambda\tau_{yz} \quad (2.4 a, b)$$

式中  $G$  为剪切弹性模量,  $\lambda$  为塑性因子。通过这些方程我们将求出裂纹线附近的塑性应力场的通解。

### § 3. 裂纹线附近的弹塑性应力场和变形场

在裂纹线附近的塑性区内 ( $0 < x \leq r_0, y/x \ll 1$ ), 各场量可按泰勒级数展为下列形式:

$$\tau_{xz} = \tau_1(x)y + O(y^3) \quad (3.1a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_0(x) + \tau_2(x)y^2 + O(y^4) \quad (3.1b)$$

$$\lambda = \lambda_0(x) + \lambda_2(x)y^2 + O(y^4) \quad (3.2)$$

$$w = w_1(x)y + O(y^3) \quad (3.3)$$

这里我们已经考虑了  $\tau_{yz}$ ,  $\lambda$  关于  $y = 0$  的对称性和  $\tau_{xz}$ ,  $w$  关于  $y = 0$  的反对称性。将式 (3.1) ~ (3.3) 代入基本方程式 (2.1) ~ (2.4), 按  $y$  的同次幂的系数相等得到一组方程, 解此方程组即求得  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $w_1$  的具体表达式, 然后将其代回式 (3.1) ~ (3.3), 则得到塑性区的应力和位移分量为

$$\tau_{xz} = -\frac{k}{x+L}y + O(y^3) \quad (3.4a)$$

$$\tau_{yz} = k - \frac{k}{2(x+L)^2}y^2 + O(y^4) \quad (3.4b)$$

$$w = \frac{C}{x+L}y + O(y^3) \quad (3.5)$$

式中  $L, C$  为积分常数。显然, 式 (3.4a, b) 和 (3.5) 是裂纹线附近塑性区应力场的通解。

对应于图 1 所示的相应无限宽板裂纹面受两对反平面集中力的问题的弹性应力场, 采用复变函数解法, 选取 Westergaard 应力函数:

$$Z_{III}(z) = \frac{2Pz \sqrt{a^2 - c^2}}{\pi(z^2 - c^2) \sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.6)$$

则弹性应力分量为

$$\tau_{xz} = \text{Im}Z_{III}(z), \quad \tau_{yz} = \text{Re}Z_{III}(z) \quad (3.7 a, b)$$

此解满足弹性理论的基本方程, 且也满足无限宽板裂纹面的边界条件和远离裂纹的远场

边界条件, 因此, 式(3.7a, b)为该问题弹性应力场的精确解。

式(3.7a, b)按小 $\theta$ 的幂级数展开到裂纹线附近后可得到下列形式:

$$\tau_{xz} = \frac{2P \sqrt{a^2 - c^2} (a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left[ \frac{r}{a+r} - \frac{a+r}{2a+r} - \frac{2r(a+r)}{(a+r)^2 - c^2} \theta + O(\theta^3) \right] \quad (3.8a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{2P \sqrt{a^2 - c^2} (a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[ \frac{r(a+4r)}{(a+r)^2 - c^2} - \frac{4r^2(a+r)^2}{((a+r)^2 - c^2)^2} + \frac{a+4r}{2(2a+r)} - \frac{3(a+r)^2}{2(2a+r)^2} - \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2 - c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4) \quad (3.8b)$$

式(3.8a, b)在裂纹线附近是足够精确。

对于图1所示的有限宽板问题, 满足所有边界条件的弹性应力场目前还没有得到, 但是, 我们可以认为它的应力场的形式与(3.8a, b)式相似。这样有限宽板在裂纹线附近的应力可以修正为

$$\tau_{xz} = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2} (a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left[ \frac{r}{a+r} - \frac{a+r}{2a+r} - \frac{2r(a+r)}{(a+r)^2 - c^2} \theta + O(\theta^3) \right] \quad (3.9a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2} (a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[ \frac{r(a+4r)}{(a+r)^2 - c^2} - \frac{4r^2(a+r)^2}{((a+r)^2 - c^2)^2} + \frac{a+4r}{2(2a+r)} - \frac{3(a+r)^2}{2(2a+r)^2} - \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2 - c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4) \quad (3.9b)$$

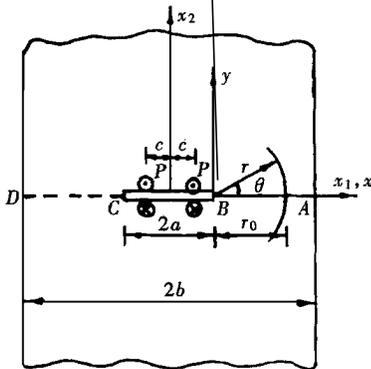


图1 有限宽板在裂纹面受两对反平面集中力

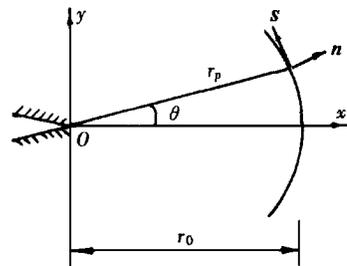


图2 裂纹线附近的弹塑性边界

其中 $Q$ 是与板宽度 $2b$ , 裂纹长度 $2a$ 及点力 $2P$ 等有关的参数。

显然, (3.9a, b)式满足裂纹面的边界条件( $x_1 \neq c$ ), 因为它们有参数 $Q$ 的修正和从(3.7a, b)式展开得到。现在如果在裂纹线上提出一个合理的边界条件, 那么式(3.9a, b)在裂纹线上是正确的, 并且可以确定参数 $Q$ 。

裂纹线上的边界条件可以这样来建立,如图 1 所示,将有限宽板沿裂纹线  $ABCD$  分为上下两部分,考虑任意一部分的平衡有:

$$2kr_0 + 2 \int_{r_0}^{b-a} (\tau_{yz})_{\theta=0} dr = 2P \quad (3.10)$$

将式(3.9b)代入(3.10)式得

$$Q = \frac{\pi}{t}(P - kr_0) \quad (3.11)$$

其中

$$t = \ln \frac{(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2})(\sqrt{(a+r_0)^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2})}{(\sqrt{b^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2})(\sqrt{(a+r_0)^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2})}$$

$r_0$  确定了裂纹线上塑性区的长度,它将由弹塑性边界上的匹配条件确定。

在满足式(3.11)的条件下,裂纹线的边界条件和裂纹面上集中力的边界条件同时满足,由此可见,条件式(3.10)在裂纹线附近区域是非常合理的。

与(3.9a, b)式相对应的弹性位移为

$$w = \frac{2Q}{G} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \theta + O(\theta^3) \quad (3.12)$$

#### § 4. 裂纹线附近弹塑性场在弹塑性边界上的匹配结果

裂纹线附近的弹塑性边界定义为  $r = r_p(\theta)$ ,如图 2 所示,由  $r_p(\theta)$  关于裂纹线的对称性,对于一个小  $\theta$  有

$$r_p(\theta) = r_0 + r_2 \theta^2 + O(\theta^4) \quad (4.1)$$

由此可得弹塑性边界上任意一点的单位法向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  为

$$n_x = 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 - 2 \frac{r_2}{r_0} \theta^2 + O(\theta^4) \right] \quad (4.2a)$$

$$n_y = \left[ 1 - 2 \frac{r_2}{r_0} \theta + O(\theta^3) \right] \quad (4.2b)$$

在弹塑性边界上有

$$x = r_0 + r_0 \left[ \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \theta^2 + O(\theta^4) \right] \quad (4.3a)$$

$$y = r_0 \theta + O(\theta^3) \quad (4.3b)$$

利用(4.1)~(4.3)式,分别求出弹性区应力场(3.9a, b)及(3.11)式和塑性区应力及位移场(3.4a, b)和(3.5)式在弹塑性边界上的法向分量和切向分量的表达式,由弹性区应力场和塑性区应力场在弹塑性边界上的连续性条件,比较等式两端  $\theta$  同次幂的系数得下列方程组:

$$\frac{2 \sqrt{a^2 - c^2} (a+r_0) (P - kr_0)}{t[(a+r_0)^2 - c^2] \sqrt{r_0(2a+r_0)}} = k \quad (4.4)$$

$$\frac{2r_0(a+r_0)}{(a+r_0)^2 - c^2} + \frac{a+r_0}{2a+r_0} - \frac{r_0}{a+r_0} = \frac{r_0}{r_0 + L} \quad (4.5)$$

$$\text{岔集} \left[ \frac{a^2}{(2a+r_0)(a+r_0)} + \frac{2r_0(a+r_0)}{(a+r_0)^2 - c^2} - \frac{a+4r_0}{2(2a+r_0)} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{(a+r_0)^2}{(2a+r_0)^2} + \frac{r_0}{2(a+r_0)} - \frac{r_0(a+4r_0)}{(a+r_0)^2 - c^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4r_0^2(a+r_0)^2}{[(a+r_0)^2-c^2]^2} + \frac{2r_0(a+r_0)^2}{[(a+r_0)^2-c^2](2a+r_0)} \\
 & = \frac{r_0^2}{2(r_0+L)^2} \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

通过式(4.4)可以确定  $r_0$ , 然后代入(4.5)、(4.6)式可分别得到未知量  $L$  和  $r_2/r_0$ 。引入三个无量纲变量,  $\xi = r_0/a$ ,  $\eta = c/a$ ,  $m = b/a$ , 式(4.4)~(4.6)变为下列形式:

$$\frac{2P}{2ak} = \xi + \frac{t\rho^2 \sqrt{\xi(2+\xi)}}{2\sqrt{1-\eta^2}(1+\xi)} \tag{4.7}$$

$$\frac{L}{a} = 1 \left[ \frac{(1+\xi)(2+\xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1+\xi)^2(2+\xi)} - 1 \right] \xi \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_2}{r_0} = & \frac{\rho^2 + 2\xi(1+\xi)^2(2+\xi)}{2(1+\xi)(2+\xi)\rho^2} + \frac{(1+\xi)(2+\xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1+\xi)^2(2+\xi)} \left[ \frac{\xi(1+4\xi)}{\rho^2} \right. \\
 & \left. - \frac{4\xi^2(1+\xi)^2}{\rho^4} + \frac{1+4\xi}{2(2+\xi)} - \frac{3}{2} \frac{(1+\xi)^2}{(2+\xi)^2} - \frac{2\xi(1+\xi)^2}{(2+\xi)\rho^2} - \frac{\xi}{2(1+\xi)} \right] \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

其中 
$$t = \ln \frac{(\sqrt{m^2-\eta^2} - \sqrt{1-\eta^2})(\rho + \sqrt{1-\eta^2})}{(\sqrt{m^2-\eta^2} + \sqrt{1-\eta^2})(\rho - \sqrt{1-\eta^2})}, \quad \rho^2 = (1+\xi)^2 - \eta^2$$

至此, 我们已确定了裂纹线上的塑性区长度  $r_0$  (或  $\xi$ ), 塑性区应力场(3.4a, b)式和位移场(3.5)式中的积分常数  $L$ 。式(4.9)结合式(4.1)及(4.2a, b)可以估计裂纹线附近塑性区的形状, 即裂纹线附近弹塑性边界的形状。

利用弹性区位移与塑性区位移在弹塑性边界上的连续性可得出(3.5)式中的积分常数  $C$  为

$$C = \frac{k}{G}(r_0+L) \tag{4.10}$$

从而得出塑性区内的应变为

$$\gamma_{xz} = -\frac{k}{G} \frac{r_0+L}{(x+L)^2} y + O(y^3) \tag{4.11}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{k}{G} \frac{r_0+L}{x+L} + O(y^2) \tag{4.12}$$

## § 5. 结论与讨论

1. 本文的分析完全放弃了小范围屈服理论的所有近似假定, 并且不再附加任何其它近似假定, 因此, 本文求解的有限宽板裂纹线附近的塑性区应力场及位移场和弹性区应力场在裂纹线附近足够精确。

2. 塑性区应力场和位移场的表达式中由于有积分常数  $L$  的存在, 通常在裂尖附近 ( $x \rightarrow 0$ ) 不存在奇异性。但是, 当  $L \leq 0$  时, 则可能出现奇异性, 这种奇异性与传统意义或小范围屈服意义下的奇异性有本质的不同, 因它不一定出现在裂纹的尖端处, 这意味着裂纹开始起裂扩展或失稳扩展。此外,  $L < 0$  在裂尖附近应变出现负值, 是实际不可能的情况。因此, 本文要求  $L > 0$ ,  $L = 0$  是极限情况, 由(4.8)和(4.7)式可得与裂纹面上荷载位置相对应的在裂纹线上塑性区长度的最大值  $\xi_{\max}$  和相应的最大荷载  $2P_{\max}/2ak$ , 见表1。

表 1 对应于不同荷载位置  $\eta$  的最大荷载  $2P_{\max}/2ak$ 

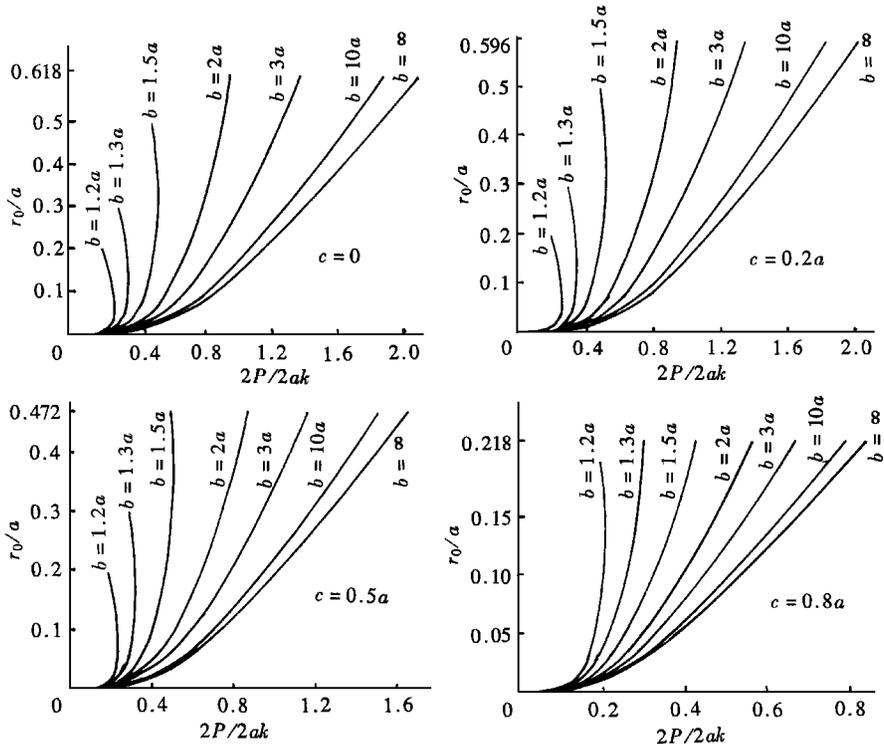
| $\eta = c/a$               | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\xi_{\max} = r_{0\max}/a$ | 0.618 | 0.613 | 0.596 | 0.567 | 0.527 | 0.472 | 0.404 | 0.319 | 0.218 | 0.108 |
| $m = b/a = 2$              | 0.973 | 0.971 | 0.963 | 0.948 | 0.923 | 0.833 | 0.821 | 0.724 | 0.573 | 0.342 |
| $m = b/a = 10$             | 1.897 | 1.883 | 1.842 | 1.770 | 1.665 | 1.524 | 1.338 | 1.099 | 0.792 | 0.427 |
| $m = b/a = \infty$         | 2.104 | 2.087 | 2.038 | 1.953 | 1.830 | 1.665 | 1.452 | 1.181 | 0.846 | 0.445 |

3. 式(4.7)表示集中力位于不同位置(即不同的  $\eta = c/a$ ) 和不同板宽(即不同的  $m = b/a$ ) 时, 裂纹线上的塑性区长度  $r_0$ (或  $\xi$ ) 随荷载  $2P$ (或  $2P/2ak$ ) 的变化关系, 如图3所示。这表明对于不同的  $\eta = c/a$  值, 具有不同的最大塑性区长度和承载力。

4. 当  $m - 1$ , 即  $(b - a)/a$  小于表1中的  $\xi_{\max}$  值时,  $\xi_{\max} = m - 1$ , 这时有有限宽板承载力  $(2P)_{\max} = 2ak(m - 1)$ , 见图3所示。

5. 从图3可以看出, 当  $b - a$ (或  $m - 1$ ) 小于表1中的  $r_{0\max}$ (或  $\xi_{\max}$ ) 时, 即  $\xi_{\max} = m - 1$ , 有限宽板的承载力呈现软化性质。

6. 由(4.2)、(4.9)式可以估计裂纹线性附近塑性区的形状。当荷载  $P$  很小时, 塑性区域的形状呈圆形, 随着荷载的增大塑性区域沿  $y$  方向的变化大于沿  $x$  方向的变化。

图3 在不同  $\eta$  和  $m$  值下  $r_0/a$  随  $2P/2ak$  的变化关系

## 参 考 文 献

- 1 易志坚, 理想弹塑性 III 型扩展裂纹的全新和精确分析, 应用数学和力学, **14**(4) (1993), 327—333.
- 2 Yi Zhijian, The most recent solutions of near crack line field for mode III cracks, Engineering Fracture Mechanics, **47**(1) (1994), 147—155.
- 3 吴承平、王成, 裂纹面任意点受反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析, 应用数学和力学, **17**(12) (1996), 1059—1064.

## Near Crack Line Elastic-Plastic Analysis for a Finite Plate Loaded by Two Pairs of Antiplane Point Forces

Wang Cheng

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 400074, P. R. China)

Zhang Lukun

(Wuxi Education College, Wuxi 214063, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the improved near crack line analysis method proposed in Refs. [1] and [2] is used to investigate a center crack loaded by two pairs of antiplane point forces in a finite plate in an elastic-perfectly plastic solid. And the analytical solutions are obtained, that is, the elastic-plastic stress fields near the crack line and the law that the length of the plastic zone along the crack line is varied with an external loads and the bearing capacity of a finite plate with a center crack. The results of this paper are sufficiently precise near the crack line because the assumptions of the small scale yielding theory have not been used and no other assumptions have been taken.

**Key words** near crack line analysis, two pairs of antiplane point forces, finite plate, elastic-plastic analytical solutions